УДК 533.6.011.5

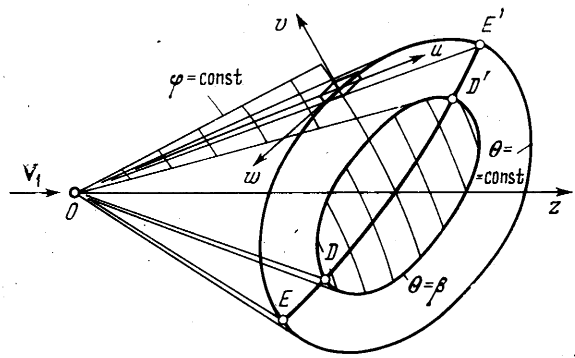
О ВИХРЕВЫХ СЛОЯХ НА КОНИЧЕСКИХ ТЕЛАХ С НЕКРУГОВЫМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ

Б. М. БУЛАХ

(Ленинград)

В работе [1] установлено, что для кругового конуса, обтекаемого под углом атаки невязким сверхзвуковым потоком газа, удельная энтропия S имеет на поверхности конуса алгебраическую особенность, причем показатель степени особенности B определяется из условия регулярности S на конической линии тока, проходящей через точку растекания потока. В настоящей работе этот результат обобщается на случай конических тел с некруговыми поперечными сечениями. Получена формула, определяющая B в случае, когда в поле течения около тела имеется плоскость симметрии, содержащая линию растекания потока.

1. Рассмотрим стационарное обтекание конического тела сверхзвуковым потоком невязкого газа в системе обобщенных сферических координат r, θ, φ [2, 3], в



которой одним семейством координатных поверхностей являются сферы $r^2=x^2+y^2+z^2=\text{const}$, второе и третье семейства строятся следующим образом. На поверхности сферы $r=1$ проводятся два семейства ортогональных координатных линий, причем так, что поверхности тела соответствует одна из этих линий. На эти координатные линии натягиваются конические поверхности, которые и принимаются за координатные поверхности $\theta=\text{const}$, $\varphi=\text{const}$ (фигура). Если обозначить через u, v, w составляющие вектора скорости частиц газа $\mathbf{V}$ в направлении увеличения соответственно r, θ, φ, то для режима конических течений уравнения неразрывности, количества движения, энергии запишутся в виде

$$2\rho u+\frac{v}{A_1}\rho_\theta+\frac{w}{A_2}\rho_\varphi+\frac{\rho}{A_1A_2}[(vA_2)_\theta+(wA_1)_\varphi]=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{v}{A_1}u_\theta+\frac{w}{A_2}u_\varphi-v^2-w^2=0 \tag{1.2}$$

$$\frac{v}{A_1}v_\theta+\frac{w}{A_2}v_\varphi+uv+vw\frac{(\ln A_1)_\varphi}{A_2}-w^2\frac{(\ln A_2)_\theta}{A_1}=-\frac{1}{\rho A_1}p_\theta \tag{1.3}$$

$$i+\frac{u^2+v^2+w^2}{2}+\frac{V_m^2}{2},\qquad i=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} \tag{1.4}$$

$$\frac{v}{A_1}S_\theta+\frac{w}{A_2}S_\varphi=0,\qquad A_1=\frac{1}{r}\sqrt{x_\theta^2+y_\theta^2+z_\theta^2},\qquad A_2=\frac{1}{r}\sqrt{x_\varphi^2+y_\varphi^2+z_\varphi^2} \tag{1.5}$$

Здесь A_1, A_2 – коэффициенты Ляме, вычисленные на поверхности сферы $r=1$; одно уравнение Эйлера заменено интегралом Бернулли (1.4); p, ρ, i, S – соответственно давление, плотность, удельные энтальпия и энтропия, γ – адиабатический индекс, V_m – предельная скорость потока. Производные обозначены индексами около знаков функций.

2. Предположим теперь, что плоскость OED есть плоскость симметрии течения и точка D является точкой растекания потока (на сфере $r=1$). Значения параметров в точке D будем отмечать индексом нуль, т. е. $f|_D=f_0$; тогда $v_0=w_0=0$. Кроме того, примем, что $S=0$ на части поверхности тела около точки D и будем отмечать значения параметров на поверхности тела звездочкой, т. е. $f|_{\theta=\beta}=f^*$. Из условия обтекания следует, что $v^*=0$; из уравнений (1.2), (1.1) получим соотношения

$$w^*=\frac{1}{A_2}u_\varphi^*,\qquad \left[2\rho u+\frac{w}{A_2}\rho_\varphi+\frac{\rho}{A_1}v_\theta+\frac{\rho}{A_1A_2}(wA_1)_\varphi\right]^*=0$$

откуда вытекает, что

$$v=v_\theta^*\vartheta+o(\vartheta)\qquad(\vartheta=\theta-\beta) \tag{2.1}$$

$$(-v_\theta)_0^*=\left[A_1\left(2u+\frac{u_{\varphi\varphi}}{A_2^2}\right)\right]_0^* \tag{2.2}$$

Уравнение (1.5) вблизи $\theta=\beta$ согласно (2.1) записывается в виде

$$\left[\frac{v_\theta^*}{A_1}\vartheta+o(\vartheta)\right]S_\vartheta+\frac{w}{A_2}S_\varphi=0 \tag{2.3}$$

Ищем решение уравнения (2.3) в виде [1]

$$S=\Phi(\varphi)\vartheta^B+o(\vartheta^B) \tag{2.4}$$

где B – неизвестная постоянная. После подстановки (2.4) в (2.3) и приравнивания суммы членов $O(\vartheta^B)$ нулю, получим уравнение для Φ

$$\frac{w^*}{A_2^*}\frac{d\Phi}{d\varphi}+B\frac{v_\theta^*}{A_1^*}\Phi=0 \tag{2.5}$$

Пусть точка D (фигура) соответствует $\varphi=0$, тогда в ее окрестности на поверхности тела

$$w^*=(w_\varphi)_0^*\,\varphi+o(\varphi)=\left(\frac{u_{\varphi\varphi}}{A_2}\right)_0^*\varphi+o(\varphi) \tag{2.6}$$

т. е. точка $\varphi=0$ является особой для уравнения (2.5).

Выдвинем теперь условие регулярности S на конической линии тока ED, проходящей через точку растекания потока D (фиг. 1). В силу симметрии это условие означает, что в окрестности точки $\varphi=0$ функция Φ представляется в виде

$$\Phi=\Phi_0\varphi^2+o(\varphi^2),\qquad \Phi_0=\mathrm{const} \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в (2.5) и приравнивая члены $O(\varphi^2)$, получим с учетом (2.6), (2.2) формулу для определения B

$$B=2\tau/(2+\tau),\qquad \tau=(u_{\varphi\varphi}/uA_2^2)_0^* \tag{2.8}$$

которая аналогична формуле (4.5) работы [1].

3. Параметр τ (2.8) может быть выражен через параметры потока, которые определяются экспериментально. На плоскости OED и части поверхности тела около линии OD (фигура) для совершенного газа имеем $p=p_s^{-1}\rho_s^{-\gamma}\rho^\gamma$, где f_s – значение функции f в точке E сразу же за ударной волной. На поверхности тела, где $v=0$, уравнение (1.4) примет тогда вид

$$\frac{u^2+w^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_s}{\rho_s}\left(\frac{p}{p_s}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}=\frac{V_m^2}{2}=\frac{V_1^2}{2}\left[1+\frac{2}{(\gamma-1)M_1^2}\right] \tag{3.1}$$

где V_1 M_1, p_1, ρ_1 – скорость, число Маха, давление и плотность невозмущенного потока соответственно. Дифференцируя (3.1) дважды по φ и подставляя в результат величины, соответствующие точке D, получим для τ уравнение

$$\tau^2+\tau+G=0 \tag{3.2}$$

$$G=\left[\frac{p_s}{\rho_s}\left(\frac{p}{p_s}\right)^{-1/\gamma}\left(\frac{p}{p_s}\right)_{\varphi\varphi}\frac{1}{u^2A_2^2}\right]_0^* \tag{3.3}$$

Вводя коэффициент давления $C_p = (p - p_1)/(\rho_1 V_1^2/2)$ и выражая u_0 с помощью (3.1), получим формулу

$$G = \frac{1}{2}\left(\frac{p_s}{p_1}\right)^{1/\gamma}\frac{\rho_1}{\rho_s}A_{20}^{-2}\left(1+\frac{\gamma M_1^2}{2}C_{p0}\right)^{-1/\gamma}\times \tag{3.4}$$

$$\times\left\{1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M_1^2}-\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{p_s}{p_1}\right)^{1/\gamma}\frac{\rho_1}{\rho_s}\frac{1}{M_1^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+\frac{\gamma M_1^2}{2}C_{p0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right\}^{-1}\left(\frac{d^2C_p}{d\varphi^2}\right)_0^*$$

При этом τ определяется как больший корень (3.2). Измерив распределение p в окрестности точки D (фиг. 1), угол между головным скачком уплотнения и направлением невозмущенного потока в плоскости OED, по формулам (3.2), (3.4), (2.8) находим величину B. Например, при обтекании эллиптических конусов, имеющих отношение полуосей поперечного сечения t и полуугол при вершине в плоскости большой оси ε, потоком с $M_1=3$ при нулевом угле атаки для значений B получены по формулам (3.4), (3.5), (2.8) следующие оценки соответственно:

$t={}^2/_3$,	$^1/_2$,	$^1/_2$,
$\varepsilon=30°$,	$22°30'$,	$15°$
$B=0.3$,	$0.5\div0.9$,	0.5

Поступила 13 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булах Б. М.* О вихревом слое на круговом конусе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
2. *Гонор А. Л.* Обтекание конических тел при движении газа с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
3. *Булах Б. М.* Нелинейные конические течения газа. М., «Наука», 1970.

УДК 533.6.011.7

ОТРАЖЕНИЕ ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ ОТ ЦЕНТРА ПРИ АДИАБАТИЧЕСКОМ РАЗЛЕТЕ ГАЗОВОГО ШАРА В ПУСТОТУ

В. Е. КОНДРАШОВ, А. Н. ПОЛЯНИЧЕВ, В. С. ФЕТИСОВ

(Москва)

Задача об адиабатическом разлете газового шара в пустоту при однородных начальных условиях (в начальный момент времени газ покоится, а его плотность и давление постоянны по радиусу) рассматривалась в ряде работ [1–4]. Точное аналитическое решение поставленной задачи невозможно даже для первой, идущей к центру волны разрежения. Использование римановского решения для первой волны приводит к существенно нелинейному распределению скорости по радиусу в волне разрежения [1]. В работе [2] разлет газового шара в пустоту рассматривался при помощи численного решения газодинамических уравнений. Однако результаты [2] не позволяют сделать вывод о характере распределения скорости по радиусу. Картина движения, возникающая при отражении волны разрежения от центра сферы, в [2] не приводится. Настоящая работа посвящена изучению распределения скорости по радиусу при адиабатическом разлете газового шара в пустоту. Исследуется неавтомодельность движения, обусловленная отраженной от центра волной разрежения.

Система уравнений, описывающих адиабатический сферически-симметричный разлет газа в вакуум, имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(u\rho)+\frac{2\rho u}{r}=0,\qquad p=\mathrm{const}\,\rho^\gamma$$