

7. Шиллер Л. Движение жидкостей в трубах. М.—Л., ОНТИ, Главн. ред. обществен.-техн. лит. и номогр., 1936.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
9. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М., «Наука», 1970.
10. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М., Гостехиздат, 1951.
11. Положий Г. Н., Пахарева Н. А., Степаненко И. З., Бондаренко П. С., Великоиваненко И. М. Математический практикум. М., Физматгиз, 1960.
12. Сквайрс Дж. Практическая физика. М., «Мир», 1971.

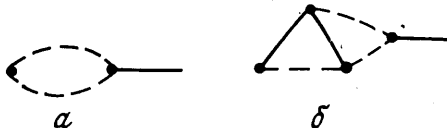
УДК 532.517.1

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Т. Л. ПЕРЕЛЬМАН, В. А. СОСИНОВИЧ

(Минск)

Одной из наиболее часто обсуждаемых схем замыкания моментных уравнений, описывающих однородную турбулентность несжимаемой жидкости, является схема [1, 2], которая основана на предположении о доминирующей роли прямых взаимодействий фурье-компонент поля скорости. Вывод уравнений для корреляционной функции в приближении прямых взаимодействий (ППВ) в [1, 2] создает впечатление, что справедливость этого приближения никак не связана с числом Рейнольдса



Re. Однако решение полученных уравнений [3] демонстрирует неплохое совпадение с экспериментом только при достаточно малых Re. Оказалось также, что уравнения несовместны с каскадным механизмом передачи энергии по спектру пульсаций разных масштабов [4].

В данной работе сделана попытка привести некоторые аргументы, позволяющие понять причину непригодности ППВ для замыкания моментных уравнений турбулентной скорости. Приведены также соображения в пользу того, что приближение, графически эквивалентное ППВ (в смысле диаграммной техники) является достаточным для получения кинетических уравнений для двумерной плотности вероятности значений турбулентной скорости.

1. Известно [5], что члену, соответствующему прямому взаимодействию фурье-компонент поля скорости, можно сопоставить диаграмму вида *a* на фигуре, где пунктирная линия соответствует корреляционной функции, сплошная — функции Грина, точка — константе связи, суммированию, вершинной функции. Физический смысл члена прямого взаимодействия, как это можно видеть из [1, 2], состоит в учете корреляции между изменением фурье-компоненты поля скорости $u_i(\mathbf{k})$, которое вызвано включением возмущения $\sim u_\alpha(\mathbf{V})u_\beta(\mathbf{W})$ и выражением $u_\gamma(\mathbf{V})u_\delta(\mathbf{W})$, т. е.

$$(1.1) \quad D_1 \sim \langle \delta u_i(\mathbf{k}/\mathbf{V}, \mathbf{W}) u_\gamma(\mathbf{V}) u_\delta(\mathbf{W}) \rangle$$

Одна из простейших диаграмм, соответствующая членам непрямого взаимодействия, имеет вид *b* на фигуре. Члены непрямого взаимодействия пропорциональны сумме корреляторов, каждый из которых учитывает связь между изменением $u_i(\mathbf{k})$, которое происходит от включения возмущения $\sim u_\alpha(\mathbf{k}')u_\beta(\mathbf{k}'')$, и выражением $u_\gamma(\mathbf{V})u_\delta(\mathbf{W})$, причем $\mathbf{k}', \mathbf{k}'' \neq \mathbf{V}, \mathbf{W}$. Таким образом

$$(1.2) \quad D_2 \sim \sum_{\substack{\mathbf{k}', \mathbf{k}'' \neq \mathbf{V}, \mathbf{W} \\ \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k}}} \langle \delta u_i(\mathbf{k}/\mathbf{k}', \mathbf{k}'') u_\gamma(\mathbf{V}) u_\delta(\mathbf{W}) \rangle$$

Так как прямой связи между членами $u_\alpha(\mathbf{k}')u_\beta(\mathbf{k}'')$ и $u_\gamma(\mathbf{V})u_\delta(\mathbf{W})$ нет, то ненулевое значение каждого из корреляторов в сумме (1.2) обеспечивается за счет распределения начального возмущения, вызванного включением возмущения $\sim u_\alpha(\mathbf{k}')u_\beta(\mathbf{k}'')$ по всем степеням свободы. Пусть число степеней свободы будет равно N . Тогда каждый коррелятор в сумме (1.2) будет иметь в среднем порядок

величины N^{-1} . Если предположить, что фазы отдельных корреляторов в (1.2) распределены случайно, то

$$(1.3) \quad D_2 \sim N^{-1/2}$$

Так как в диаграмме б имеется две лишних вершины по отношению к диаграмме а, то общая оценка будет

$$(1.4) \quad \frac{D_2}{D_1} \sim \frac{\lambda^2}{N^{1/2}}$$

В рассматриваемом случае $\lambda \sim \text{Re}$, поэтому

$$(1.5) \quad D_2 \sim \frac{\text{Re}^2}{N^{1/2}} D_1$$

Если бы под N можно было понимать число Фурье-компонент, то справедливость приближения была бы обеспечена при любом числе Re , так как N можно увеличивать бесконечно, устремляя размеры ящика с турбулентной жидкостью к бесконечности. Несколько иначе, но также на число Фурье-компонент ссылался автор [1, 2], пытаясь обосновывать справедливость ППВ при замыкании уравнений для корреляционной функции. Ясно, однако, что для того, чтобы можно было предположить случайность фаз отдельных корреляторов в (1.2), которая приводит к появлению множителя $N^{-1/2}$ в (1.5), надо сослаться на реально существующие степени свободы в турбулентном потоке, число которых связано со степенью возбуждения потока. Для оценки N можно воспользоваться формулой [8]

$$(1.6) \quad N \sim \text{Re}^{3/4}$$

Тогда из (1.5) получаем, что отбрасываемые диаграммы в этом приближении не малы по сравнению с диаграммой прямого взаимодействия

$$(1.7) \quad D_2 \sim \text{Re}' D_1$$

Сравнивая между собой простейшие диаграммы непрямого взаимодействия с более сложными, можно получить результат, аналогичный (1.7). Это позволяет сделать вывод, что не только ППВ, но и вообще любая схема замыкания, основанная на перенормированном разложении в ряд по числу Re , не может привести к сколь-нибудь точному уравнению для корреляционной функции.

2. Из приведенных выше рассуждений и формулы (1.4) видно, что ППВ может оказаться достаточно точным при использовании его с целью вывода уравнений для статистических величин в том случае, когда исходное динамическое уравнение описывает систему взаимодействующих волн с контактной связью порядка единицы. Именно так можно поставить задачу вывода уравнения для двумерной плотности вероятности значений турбулентной скорости. Действительно, определим функцию

$$(2.1) \quad f(\Theta, \mathbf{x}, t) = \exp [i\Theta \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)]$$

где Θ — произвольный вектор, $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ — поле скорости несжимаемой жидкости. Для Фурье-образа $f(\Theta, \mathbf{x}, t)$ по переменным (Θ, \mathbf{x}) в [7] было получено уравнение

$$(2.2) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{u}\mathbf{k} \right) f_{\mathbf{u}, \mathbf{k}}(t) = -i \frac{(2\pi)^6}{\Omega_0 \Omega_{\mathbf{x}}} \sum_{\mathbf{u}' \mathbf{k}'} H_{\alpha}^{(+)}(\mathbf{u}, \mathbf{k}) \nabla_{\mathbf{u}\alpha} f_{\mathbf{u}', \mathbf{k}'}(t) f_{\mathbf{u}, \mathbf{k}-\mathbf{k}'}(t)$$

$$(2.3) \quad H_{\alpha}^{(+)}(\mathbf{u}, \mathbf{k}) = \frac{(\mathbf{u}\mathbf{k})^2 k_{\alpha}}{k^2} + \frac{i}{\text{Re}} k^2 u_{\alpha}$$

Здесь $\Omega_0 \Omega_{\mathbf{x}}$ — объем ящика в пространстве (Θ, \mathbf{x}) .

Применяя к уравнению (2.2) технику, аналогичную использованной в [1, 2], можно получить замкнутую систему уравнений для второго момента функции $f_{\mathbf{u}, \mathbf{k}}(t)$, который является преобразованием Фурье двумерной плотности вероятности. Эти уравнения можно написать сразу, если воспользоваться диаграммной техникой, развитой для этого случая в [8]. Уравнения для двумерной плотности вероятности в

приближении, графически эквивалентном ППВ, имеют вид

$$(2.4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + iuk \right) P_{k,ii}(u, u_1) = - \int d\lambda \left\{ \frac{W}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt' G(u_1, -k, t_1, t) \times \right. \\ \times P_{k',t',t}(u_1', u) P_{k'',t',t}(u_1'', u'') + W_2 \int_{t_0}^t dt G(u', k', t, t') \times \\ \left. \times P_{k,t',t}(u_1' u_1) P_{k'',t',t}(u_1'', u) \right\} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + iuk \right) G(u, k, t, t_1) = - \int d\lambda W_2 G(u'', k'', t, t') P_{k',t',t}(u_1, u) G(u'', k, t', t) \\ d\lambda = dk' dk'' du' du'' du_1' du_1'' \\ W_1 = H(u, k; u', k', u'', k'') H(u_1, -k; u', -k'; u_1'' - k'') \\ W_2 = H(u, k; u', k'; u'' k'') H(u', k; u', k; u'', -k'') \\ H(u, k; u' k'; u'' k'') = \{ \delta(k' + k'' - k'') H_{\alpha}^{(+)}(u, k) (\nabla_{u_{\alpha}''} \delta_{u'' - u}) + \left\{ \begin{array}{l} u' \leftrightarrow u'' \\ k' \leftrightarrow k'' \end{array} \right\} \}$$

Из структуры уравнения (2.2) видно, что константа взаимодействия, связанная с первым членом в (2.3), который обусловлен силами давления, по порядку величины равна единице при всех числах Re. Если вывести уравнение (2.4) методом [1, 2], то можно убедиться, что все доводы, которые привели к формуле (1.4), справедливы и в данном случае. Тогда, используя формулу (1.6) и учитывая, что $\lambda \sim 1$, получим

$$D_2 \sim \text{Re}^{-3/4} D_1$$

Этот результат позволяет сделать вывод, что при достаточно больших числах Re система уравнений для плотности вероятности значений турбулентной скорости в приближении прямых взаимодействий будет точной.

Поступила 18 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Kraichnan R. H. Irreversible statistical mechanics of incompressible hydromagnetic turbulence. Phys. Rev., 1958, vol. 109, No. 5.
2. Kraichnan R. H. The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers. J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, No. 4.
3. Kraichnan R. H. Decay of isotropic turbulence in the direct-interaction approximation. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 7.
4. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 2. М., «Наука», 1967.
5. Wyld H. W. Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid. Ann. Phys., 1961, vol. 14, No. 2.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
7. Сосинович В. А. К статистической теории турбулентности несжимаемой жидкости с точки зрения конечномерных функций распределения. В сб. «Тепло- и массоперенос», т. 8. Минск, 1972.
8. Сосинович В. А. К проблеме замыкания в статистической теории турбулентности. Докл. АН БССР, 1971, т. 15, № 9.

УДК 532.526.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ОТСАСЫВАНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ В ОПЫТОВОМ БАССЕЙНЕ

Л. Ф. КОЗЛОВ, А. И. ЦЫГАНЮК

(Киев)

В опытовом бассейне в интервале чисел Рейнольдса $\text{Re} = 1 \cdot 10^6 - 3.5 \cdot 10^6$ проведено экспериментальное исследование влияния распределенного отсасывания на гидродинамическое сопротивление и некоторые характеристики пограничного слоя на теле вращения. Полученные результаты позволили сделать вывод о возможности суще-