

УДК 532.51:538.4

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГИДРОСТАТИКИ НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ И ПОЛЯРИЗУЮЩИХСЯ СРЕД

И. Е. ТАРАПОВ

(Харьков)

Анализируются общие уравнения равновесия намагничивающихся и поляризующихся сред. Задача о равновесии конечного объема намагничивающейся среды приведена к системе двух интегральных и одного дифференциального уравнений, которые решены численно. Показано, что поверхность раздела намагничивающейся в однородном поле жидкой массы вытягивается вдоль силовых линий поля с последующим образованием «шейки» деления.

**1. Уравнений гидростатики и условия на поверхностях раздела намагничивающихся и поляризующихся жидкостей.** Интерес к жидким средам, которые могут заметно намагничиваться или поляризоваться в электромагнитном поле [1-5], возник в связи с разнообразными техническими применениями [2, 6, 7].

Состояние равновесия среды, изотропно намагничивающейся и поляризующейся в электромагнитном поле, может быть описано следующей системой уравнений:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \rho T \frac{\partial s'}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \nabla T) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

$$\nabla(p + \psi_p + \chi_p) = \rho \mathbf{g} + \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + M \nabla H + P \nabla E$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_e$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} - 4\pi \mathbf{j}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi M(\rho, T, H) \mathbf{H} / H, \quad p = p(\rho, s)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi P(\rho, T, E) \mathbf{E} / E, \quad T = T(\rho, s)$$

$$s' = s + \frac{1}{\rho} \int_0^H \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\rho, H} dH + \frac{1}{\rho} \int_0^E \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\rho, E} dE$$

$$\psi_p = -\rho^2 \int_0^H \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{M}{\rho} \right)_{T, H} dH, \quad \chi_p = -\rho^2 \int_0^E \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{P}{\rho} \right)_{T, E} dE$$

Эти 20 скалярных уравнений служат для определения  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $s$ ,  $\rho_e$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ , и получаются из общей системы (см. [3]) при  $\mathbf{v} = 0$ .

Процессы в среде с намагничиванием и поляризацией описываются термодинамическим уравнением Гиббса

$$(1.2) \quad T ds' = dU' + p' d \left( \frac{1}{\rho} \right) - Hd \left( \frac{B}{4\pi\rho} \right) - Ed \left( \frac{D}{4\pi\rho} \right)$$

$$\left( U' = U - \frac{H^2 + E^2 + (\psi_T + \chi_T) 8\pi}{8\pi\rho} + \frac{HB + ED}{4\pi\rho}, \quad p' = p + \psi_p + \chi_p + \frac{H^2 + E^2}{8\pi} \right)$$

$$\psi_T = -T^2 \int_0^H \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{M}{T} \right)_{\rho, H} dH, \quad \chi_T = -T^2 \int_0^E \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{P}{T} \right)_{\rho, E} dE$$

Здесь  $U'$ ,  $p'$  — полная внутренняя энергия и полное давление среды.

Вводя удельный термодинамический потенциал (химический потенциал)  $\chi = \chi(T, p', E, H)$ , рассматриваемый как функция  $T$ ,  $p'$ ,  $E$  и  $H$ , получаем условие изотермического равновесия в виде

$$(1.3) \quad \rho \nabla \chi = \rho \mathbf{g} + \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}), \quad dT = 0$$

$$\left( \chi = U' - Ts' + \frac{p'}{\rho} - \frac{HB + ED}{4\pi\rho} \right)$$

Отсюда в тех случаях, когда объемная лоренцева сила имеет потенциал  $\Pi$  и  $\mathbf{g} = \text{const}$ , имеем

$$(1.4) \quad \rho F(\rho, T) + p + \psi_\rho + \chi_\rho - \int^H M dH - \int^E P dE - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} - \rho \Pi = \text{const}$$

где  $F(\rho, T) = U - Ts$  — свободная энергия в отсутствие электромагнитного поля.

На поверхности раздела намагничивающихся и поляризующихся сред с учетом поверхностного натяжения имеют место граничные условия

$$(1.5) \quad [p_{ik} n_k] = -\alpha n_i, \quad p_{ik}' = -p' \delta_{ik} + \frac{1}{4\pi} (E_i D_k + H_i B_k)$$

$$(1.6) \quad [E_\tau] = 0, \quad [D_n] = 4\pi\phi, \quad [B_n] = 0, \quad [H_\tau] = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{i} \times \mathbf{n})$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — орт нормали к поверхности раздела, ориентированный в сторону ее выпуклости;  $\kappa$  — удвоенная средняя кривизна поверхности раздела;  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $[\mathbf{A}] = \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^-$  — скачок некоторой величины  $\mathbf{A}$  при переходе через поверхность раздела;  $p_{ik}'$  — тензор полных напряжений в среде (см. [5]).

Проектируя (1.5) на нормаль и касательную плоскость к поверхности раздела, с учетом (1.6) получаем

$$(1.7) \quad [p + \psi_\rho + \chi_\rho + 2\pi M_n^2 + 2\pi P_n^2] = \frac{1}{2}\phi(D_n^+ + D_n^-) + \alpha\kappa + \frac{1}{2c} (\mathbf{i} \times \mathbf{n}) (\mathbf{H}_\tau^+ + \mathbf{H}_\tau^-)$$

$$\phi E_\tau + \frac{1}{c} (\mathbf{i} \times B_n) = 0$$

Таким образом, на покоящейся поверхности раздела поверхностная лоренцева сила равна нулю. Для задач, когда  $E \sim vB/c$ , это означает, что поверхностные токи могут быть только на тангенциальных разрывах ( $B_n = 0$ ).

В приложениях наиболее интересны среды, которые либо намагничиваются в электромагнитном поле при незначительной электрической поляризации их (например, ферромагнитные жидкости), либо, наоборот, существенно поляризуются и незначительно намагничиваются (например, некоторые электролиты). Отметим, что описание непроводящих ( $\mathbf{j} = 0$ ) намагничивающихся сред совершенно аналогично описанию поляризующихся сред без свободных зарядов ( $\rho_e = 0$ ).

Изотермическое равновесие непроводящей намагничивающейся жидкости как следует из (1.1), (1.4), (1.7), описывается системой

$$(1.8) \quad p + \psi_\rho - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} - \int^H M dH = \text{const}$$

$$(1.9) \quad \text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = -4\pi \text{div} \{M(\rho, H) \mathbf{H}/H\}$$

$$(1.10) \quad [p + \psi_\rho + 2\pi M_n^2] = \alpha\kappa$$

**2. Равновесие конечного объема намагничивающейся непроводящей среды в магнитном поле.** Пусть среда, занимающая область  $\Omega$  заданного объема, помещена в другую среду и не смешивается с ней, так что между ними существует замкнутая поверхность раздела  $S$ . Обе среды находятся в изотермическом равновесии и могут намагничиваться в магнитном поле.

В силу того, что в области  $\Omega$  и вне ее выполнено уравнение (1.8), а на поверхности раздела  $S$  — условие (1.10), получаем для точек поверхности

$$(2.1) \quad (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})[\rho] + \left[ \int^H M dH + 2\pi M_n^2 \right] - \alpha\kappa = C (= \text{const})$$

Это соотношение определяет форму поверхности  $S$ , если на ней известны значения поля  $\mathbf{H}^+$  (со стороны области  $\Omega$ ) и  $\mathbf{H}^-$  (со стороны окружающей среды). Для определения  $\mathbf{H} = \nabla\Phi$ , согласно (1.9), надо решить краевые задачи в двух областях (в  $\Omega$  и вне  $\Omega$ ), сопрягая их решения на  $S$  в соответствии с граничными условиями (1.6). Таким образом, для определения  $\Phi^+$  (в области  $\Omega$ ) и  $\Phi^-$  (в области вне  $\Omega$ ) име-

ем уравнения и условия на поверхности  $S$

$$(2.2) \quad \Delta\Phi^\pm = -4\pi \operatorname{div} \left\{ \frac{\nabla\Phi^\pm}{|\nabla\Phi^\pm|} M^\pm(\rho^\pm, |\nabla\Phi^\pm|) \right\}$$

$$(2.3) \quad \Phi^+ = \Phi^-, \quad \mu^+ \frac{\partial\Phi^+}{\partial n} = \mu^- \frac{\partial\Phi^-}{\partial n}$$

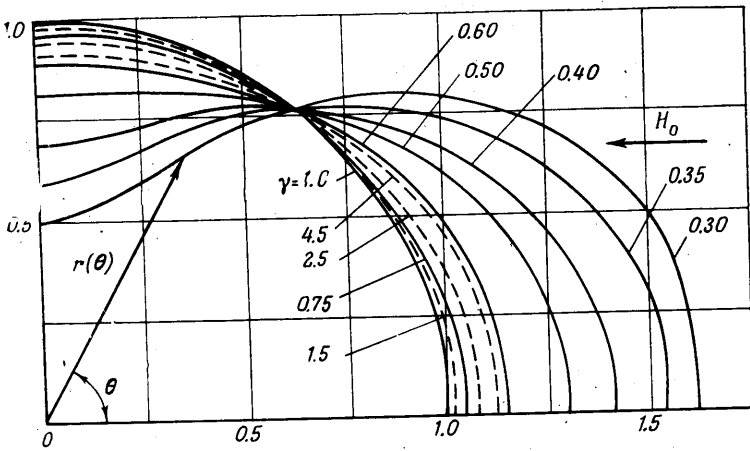
Если намагничивание сред происходит в однородном на бесконечности поле  $H_0$ , то должно быть выполнено условие

$$(2.4) \quad \nabla\Phi^-|_\infty = H_0$$

Функции  $M^\pm(\rho^\pm, |\nabla\Phi^\pm|)$  считаются известными, и, вообще говоря, уравнения (2.2) нелинейны. Сложность задачи еще и в том, что граничная поверхность  $S$  неизвестна и ее вид определяется в процессе решения задачи.

В слабых полях  $\mu^+$ ,  $\mu^-$  можно считать постоянными, и тогда из (2.2) следует, что функции  $\Phi^\pm$  гармонические.

В этом случае, используя представление гармонических функций  $\Phi^\pm$  при помощи формулы Грина, задачу (2.2) — (2.4) можно привести к системе двух интегральных



Фиг. 1

и одного дифференциального уравнений, из которых определяется форма поверхности  $S$  и поле на ней. Применяя основные теоремы теории потенциала, для случая  $\rho^+ = \rho^-$  получаем эту систему в виде

$$(2.5) \quad \Phi^+(r_0) + 2 \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^+ + \mu^-} \int_S \Phi^+(r) \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{2\mu^-}{\mu^+ + \mu^-} \Phi^0(r_0)$$

$$(2.6) \quad - \frac{\partial\Phi^+}{\partial n_0} + 2 \int_S \frac{\partial\Phi^+}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial n_0} dS = 2 \frac{\partial}{\partial n_0} \int_S \Phi^+ \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

$$(2.7) \quad k = \delta \left\{ (\nabla\Phi^+)^2 - \left( \frac{\partial\Phi^+}{\partial n} \right)^2 + \frac{\mu^+}{\mu^-} \left( \frac{\partial\Phi^+}{\partial n} \right)^2 \right\} + C$$

( $\delta \equiv (\mu^+ - \mu^-) H_0^2 R_0 (8\pi\alpha)^{-1}$ ,  $C \equiv (p^+ - p^-) R_0 \alpha^{-1}$ )

$$(2.8) \quad \int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS = 1$$

Здесь  $\Phi^0$  — потенциал внешнего поля, причем  $|\nabla\Phi^0|_\infty < \infty$ ;  $\mathbf{n}$  — орт внешней к  $S$  нормали;  $u = -(2\pi)^{-1} \ln|r-r_0|$  для плоской и  $u = \{4\pi|r-r_0|\}^{-1}$  для пространственной задачи;  $k = R_0 k$  — безразмерная удвоенная средняя кривизна;  $H_0$ ,  $R_0$  — характерное поле и характерный размер задачи.

Во внешнем однородном магнитном поле ( $H_0 = \nabla\Phi^0 = \text{const}$ ) равновесный конечный объем жидкой массы, будучи окружен другой жидкой средой с той же плотностью, примет форму тела вращения, симметричного относительно центра масс, так

что если  $r=r(\theta)$  — уравнение поверхности  $S$  в сферических координатах ( $\theta$  — азимутальный угол, отсчитываемый от оси, по которой направлен вектор  $H_0$ ), то  $r(\theta) = r(-\theta) = r(\pi - \theta)$ .

При этом для случая малых деформаций объема, считая  $\delta \ll 1$ , из (2.5) — (2.7) получаем

$$\Phi^+ = \frac{3}{\gamma+2} \cos \theta, \quad \frac{\partial \Phi^+}{\partial n} = \frac{3}{\gamma+2} \cos \theta, \quad C = 2 - \frac{3(1+8\gamma)}{2(\gamma+2)^2} \delta$$

$$r(\theta) = 1 + \frac{9R_0 H_0^2 \mu^- (\gamma-1)^2}{64\pi\alpha (\gamma+2)^2} \left( \frac{1}{3} + \cos 2\theta \right), \quad \gamma = \frac{\mu^+}{\mu^-}$$

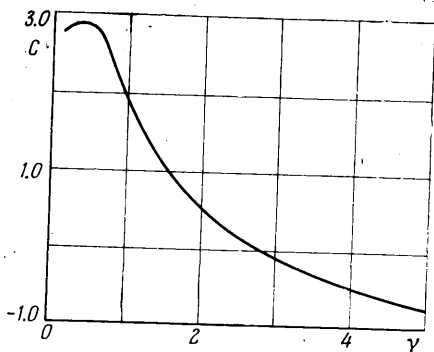
а предполагая  $|\gamma-1| \ll 1$ , из тех же формул имеем

$$\Phi^+ = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{6} \right) \cos \theta, \quad \frac{\partial \Phi^+}{\partial n} = \left( 1 + \frac{2}{3} (\gamma-1) \right) \cos \theta$$

$$C = 2 - \gamma(\gamma-1)\delta$$

$$r(\theta) = 1 + \frac{R_0 H_0^2 \mu^- (\gamma-1)^2}{32\pi\alpha} \left( \frac{1}{3} + \cos 2\theta \right)$$

Решение задачи (2.5) — (2.8) в общем виде получено численным методом с помощью итерационного процесса, при котором всякая последующая итерация для  $r(\theta)$  получается из (2.7) при известной правой части этого уравнения, вычисленной по предыдущим итерациям для  $r(\theta)$ ,  $\Phi^+$ ,  $\partial \Phi^+ / \partial n$ , которые в свою очередь получены путем решения (2.5), (2.6) при условии (2.8) (для известного  $r(\theta)$ ).



Фиг. 2

На фиг. 1 представлены соответствующие графики  $r(\theta)$  для фиксированного значения  $\delta_0 = H_0^2 R_0 \mu^- (8\pi\alpha)^{-1}$  ( $\delta_0 = 2$ ) и различных  $\gamma$ , а на фиг. 2 — график безразмерной разности давлений  $C(\gamma)$ . Из графиков видно, что при уменьшении  $\gamma$  ( $\gamma < 1$ ) первоначально сферический объем вытягивается по направлению поля, причем эта деформация сопровождается образованием шейки, так что поверхностные силы намагничивания приводят к делению объема на два одинаковых. Аналогичным образом объем деформируется и при  $\gamma > 1$ , хотя и медленно.

нее (пунктирные кривые). Как видно из фиг. 2, давление внутри области  $\Omega$  падает (при некотором  $\gamma = \gamma^* < 1$  отмечен максимум кривой  $C(\gamma)$ ).

Изменение давления у замкнутой поверхности раздела играет существенную роль при кавитации в намагничивающихся жидкостях. Если ограничиться эффектом поля порядка  $|\gamma-1|$ , то можно показать, что время схлопывания сферической каверны в намагничивающейся среде будет при  $\gamma < 1$  меньше, а интенсивность возрастания давления при схлопывании больше, чем в немагнитной жидкости.

Автор благодарит И. В. Сухаревского за внимание к работе и ценные советы и А. Б. Исерс за проведение вычислений на ЭВМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

Поступила 1 VI 1973

1. Седов Л. И. О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
2. Neuringer J. L., Rosensweig R. E. Ferrohydrodynamics. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 12.
3. Боа Те Чу. Термодинамика электропроводных движущихся сред. В сб. «Плазма в магнитном поле и прямое преобразование тепловой энергии в электрическую». М., Атомиздат, 1962.
4. Чу, Хаус, Пенфилд. Плотность силы в поляризуемых и намагничиваемых жидкостях. Тр. ин-та инженеров электротехники и радиоэлектроники, 1966, т. 54, № 7.
5. Тарапов И. Е. К гидродинамике поляризуемых и намагничиваемых сред. Магнитная гидродинамика, 1972, № 1.
6. Роенцвайг Р. Феррогидродинамика. Усп. физ. н., 1967, т. 92, № 2.
7. Kaiser R., Miskolczy G. Some applications of ferrofluid magnetic colloids. IEEE Trans. Magn., 1970, vol. 6, No. 3.