

4. Величины отношений $P'_6 \max / P'_6 \min < 2$ для $M_1 < 10$.

5. Экспериментальные данные работ [1, 9-11], а также данные¹ для $M_1 = 1.35$ и $M_2 = 1.4$ находятся в пределах расчетных значений.

Для критической точки в рассмотренном диапазоне значений M_1 и M_2 экспериментальные значения давлений лежат в пределах $1.4 \leq P'_6 \leq 2.2$.

Поступила 1 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Merritt D. L., Aronson P. M. Study of blast-bow wave interactions in a wind tunnel. AIAA paper, 1965, No. 65-5.
2. Арутюнян Г. М. К расчету давления в критической точке при падении ударной волны на тело, движущееся со сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6.
3. Тэйлор Т. Д., Хаджинс Н. Е. м. Взаимодействие встречной взрывной волны с затупленным телом, движущимся со сверхзвуковой скоростью. Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 2.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
5. Гласс И., Паттерсон Г. Теоретическое и экспериментальное исследование потоков в ударной трубе. В сб. «Ударные трубы». М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. Белоцерковский О. М., Булжбаев А., Голомазов М. М., Грудницкий В. Г., Душин В. К., Иванов В. Ф., Лунькин Ю. П., Попов Ф. Д., Рябинкин Г. М., Тимофеева Т. Я., Толстых А. И., Фомин В. Н., Шугаев Ф. В. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. М., ВЦ АН СССР, 1966.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
8. Яковлев Ю. С. Гидродинамика взрыва. Л., Судпромгиз, 1961.
9. Ruetenik J. R., Lemcke B. Study of blast-bow wave interactions in a shock tube and shock tunnel. J. Spacecraft and Rockets, 1967, vol. 4, No. 8.
10. Lemcke B. Double-driver shock tube for shock-on-shock simulation. Stockholm, 1967 (Flygtekniska forsoksanstalten. Meddelande. 109).
11. Ruetenik J. R., Lemcke B. Study of blast-bow wave interactions in a shock tube and shock tunnel. AIAA paper, 1966, No. 66-409.

УДК 533.6.011.72

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТОЧЕЧНОГО СТОКА С ПРОХОДЯЩЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ В ВОДЕ

Л. П. МИХАЙЛОВА, А. Г. РЯБИНИН

(Ленинград)

Исследована структура волны разрежения, образованной взаимодействием ударной волны с точечным стоком. Установлено наличие особой области в волне разрежения в диапазоне углов $\pi/2 \leq \theta \leq 3/2\pi$, давление в которой превышает давление в проходящей волне. Дано качественное сопоставление с экспериментами.

1. При обтекании сосредоточенного стока (например, газового пузырька) ударной волной возникает волна разрежения, которая в линейном (акустическом) приближении имеет вид сферы радиуса $a_0 t$ с первоначальным центром в стоке. За этой сферой давление мгновенно падает до некоторого значения, лежащего ниже гидростатического. Волна разрежения в точной постановке представляет собой непрерывное течение, взаимодействующее сложным образом с породившей ее ударной волной. Результаты такого взаимодействия значительно отличаются от картины, предсказываемой линейным приближением.

Если интересоваться только положительными значениями давления, то волну разрежения в радиальном направлении можно принимать «короткой» [1].

2. В сферической системе координат положение точки в пространстве будет определяться углами θ (угол между направлением ударной волны и радиус-вектором точки r), Ψ (угол в плоскости ударного фронта) и величиной радиус-вектора r . Ввиду симметрии течения по углу Ψ можно считать, что параметры отраженной волны зависят только от θ , r и t .

¹ Л и с и н Ю. Г. Набегание плоской ударной волны на тело, обтекаемое сверхзвуковым потоком. Канд. дисс., МГУ, 1971.

Положим $U_r = a_0 M$, $U_\theta = a_0 v$ — проекции скорости среды на направления r и θ ; $r = a_0 t(1 + \delta)$; $a = a_0(1 + \alpha)$, причем $\alpha = (n-1)\Delta p / 2Bn$; δ , M и v — малые одного порядка. Для случая автомодельного течения основная система уравнений короткой волны запишется

$$(2.1) \quad \frac{\partial M}{\partial \delta} = \frac{2}{n-1} \frac{\partial \alpha}{\partial \delta}, \quad \frac{\partial v}{\partial \delta} = \frac{2}{n-1} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}$$

$$(M + \alpha - \delta) \frac{\partial}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + M = 0$$

Из первого уравнения системы (2.1) следует:

$$(2.2) \quad M = \frac{2}{n-1} \alpha - \frac{2}{n-1} \varphi(\theta)$$

где $\varphi(\theta)$ — произвольная функция, определяемая из условий на фронте волны разрежения, т. е. $\varphi(\theta) = \alpha_1 - 1/2 M_1 (n-1) \cos \theta$ (α_1 и M_1 — параметры проходящей ударной волны).

Оставшаяся система уравнений после нормировки $\delta = \alpha_*^2 \Delta$, $M = M_1 \mu$, $v = M_1 v$ ($\alpha_*^2 = 1/2(n+1)M_1$) приводится к виду

$$(2.3) \quad \frac{\partial v}{\partial \Delta} = \alpha_*^2 \left[\frac{\partial \mu}{\partial \theta} + \varphi_1'(\theta) \right]$$

$$\left[\mu - \Delta + \frac{n-1}{n+1} \varphi_1(\theta) \right] \frac{\partial \mu}{\partial \Delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \mu = 0$$

где

$$\Delta \sim \mu \sim v \sim \varphi_1 \sim \varphi_1' \sim 1$$

Граничные условия в нормированной форме на фронте волны разрежения запишутся

$$(2.4) \quad \Delta_1 = \frac{n-1}{n+1} + \frac{2}{n+1} \cos \theta, \quad \mu_1 = \cos \theta = 1 - \varphi_1(\theta), \quad v_1 = -\sin \theta = -\varphi_1'(\theta)$$

Из первого уравнения (2.3) можно заключить, что $v(\Delta, \theta)$ слабо зависит от Δ и с точностью до малой второго порядка может быть принята равной граничному значению $v = v_1(\theta)$.

Второе уравнение (2.3) с учетом граничных условий (2.4) имеет решение вида

$$(2.5) \quad \Delta = \frac{n-1}{n+1} (1 - \cos \theta) + \mu + \left(\mu - \frac{1}{2} \cos \theta \right) \ln \left| \frac{1/2 \cos \theta}{\mu - 1/2 \cos \theta} \right|$$

Распределение давления в волне разрежения подчиняется зависимости

$$(2.6) \quad \Delta = -\frac{2}{n+1} (1 - \cos \theta) + \frac{\Delta p}{\Delta p_1} + \left(\frac{p-p_1}{\Delta p_1} + \frac{1}{2} \cos \theta \right) \times$$

$$\times \ln \left| \frac{1/2 \cos \theta}{(p-p_1)/\Delta p_1 + 1/2 \cos \theta} \right|$$

$$\mu = \Delta p / \Delta p_1 - (1 - \cos \theta), \quad \Delta p = p - p_0$$

Анализ полученного решения показывает, что оно теряет смысл при $\mu < \mu_* = 1/2 \cos \theta$. Вдоль линии $\mu = \mu_*$ логарифмический член в решении (2.5) исчезает. Давление вдоль этой критической линии меняется по закону $(p-p_1)/\Delta p_1 + 1/2 \cos \theta = 0$, при $\theta \sim 0$ $\Delta p_* \approx 1/2 \Delta p_1$, а при $\theta \sim \pi/2$ $\Delta p_* \approx \Delta p_1$.

Уравнение критической линии в переменных Δ и θ имеет вид

$$\Delta_* = \frac{n-1}{n+1} - \frac{n-3}{2(n+1)} \cos \theta$$

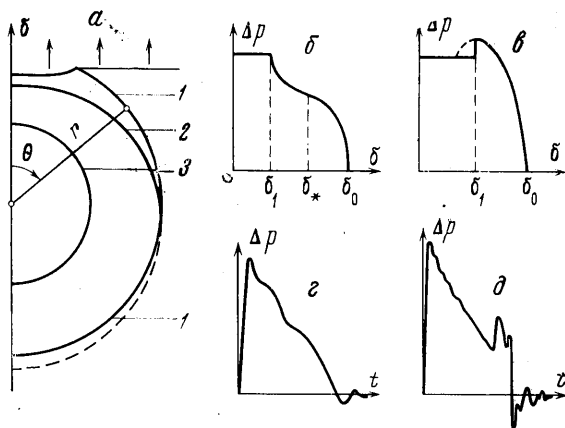
т. е. критическая линия имеет с фронтом волны разрежения две общие точки $\theta = \pm \pi/2$. На фигуре, а критическая линия представлена кривой 2, фронт волны разрежения — кривой 1.

3. Можно показать, что критическая линия является особым решением и линией параболичности исходной системы уравнений (2.3). В области между фронтом волны и критической линией система (2.3) приводится к уравнению для μ гиперболического типа, а при $\mu < \mu_*$ — к уравнению эллиптического типа

$$(3.1) \quad f \frac{\partial^2 \mu}{\partial \Delta^2} + \frac{\alpha_*^2}{2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \theta^2} + F \left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta}, \mu, \theta \right) = 0$$

$$f = \mu - \Delta + \frac{n-1}{n+1} \varphi_1(\theta)$$

Решение в области $\mu < \mu_*$ должно строиться с учетом условий на контуре. Для этого необходимо записать граничные условия на задней границе течения (вдоль



линии $\Delta p = 0$). Используя первый интеграл (2.2) и полагая в нем $\Delta p = 0$, будем иметь

$$(3.2) \quad \mu_0 = -(1 - \cos \theta)$$

При $\theta = 0$ $\mu_0 = 0$, при $\theta = \pi$ $\mu_0 = -2$ — принцип удвоения скорости потока воды при нормальном отражении волны от свободной поверхности. Функция v по-прежнему принимается слабо зависящей от Δ .

Решение системы для рассматриваемой области запишется

$$(3.3) \quad v = -\sin \theta$$

$$\Delta = \frac{n-1}{n+1} (1 - \cos \theta) + \mu + \left(\mu - \frac{1}{2} \cos \theta \right) \ln \left| \frac{1/2 \cos \theta - 1}{\mu^{-1/2} \cos \theta} \right|$$

Анализ полученного решения показывает, что вдоль критической линии ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) оно непрерывно совмещается с решением в гиперболической зоне, а в диапазоне углов $\pi/2 < \theta \leq 3/2\pi$ наблюдается повышение давления по сравнению с давлением в проходящей ударной волне, причем величина этого повышенного давления нарастает от нуля при $\theta = \pi/2$ до некоторого наибольшего значения при $\theta = \pi$ и затем снова уменьшается при $\theta \rightarrow 3/2\pi$.

Изменение перепада давления во фронте волны разрежения в указанном диапазоне углов может быть подсчитано по формуле

$$(3.4) \quad \frac{p_1 - p_*}{p_1} \cong \frac{1}{8} \cos \theta [1 + \ln(2 - 4/\cos \theta)]$$

Расчет формы ударной волны, искаженной волной разрежения, производится по схеме, изложенной в [2].

На фигуре, б представлена расчетная эпюра давления в волне разрежения в первом диапазоне углов $0 \leq \theta \leq \pi/2$, на фигуре, в — эпюра давления в волне разрежения во втором диапазоне углов $\pi/2 < \theta \leq \pi$. На фигурах, г и д приведены опытные эпюры давления в сферической ударной волне при ее отражении от свободной поверхности

воды при $\theta = \pi/2$ и $\theta = \pi$. (Угол θ отсчитывается от нормали к ударному фронту). Нетрудно видеть качественное соответствие расчетных и опытных эюр давления.

В заключение авторы благодарят А. М. Степанова за любезно предоставленные экспериментальные данные.

Поступила 15 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Гриб А. А., Рыков О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
2. Гриб А. А., Рябинин А. Г., Христианович С. А. Об отражении плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.

УДК 533.6.011.8

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ОКОЛО ДИСКА

Е. М. ШАХОВ

(Москва)

Численным конечно-разностным методом решена задача осесимметричного обтекания диска установившимся потоком разреженного газа для приближенного кинетического уравнения [1].

В настоящее время известны решения осесимметричных задач, полученные методом Монте-Карло [2]. Регулярным численным методом построено только одно решение обтекания сферы [3]. В данной работе применена другая, по-видимому, более эффективная численная процедура.

Воспользуемся цилиндрическими координатами x, r, φ в физическом пространстве (x — ось симметрии) и ξ_x, ζ, ω в пространстве скоростей ξ . Здесь ζ — составляющая молекулярной скорости, расположенная в плоскости, перпендикулярной оси симметрии, а ω — угол между компонентой ζ и меридиональной плоскостью. Кинетическое уравнение в цилиндрических переменных имеет вид [4]

$$(1) \quad \xi_x \frac{\partial f}{\partial x} + \zeta \cos \omega \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\zeta \sin \omega}{r} \frac{\partial f}{\partial \omega} = \frac{1}{\tau} (f^+ - f)$$

Выражения для функции f^+ и частоты столкновений $1/\tau$ даны в [1].

При численном решении кинетического уравнения применялась обычная итерационная процедура, когда в каждом приближении величины f^+ и $1/\tau$ известны, и схема конечных разностей

$$(2) \quad \xi_x \frac{f_{ijk} - f_{i-\alpha jk}}{x_i - x_{i-\alpha}} + \zeta \cos \omega_k \frac{f_{ijk} - f_{ij-\beta k}}{r_j - r_{j-\beta}} - \frac{\zeta \sin \omega_k}{r_j} \frac{f_{ijk} - f_{ijk-1}}{\omega_k - \omega_{k-1}} = \frac{1}{\tau_{ijk}} (f_{ijk}^+ - f_{ijk})$$

$$\alpha = \text{sign } \xi_x, \quad \beta = \text{sign } \cos \omega_k$$

Индексы i, j возрастают с ростом x и r соответственно. Начальное значение индекса $k=0$ соответствует $\omega = \pi$, с ростом k угол ω уменьшается.

Задача обтекания диска решалась при граничном условии полностью диффузного отражения молекул от твердой поверхности, поддерживаемой при постоянной температуре T_w . Решение зависит от следующих параметров: числа Кнудсена K , безразмерной скорости набегающего потока $U = u_\infty / \sqrt{2RT_\infty}$, температуры поверхности T_w , числа Прандтля σ и закона вязкости $\mu(T)$. Число Кнудсена считаем определенным по диаметру диска $2a$.

С целью сравнения с соответствующим плоским течением была выполнена серия расчетов для чисел $K \geq 0.1$ при $U = 1.93$, $\sigma = 2/3$, $\mu = T$; температура поверхности выбиралась близкой к равновесной. Результаты расчетов иллюстрирует фиг. 1, на которой представлено изменение плотности газа на оси симметрии перед телом в зависимости от числа Кнудсена; кривые для $K = 0.1, 1, \infty$ соответствуют температуре поверхности