ЛИТЕРАТУРА

1. *Шахов Е. М.* Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крука. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5, стр. 142–145.
2. *Vogenitz F. W., Bird C. A., Broadwell J. E., Rungaldier H.* Theoretical and experimental study of rarefied supersonic flows about several simple shapes. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 12, pp. 2388–2394.
3. *Ларина И. Н.* Обтекание сферы разреженным газом. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5, сер. 895–898.
4. *Шахов Е. М.* Уравнение Больцмана и моментные уравнения в криволинейных координатах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2, стр. 155–160.
5. *Шахов Е. М.* Поперечное обтекание пластины разреженным газом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6, стр. 107–113.
6. *Коган М. Н.* О гиперзвуковых течениях разреженного газа. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3, стр. 520.
7. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
8. *Иванов А. В.* Экспериментальное исследование влияния чисел Маха и Рейнольдса на структуру сверхзвукового потока разреженного газа в окрестности передней критической точки затупленного тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3, стр. 108–115.

УДК 533.9

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ ЖИДКОСТЕЙ С ВНУТРЕННИМ МАГНИТНЫМ И МЕХАНИЧЕСКИМ МОМЕНТАМИ

В. А. ЖЕЛНОРОВИЧ

(Москва)

Найдена замена неизвестных функций, позволяющая понизить порядок дифференциальных уравнений, описывающих жидкости (газы) с внутренним электромагнитным и механическим моментами.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, которая описывает в рамках специальной теории относительности заряженную жидкость (газ) в электромагнитном поле, обладающую внутренним магнитным и механическим моментами

$$\partial_k P_i{}^k=0, \qquad \partial_k \rho u^k=0 \tag{1}$$

$$\rho \frac{d}{d\tau}\frac{1}{\rho}K^{ij} - \mu_n{}^i F_*{}^{nj} + \mu_n{}^j F_*{}^{ni} = 0$$

$$\rho\theta \frac{d}{d\tau} S = -cu^i\partial_j \pi_i{}^j - \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{sijk}\rho Q^{*s}u^i\right)\frac{d}{d\tau}\frac{1}{\rho}\mu^{jk}$$

$$\rho\theta = \frac{\partial\Lambda_m}{\partial S}, \qquad \partial_j(F^{ij}-4\pi\mu^{ij}) = 4\pi\rho_e u^i$$

Здесь ρ – плотность жидкости, $\rho_e=e\rho$ – плотность свободного электрического заряда жидкости, e – постоянная; u^i – контрвариантные компоненты мнимоединичного безразмерного вектора скорости индивидуальных точек жидкости; $F_{ij}=\partial_i A_j-\partial_j A_i$ – компоненты тензора электромагнитного поля; $\partial_i=\partial/\partial x^i$ – символ производной по переменным x^i ($i=1, 2, 3, 4$) декартовой системы координат наблюдателя псевдоевклидового пространства событий с метрическим тензором g^{ij} ($g^{11}=g^{22}=g^{33}=-g^{44}=1$, $g^{ij}=0$ при $i\neq j$); $d/d\tau=cu^i\partial_i$ – символ производной по собственному времени, c – скорость света в пустоте; S – энтропия, $\Lambda_m=\Lambda_m(\rho, S)$ – задаваемая функция; $K^{ij}=\nu\mu^{ij}$ – компоненты антисимметрического тензора внутреннего механического момента жидкости, пропорциональные компонентам μ^{ij} тензора объемной плотности внутреннего электромагнитного момента; ν – постоянная (гиромагнитное отношение). Величины ρ, u^i, μ^{ij} в уравнениях (1) связаны соотношениями (μ – постоянная)

$$u_j\mu^{ij}=0, \qquad {}^1/{}_2\mu_{ij}\mu^{ij}=\mu^2\rho^2 \tag{2}$$

показывающими, что модуль вектора удельной плотности магнитного момента жидкости постоянен и что в собственной системе координат электрический момент жидкости равен нулю. В силу (2) тензор электромагнитного момента полностью определяется четырехмерным вектором магнитного момента $\mu_i={}^1/_2\varepsilon_{ijks}u^j\mu^{ks}$, ε_{ijks} – компоненты единичного антисимметрического по всем индексам псевдотензора Леви – Чивита $\varepsilon_{1234}=1$. Компоненты тензора энергии-импульса P_i^k и компоненты тензора F_*^{ij}, входящие в уравнения (1), определяются равенствами

(3)
$$P_i^k=(p+\varepsilon)u_iu^k+p\delta_i^k+\frac{1}{4\pi}\left(F_{in}H^{kn}-\frac{1}{4}F_{jn}H^{jn}\delta_i^k\right)-u^k\mu_i^jF_{js}u^s+$$
$$+c(u_j\partial_iK^{kj}+u^k\partial_jK_i^j)+\tau_i^k$$
$$F_*^{ij}=(\delta_m^i+u_mu^i)(\delta_n^j+u_nu^j)(F^{mn}-\varepsilon^{mnks}u_kQ_s^*)+c\nu(\partial^iu^j-\partial^ju^i)$$
$$p=\rho^2\frac{\partial\Lambda_m/\rho}{\partial\rho}-\frac{1}{4}F_{ij}\mu^{ij},\qquad \varepsilon=\Lambda_m-\frac{1}{4}F_{ij}\mu^{ij},\qquad H^{ij}=F^{ij}-4\pi\mu^{ij}$$

(4)
$$\tau_i^k=N_i^k-(\delta_i^ku^j-\delta_i^ju^k)\left(\rho Q_j-\frac{1}{2}\varepsilon_{jsmn}\mu^{sm}Q^{*n}\right)$$

Компоненты θ, Q_i, Q_i^* могут задаваться как функции параметров S, ρu^i, μ^i и производных по координатам и времени от этих параметров таким образом, чтобы выполнялось соотношение

(5)
$$\rho\theta\partial_iS+Q_j\partial_i(\rho u^j)+Q_j^*\partial_i\mu^j=\partial_jN_i^j$$

где N_i^j определяются заданием θ, Q_i, Q_i^*. Задание величин θ, Q_i, Q_i^* связано с конкретизацией механической и термодинамической постановки задачи. В частности, для консервативных голономных систем величины θ, Q_i, Q_i^* можно определить равенствами

(6)
$$\rho\theta=-\frac{\delta\Lambda}{\delta S},\qquad Q_i=-\frac{\delta\Lambda}{\delta\rho u^i},\qquad Q_i^*=-\frac{\delta\Lambda}{\delta\mu^i}$$
$$N_i^j=-\Lambda\delta_i^j+\sum_{\gamma=0}^{n-1}\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta\partial_j\partial_{s_1}\dots\partial_{s_\gamma}S}\partial_i\partial_{s_1}\dots\partial_{s_\gamma}S+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta\Lambda}{\delta\partial_j\partial_{s_1}\dots\partial_{s_\gamma}\rho u^m}\partial_i\partial_{s_1}\dots\partial_{s_\gamma}\rho u^m+\frac{\delta\Lambda}{\delta\partial_j\partial_{s_1}\dots\partial_{s_\gamma}\mu^m}\partial_i\partial_{s_1}\dots\partial_{s_\gamma}\mu^m\right)$$

где $\delta/\delta S$ – символ производной Лагранжа, Λ определена как функция величин S, ρu^i, μ^i, а также от производных от этих величин порядка n. В этом случае соотношение (5) выполняется тождественно.

Система уравнений (1) содержит уравнения для энергии-импульса, уравнение неразрывности, уравнения моментов количества движения, уравнение баланса энтропии, уравнения Максвелла для электромагнитного поля в среде. Уравнения (1) можно получить обычными методами механики сплошных сред при помощи вариационного принципа или из уравнения энергии, причем если величины θ, Q_i, Q_i^*, N_i^j определяются равенствами (6), то внутренняя энергия жидкости U определяется следующим образом (без членов с электромагнитным полем):

(7)
$$\rho U=\Lambda_m(\rho,S)+c\nu u_j\partial_i\mu^{ij}+\Lambda$$

Уравнения (1) могут описывать, например, парамагнитные жидкости (газы) в электромагнитном поле [1].

Рассмотрим в пространстве событий поле четырехкомпонентного спинора $\psi(x^i)$, заданное компонентами $\psi^A(x^i)$ в декартовой системе координат x^i. Обозначим через $\psi^+(x^i)$ поле сопряженного спинора и рассмотрим следующую систему тензоров, определяемых полями $\psi(x^i)$, $\psi^+(x^i)$:

(8)
$$\Omega=\psi^+\psi,\quad j^k=i\psi^+\gamma^k\psi,\quad M^{ij}=i\psi^+\gamma^{ij}\psi$$
$$S^k=\psi^+\gamma^{*k}\psi,\quad N=\psi^+\gamma^5\psi$$

Здесь $i=\sqrt{-1}$, γ^i – четырехрядные матрицы Дирака [2]. Спин-тензоры γ^{ik}, γ^{*i}, γ^5 определяются равенствами

(9)
$$\gamma^{ik}=\frac{1}{2}(\gamma^i\gamma^k-\gamma^k\gamma^i),\qquad \gamma^{*k}=-\frac{1}{6}\varepsilon^{kijs}\gamma_i\gamma_j\gamma_s$$
$$\gamma^5=-\frac{1}{24}\varepsilon^{ijks}\gamma_i\gamma_j\gamma_k\gamma_s$$

В силу определений (8) компоненты Ω, j^k, M^{ij}, S^k, N удовлетворяют следующим инвариантным уравнениям [3, 4]:

$$j_k j^k = -S_k S^k = -\Omega^2 - N^2, \quad j_k S^k = 0 \tag{10}$$

$$\Omega j_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{kijs} S^i M^{js}, \quad \Omega S_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{kijs} j^i M^{js}$$

$$N j^k = S_i M^{ik}, \quad N S^k = j_i M^{ik}$$

$$N M^{ik} - \frac{1}{2}\varepsilon^{ikjs}\Omega M_{js} = j^k S^i - j^i S^k$$

Система компонент Ω, j^k, M^{ij}, S^k, N, определенных равенствами (8), задает поле спинора $\psi(x^i)$ с точностью до одновременного умножения всех компонент ψ на $\exp(i\varphi)$, где $\varphi=\varphi(x^i)$ – произвольная вещественная функция [3, 4]

$$\psi^A = \frac{\psi^{\dot{B}A}}{\sqrt{\psi^{\dot{B}B}}}\exp(i\varphi), \quad \|\psi^{\dot{B}A}\| = \frac{1}{4}\left(\Omega I - ij^k\gamma_k + \right. \tag{11}$$

$$\left. + \frac{i}{2}M^{ij}\gamma_{ij} - S^k\gamma_k{}^* + N\gamma^5\right)[(E\Pi)^T]^{-1}$$

В равенстве (11) Π – инвариантный спинор второго ранга, определяемый соотношениями $\gamma^k = \Pi\dot{\gamma}^k\Pi^{-1}$, $\Pi\dot{\Pi} = I$; I – единичная четырехрядная матрица, точка над буквой означает комплексное сопряжение; E – метрический спинор второго ранга, определяемый соотношением $(\gamma^k)^T = -E\gamma^k E^{-1}$, T – символ транспонирования.

Возвращаясь к уравнениям (1), положим по определению

$$\rho^2 = \Omega^2 + N^2, \quad \Omega = \rho\cos S, \quad N = \rho\sin S \tag{12}$$

$$\rho u^k = j^k, \quad \mu^{ik} = \mu\left(\Omega M^{ik} + \frac{1}{2}\varepsilon^{ikjs} N M_{js}\right) \Big/ \sqrt{\Omega^2 + N^2}$$

Пользуясь (10), нетрудно проверить, что компоненты ρ, u^i, μ^{ij}, определенные равенствами (12), уравнениям (2) удовлетворяют тождественно.

Рассмотрим следующие уравнения для функций $\psi(x^i)$, $\psi^+(x^i)$, $F_{ij}(x^i)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma^i\partial_i\psi + (\varkappa I + i\varkappa_i\gamma^i + \varkappa_i{}^*\gamma^{*i} + \varkappa^*\gamma^5)\psi = 0 \\ -\partial_i\psi^+\gamma^i + \psi^+(\varkappa I + i\varkappa_i\gamma^i + \varkappa_i{}^*\gamma^{*i} + \varkappa^*\gamma^5) = 0 \end{array}\right. \begin{array}{r}(13)\\(14)\end{array}$$

$$\partial_j(F^{ij} - 4\pi\mu^{ij}) = 4\pi\rho_e u^i \tag{15}$$

где коэффициенты $\varkappa$, $\varkappa_i$, $\varkappa_i{}^*$, $\varkappa^*$ определяются равенствами

$$\varkappa = \frac{1}{2c\mu\nu\rho}\left[\Omega\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\rho} - \frac{N}{\rho}\left(\frac{\partial\Lambda_m}{\partial S} - \rho\theta - c\mu\nu\partial_i S^i\right) + \frac{\Omega}{2\rho}F_{ij}\mu^{ij}\right] \tag{16}$$

$$\varkappa^* = \frac{1}{2c\mu\nu\rho}\left[N\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\rho} + \frac{\Omega}{\rho}\left(\frac{\partial\Lambda_m}{\partial S} - \rho\theta - c\mu\nu\partial_i S^i\right) + \frac{N}{2\rho}F_{ij}\mu^{ij}\right]$$

$$\varkappa_i = -\frac{1}{4c\nu\rho}\varepsilon_{jkmi}F^{jk}S^m - \frac{e}{2c\mu\nu}A_i - \frac{1}{2c\mu\nu}Q_i$$

$$\varkappa_i{}^* = \frac{1}{4c\nu\rho}\varepsilon_{jkmi}F^{jk}j^m + \frac{1}{2}\partial_i S - \frac{1}{2c\nu}Q_i{}^*$$

Пользуясь методами, рассмотренными в [3–6], можно показать, что все уравнения в (1), при произвольных θ, Q_i, $Q_i{}^*$, удовлетворяющих уравнению (3), являются следствием уравнений (13) – (15). Например, второе уравнение в (1) получается, если из уравнений (13), свернутых с ψ^+, вычесть уравнения (14), свернутые с ψ. Третье уравнение в (1) получается, если из уравнений (13), свернутых с $\psi^+\gamma^{ij}$, вычесть уравнения (14), свернутые с $\gamma^{ij}\psi$.

Таким образом, соотношения (12) можно рассматривать как замену неизвестных функций, позволяющую свести систему сложных нелинейных дифференциальных уравнений (1) к значительно более простой системе (13)—(15) дифференциальных уравнений на единицу меньшего порядка. Отметим, что если компоненты θ, Q_i, $Q_i{}^*$

определить равенствами

$$\rho\theta=\rho\theta_0-c\mu\nu\partial_i S^i, \qquad Q_i^*=c\nu\partial_i S+Q^*(\rho, S)S_i+Q(\rho, S)u_i \tag{17}$$

$$Q_i=P(\rho, S)u_i+P^*(\rho, S)S_i$$

то уравнения (13), (14) линейны относительно производных $\partial_i\psi$, $\partial_i\psi^+$.

Если в уравнениях (1) положить $A_i=0$, $F_{ij}=0$, то уравнения (1) определяют модели спиновых жидкостей. В связи с этим отметим, что уравнения (13)—(15) (при $A_i=0$, $F_{ij}=0$), по-видимому, можно использовать также для нахождения приближенных решений уравнений релятивистской динамики жидких сред в случаях, когда влиянием спина на движение жидкости можно пренебречь.

Автор выражает признательность Л. И. Седову за обсуждение работы и полезные замечания.

Институт механики
Московского государственного университета

Поступила 2 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вонсовский С. В.* Магнетизм. М., «Наука», 1971.
2. *Картан Э.* Теория спиноров. М., Изд-во иностр. лит., 1947.
3. *Желнорович В. А.* Спинор как инвариантный объект. ПММ, 1966, т. 30, № 6.
4. *Желнорович В. А.* Представление спиноров вещественными и комплексными тензорными агрегатами. Теоретическая и математическая физика, 1970, т. 2, № 1.
5. *Желнорович В. А.* Модели сред с внутренним электромагнитным и механическим моментами. В сб. «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды (К 60-летию акад. Л. И. Седова)». М., «Наука», 1969.
6. *Желнорович В. А.* Спинорное поле как слияние тензорных полей. Вестн. МГУ, Сер. физ.-астрон., 1972, № 6.

УДК 535.321

О ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕФРАКЦИИ ВОЗДУХА ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

А. И. ХАРИТОНОВ, К. С. ХОРОШКО, В. П. ШКАДОВА

(Москва)

Связь оптической характеристики газовой среды — показателя преломления n — с плотностью ρ при нормальных условиях дается соотношением [1] $(n-1)/\rho=R$, где R — удельная рефракция газа (постоянная Гладстона — Дейла). При температурах, соответствующих возбуждению колебательных уровней молекул, изменение R ничтожно мало [2]. С дальнейшим ростом температуры, приводящим к развитию физико-химических процессов, зависимость между n и ρ становится более сложной. Экспериментальные исследования рефракций чистых газов (кислорода, азота) в условиях их диссоциации и ионизации проведены в [3].

В данной работе приводятся результаты теоретического расчета удельной рефракции воздуха при температурах 2000—12 000° К и ее экспериментального определения при температурах 2000—7000° К.

Воздух рассматривался как смесь из 78% азота и 22% кислорода. До температуры 6000° К, когда отсутствует заметная ионизация, учитывались компоненты O_2, N_2, O, N, NO; при температурах свыше 6000° К — O_2, N_2, O, N, NO, O_2^+, N_2^+, NO^+, O^+, e^-. Расчет удельной рефракции проводился по формуле [4]

$$R_*=\frac{2\pi N_A}{\mu}\sum_i a_i x_i, \qquad \mu=\sum_i x_i\mu_i$$

где R_* — рефракция смеси газов (воздуха); μ_i x_i, a_i — молекулярный вес, молярная доля и средняя поляризуемость i-й газовой компоненты; μ — средний молекулярный вес смеси. Эта формула строго справедлива лишь для идеальной смеси газов. Однако ее можно также с известным приближением использовать для вычисления R_* реагирующей смеси, находящейся в термодинамическом равновесии. Молярные доли x_i отдельных компонент в зависимости от температуры и давления воздуха находились из таблиц [5]. При расчетах использовались следующие численные значения поляризуемостей компонент воздуха: $a(N_2)=1.76\cdot10^{-24}$ *см*^{3}, $a(O_2)=1.60\cdot10^{-24}$ *см*^{3}, $a(N)=1.13\cdot$