воды при $\theta=\pi/2$ и $\theta=\pi$ (угол θ отсчитывается от нормали к ударному фронту). Нетрудно видеть качественное соответствие расчетных и опытных эпюр давления.

В заключение авторы благодарят А. М. Степанова за любезно предоставленные экспериментальные данные.

Поступила 15 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гриб А. А., Рыков О. С., Христианович С. А.* Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
2. *Гриб А. А., Рябинин А. Г., Христианович С. А.* Об отражении плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.

УДК 533.6.011.8

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ОКОЛО ДИСКА

Е. М. ШАХОВ

(Москва)

Численным конечно-разностным методом решена задача осесимметричного обтекания диска установившимся потоком разреженного газа для приближенного кинетического уравнения [1].

В настоящее время известны решения осесимметричных задач, полученные методом Монте-Карло [2]. Регулярным численным методом построено только одно решение обтекания сферы [3]. В данной работе применена другая, по-видимому, более эффективная численная процедура.

Воспользуемся цилиндрическими координатами x, r, φ в физическом пространстве (x – ось симметрии) и ξ_x, ζ, ω в пространстве скоростей ξ. Здесь ζ – составляющая молекулярной скорости, расположенная в плоскости, перпендикулярной оси симметрии, а ω – угол между компонентой ζ и меридиональной плоскостью. Кинетическое уравнение в цилиндрических переменных имеет вид [4]

$$\xi_x \frac{\partial f}{\partial x} + \zeta \cos\omega \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\zeta \sin\omega}{r} \frac{\partial f}{\partial \omega} = \frac{1}{\tau}(f^+ - f) \tag{1}$$

Выражения для функции f^+ и частоты столкновений $1/\tau$ даны в [1].

При численном решении кинетического уравнения применялась обычная итерационная процедура, когда в каждом приближении величины f^+ и $1/\tau$ известны, и схема конечных разностей

$$\xi_x \frac{f_{ijk}-f_{i-\alpha jk}}{x_i-x_{i-\alpha}} + \zeta\cos\omega_k \frac{f_{ijk}-f_{ij-\beta k}}{r_j-r_{j-\beta}} - \frac{\zeta\sin\omega_k}{r_j}\frac{f_{ijk}-f_{ijk-1}}{\omega_k-\omega_{k-1}} = \frac{1}{\tau_{ijk}}(f_{ijk}^+ - f_{ijk}) \tag{2}$$

$$\alpha=\operatorname{sign}\xi_x, \quad \beta=\operatorname{sign}\cos\omega_k$$

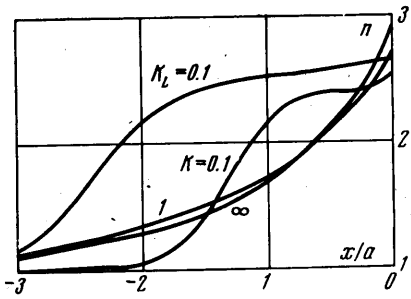
Индексы i, j возрастают с ростом x и r соответственно. Начальное значение индекса $k=0$ соответствует $\omega=\pi$, с ростом k угол ω уменьшается.

Задача обтекания диска решалась при граничном условии полностью диффузного отражения молекул от твердой поверхности, поддерживаемой при постоянной температуре T_w. Решение зависит от следующих параметров: числа Кнудсена K, безразмерной скорости набегающего потока $U=u_\infty/\sqrt{2RT_\infty}$, температуры поверхности T_w, числа Прандтля σ и закона вязкости $\mu(T)$. Число Кнудсена считаем определенным по диаметру диска $2a$.

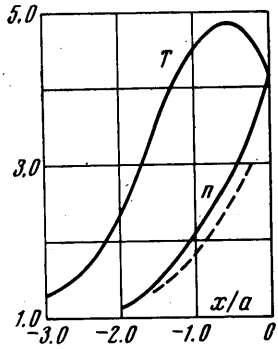
С целью сравнения с соответствующим плоским течением была выполнена серия расчетов для чисел $K\geqslant 0.1$ при $U=1.93$, $\sigma={}^2/_3$, $\mu=T$; температура поверхности выбиралась близкой к равновесной. Результаты расчетов иллюстрирует фиг. 1, на которой представлено изменение плотности газа на оси симметрии перед телом в зависимости от числа Кнудсена; кривые для $K=0.1$ 1, ∞ соответствуют температуре поверхности

T_w=2.8, 3.0, 3.125 (температура поверхности отнесена к температуре набегающего потока T_∞). Там же для сравнения нанесен профиль плотности газа на линии торможения перед пластиной бесконечного размаха при числе Кнудсена K_L=0.1 и T_w=2.8.

Как и следовало ожидать, картина течения около диска качественно не отличается от той, которая возникает в соответствующем двумерном случае, при поперечном обтекании пластины [5]. Разница лишь в линейных масштабах области возмущений перед телом: в осесимметричном течении область сжатия перед телом примерно в 1.5 раза меньше. С уменьшением числа Кнудсена увеличивается зона повышенной плотности перед препятствием, происходит формирование ударной волны и постепенное отделение структуры волны сжатия от пристеночного слоя. При K=0.1 уже четко видна структура ударной волны, режим течения по характеру близок к режиму вязкого течения в рамках теории сплошной среды: малые изменения температуры поверхности тела T_w локализуются в пристеночном слое. Даже при K=0.2 решения, соответствующие различным, но мало отличающимся значениям T_w, различаются лишь вблизи поверхности, структура же самой волны почти не зависит от



Фиг. 1



Фиг. 2

T_w. Более того, динамические характеристики потока и в пристеночной области не подвержены сколько-нибудь существенному влиянию температуры поверхности.

Зависимость коэффициента сопротивления диска C_D от числа Кнудсена, определенного по диаметру, оказалась очень близкой к соответствующей зависимости $C_D(K_L)$ для пластины (L – ширина пластины) [5]. Максимальное отклонение при числах $K\approx0.5$; сопротивление диска меньше на 1–2%.

Были выполнены также расчеты для бо́льших чисел U. Увеличение скоростного отношения U в некотором смысле эквивалентно увеличению числа Кнудсена, так как с ростом U возрастает длина пробега молекул, набегающих на тело, относительно газа в зоне торможения вблизи диска [6, 7]. В качестве примера на фиг. 2 изображены профили плотности и температуры на оси симметрии перед телом для K=0.24, U=3.14, T_w=4, $\mu=T$. Там же для сравнения пунктиром нанесен профиль плотности, полученный при экспериментальном исследовании обтекания диска в аэродинамической трубе низкой плотности [8]. Экспериментальный профиль соответствует параметрам набегающего потока: K=0.24, число Маха M=3.75 (соответствующее скоростное отношение для двухатомного газа равно 3.14), температура поверхности диска близка к равновесной.

Строго говоря, сопоставление расчетных данных с результатами опытов не вполне корректно, так как эксперименты выполнялись с двухатомным газом. Но так как время релаксации внутренних степеней свободы двухатомных молекул существенно превышает соответствующее время релаксации их поступательного движения, можно полагать, что при не очень малых числах Кнудсена двухатомный газ ведет себя подобно одноатомному. Внутренние степени свободы газа, первоначально находящегося в состоянии равновесия, возбуждаются в основном при столкновении со стенкой. Последнее условие сводится к тому, что температура поверхности близка к температуре торможения двухатомного газа.

Возвращаясь к фиг. 2, можно видеть, что экспериментальный профиль располагается заметно ниже расчетного. Отклонение составляет 10–15%. Принимая во внимание точность опытов (10–15%) и возможные отклонения, вносимые возбуждением внутренних степеней свободы, а также некоторые другие неучтенные факторы, следует оценить согласие теоретических и экспериментальных результатов как удовлетворительное.

Поступила 10 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шахов Е. М.* Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крука. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5, стр. 142–145.
2. *Vogenitz F. W., Bird C. A., Broadwell J. E., Rungaldier H.* Theoretical and experimental study of rarefied supersonic flows about several simple shapes. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 12, pp. 2388–2394.
3. *Ларина И. Н.* Обтекание сферы разреженным газом. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5, сер. 895–898.
4. *Шахов Е. М.* Уравнение Больцмана и моментные уравнения в криволинейных координатах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2, стр. 155–160.
5. *Шахов Е. М.* Поперечное обтекание пластины разреженным газом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6, стр. 107–113.
6. *Коган М. Н.* О гиперзвуковых течениях разреженного газа. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3, стр. 520.
7. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
8. *Иванов А. В.* Экспериментальное исследование влияния чисел Маха и Рейнольдса на структуру сверхзвукового потока разреженного газа в окрестности передней критической точки затупленного тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3, стр. 108–115.

УДК 533.9

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ ЖИДКОСТЕЙ С ВНУТРЕННИМ МАГНИТНЫМ И МЕХАНИЧЕСКИМ МОМЕНТАМИ

В. А. ЖЕЛНОРОВИЧ

(Москва)

Найдена замена неизвестных функций, позволяющая понизить порядок дифференциальных уравнений, описывающих жидкости (газы) с внутренним электромагнитным и механическим моментами.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, которая описывает в рамках специальной теории относительности заряженную жидкость (газ) в электромагнитном поле, обладающую внутренним магнитным и механическим моментами

$$\partial_k P_i^k = 0, \qquad \partial_k \rho u^k = 0 \tag{1}$$

$$\rho \frac{d}{d\tau} \frac{1}{\rho} K^{ij} - \mu_n{}^i F_*{}^{nj} + \mu_n{}^j F_*{}^{ni} = 0$$

$$\rho\theta \frac{d}{d\tau} S = -cu^i \partial_j \tau_i{}^j - \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{sijk} \rho Q^{*s} u^i \right) \frac{d}{d\tau} \frac{1}{\rho} \mu^{jk}$$

$$\rho\theta = \frac{\partial \Lambda_m}{\partial S}, \qquad \partial_j (F^{ij} - 4\pi\mu^{ij}) = 4\pi\rho_e u^i$$

Здесь ρ – плотность жидкости, $\rho_e = e\rho$ – плотность свободного электрического заряда жидкости, e – постоянная; u^i – контрвариантные компоненты мнимоединичного безразмерного вектора скорости индивидуальных точек жидкости; $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ – компоненты тензора электромагнитного поля; $\partial_i = \partial/\partial x^i$ – символ производной по переменным x^i ($i=1, 2, 3, 4$) декартовой системы координат наблюдателя псевдоевклидового пространства событий с метрическим тензором g^{ij} ($g^{11} = g^{22} = g^{33} = -g^{44} = 1$, $g^{ij} = 0$ при $i \neq j$); $d/d\tau = cu^i \partial_i$ – символ производной по собственному времени, c – скорость света в пустоте; S – энтропия, $\Lambda_m = \Lambda_m(\rho, S)$ – задаваемая функция; $K^{ij} = \nu\mu^{ij}$ – компоненты антисимметрического тензора внутреннего механического момента жидкости, пропорциональные компонентам μ^{ij} тензора объемной плотности внутреннего электромагнитного момента; ν – постоянная (гиромагнитное отношение). Величины ρ, u^i, μ^{ij} в уравнениях (1) связаны соотношениями (μ – постоянная)

$$u_j \mu^{ij} = 0, \qquad {}^1/_2 \mu_{ij} \mu^{ij} = \mu^2 \rho^2 \tag{2}$$

показывающими, что модуль вектора удельной плотности магнитного момента жидкости постоянен и что в собственной системе координат электрический момент жидкости равен нулю. В силу (2) тензор электромагнитного момента полностью опреде-