**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1974**

УДК 532.517.43

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ВИХРЕВОЙ ИСТОЧНИК (СТОК)

А. Г. ЯРМИЦКИЙ

(Жданов)

Найден вихревой аналог потенциального пространственного источника. Указывается на возможность распространения известного метода суперпозиции на случай осесимметричных вихревых течений. В качестве примера рассматривается обтекание полутела осесимметричным однородным винтовым потоком. Показано, что в однопараметрическом осесимметричном вихревом потоке без окружной скорости давление постоянно.

1. Уравнения осесимметричных вихревых потоков. Уравнения осесимметричного вихревого движения идеальной несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах имеют вид [1]

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{r\partial r}\right)+r^2F'(\psi)+\Phi(\psi)\Phi'(\psi)=0 \tag{1.1}$$

$$v_x=-\frac{\partial\psi}{r\partial r},\quad v_r=\frac{\partial\psi}{r\partial x},\quad v_\varphi=\frac{\Phi(\psi)}{r}$$

Здесь v_x, v_r и v_φ — компоненты скорости течения в цилиндрической системе координат x, r, φ.

Уравнение (1.1) связывает функцию тока ψ, функцию $\Phi(\psi)$, выражающую закон изменения окружной скорости v_φ и функцию $F(\psi)$, характеризующую закон распределения энергии. Оно отражает тот факт, что в осесимметричном вихревом потоке секундный объемный расход жидкости сквозь ортогональное к оси симметрии сечение, распределение окружной скорости и распределение энергии в меридиональной плоскости связаны между собой дифференциальной зависимостью.

С математической точки зрения (1.1) показывает, что в цилиндрической системе координат решение задачи об осесимметричном вихревом движении невязкой жидкости приводится к интегрированию уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа (в общем случае нелинейного) при определенных граничных условиях. Наиболее рациональным путем решения указанной задачи, как отмечено в [1], является следующий: выбрать произвольно функции $\Phi(\psi)$ и $F(\psi)$ и определять функцию ψ.

В настоящее время исследовано пока небольшое число течений, описываемых приведенными уравнениями. В качестве примеров можно указать на однородные винтовые потоки [1] и течения с распределением скоростей на бесконечности перед телом в виде параболоида вращения [2, 3].

Выберем функции $\Phi(\psi)$ и $F(\psi)$ в виде

$$\Phi(\psi)=k\psi,\quad F(\psi)={}^1\!/_2\varepsilon^2\psi^2+C \tag{1.2}$$

где k, ε и C — произвольные постоянные величины, причем $\varepsilon^2>0$.

Тогда уравнение (1.1) становится линейным

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{r\partial r}\right)+(\varepsilon^2r^2+k^2)\psi=0 \tag{1.3}$$

Уравнение (1.1) может быть приведено к виду (1.3) и методом линеаризации [1].

2. Постановка задачи. Рассмотрим осесимметричные вихревые течения, представляющие собой аналог потенциальных источников и стоков. В силу линейности (1.3) возможно распространение метода источников и стоков на более общий класс движений — вихревых.

Пусть функция тока осесимметричного вихревого течения в полуплоскости $x>0$ удовлетворяет (1.3) и следующим граничным условиям:

$$\psi(x,0)=0 \tag{2.1}$$

$$\psi(0,r)=\psi_0=-\frac{Q}{4\pi} \tag{2.2}$$

Здесь $-Q/4\pi$ — интенсивность источника, расположенного в начале координат. В случае стока $Q<0$.

3. Метод решения. В (1.3) перейдем к переменной $r_*=\varepsilon r^2$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+4\varepsilon r_*\frac{\partial^2\psi}{\partial r_*^2}+(\varepsilon r_*+k^2)\psi=0 \tag{3.1}$$

Применив метод разделения переменных к (3.1), находим, что оно допускает частное решение, удовлетворяющее краевому условию (2.1)

$$\psi_\lambda=f(\lambda,x)M_{-i\lambda,\,1/2}(ir_*)$$

где $M_{-i\lambda,\,1/2}(ir_*)$ — функция Уиттекера; $f(\lambda,x)$ — функция от x и λ, причем λ — некоторый параметр $(\lambda\geqslant0)$.

Решение уравнения (3.1), удовлетворяющее краевым условиям (2.1) и (2.2), можно представить в виде

$$\psi(x,r_*)=\int_0^\infty f(\lambda,x)M_{-i\lambda,\,1/2}(ir_*)\,d\lambda \tag{3.2}$$

$$f(\lambda,x)=-{}^1/_2\frac{\lambda e^{\pi\lambda}}{\operatorname{sh}\pi\lambda}\int_0^\infty\psi(x,r_*)M_{-i\lambda,\,1/2}(ir_*)\frac{dr_*}{r_*} \tag{3.3}$$

Выражение (3.3) может быть получено из формулы обращения [4].

Функция $f(\lambda,x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2f}{dx^2}-(m^2-k^2)f=0,\qquad m^2=4\varepsilon\lambda \tag{3.4}$$

Учитывая (3.3) и граничное условие (2.2), находим краевое условие для функции $f(\lambda,x)$

$$f(\lambda,0)=-{}^1/_2\frac{\lambda e^{\pi\lambda}}{\operatorname{ch}\pi\lambda}\int_0^\infty\psi(0,r_*)M_{-i\lambda,\,1/2}(ir_*)\frac{dr_*}{r_*}=$$

$$=-{}^1/_2 i\frac{e^{1/2\pi\lambda}}{\operatorname{ch}{}^1/_2\pi\lambda}\psi_0 \tag{3.5}$$

Здесь использовано соотношение

$$\int_0^\infty M_{-i\lambda,\,{}^1/_2}(ir_*)\frac{dr_*}{r_*}=2i\lambda^{-1}e^{-{}^1/_2\pi\lambda}\operatorname{sh}{}^1/_2\pi\lambda$$

которое получено путем предельного перехода из интеграла Эрдейи.

Действительное решение уравнения (3.4), ограниченное при $x\to\infty$ и удовлетворяющее условию (3.5), может быть представлено в виде

$$f(m,x)=\begin{cases}-{}^1/_2 i\dfrac{e^{{}^1/_2\pi\lambda}}{\operatorname{ch}{}^1/_2\pi\lambda}\psi_0\cos\sqrt{k^2-m^2}\,x, & m\leqslant k\\[2mm] -{}^1/_2 i\dfrac{e^{{}^1/_2\pi\lambda}}{\operatorname{ch}{}^1/_2\pi\lambda}\psi_0 e^{\mp\sqrt{m^2-k^2}\,x}, & m\geqslant k\end{cases}\tag{3.6}$$

Здесь и далее верхний знак относится к левой полуплоскости ($x\geqslant0$), а нижний – к правой ($x\leqslant0$).

Таким образом, функция тока осесимметричного вихревого источника в предположении (1.2) имеет вид

$$\psi(x,r_*)=-{}^1/_2 i\psi_0\int_0^\infty\chi(\lambda,x)\frac{e^{{}^1/_2\pi\lambda}}{\operatorname{ch}{}^1/_2\pi\lambda}M_{-i\lambda,\,{}^1/_2}(ir_*)\,d\lambda\tag{3.7}$$

$$\chi(\lambda,x)=\begin{cases}\cos\sqrt{k^2-m^2}\,x, & m\leqslant k\\ e^{-\sqrt{m^2-k^2}|x|}, & m\geqslant k\end{cases}$$

В частном случае $k=0$ получаем

$$\psi(x,r_*)=-{}^1/_2 i\psi_0\int_0^\infty e^{-2\sqrt{\varepsilon\lambda}|x|}\frac{e^{{}^1/_2\pi\lambda}}{\operatorname{ch}{}^1/_2\pi\lambda}M_{-i\lambda,\,{}^1/_2}(ir_*)\,d\lambda\tag{3.8}$$

Переходя в (3.7) к пределу при $\lambda\to\infty$ ($\varepsilon\to0$), найдем функцию тока однородного винтового источника с равной нулю окружной скоростью на оси

$$\psi=\psi_0 r\int_0^\infty\chi(m,x)J_1(mr)\,dm\tag{3.9}$$

Здесь $J_1(mr)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка.

Формула (3.9) совпадает с результатом [1].

Если в (3.9) положить $k=0$, то получим известное выражение для функции тока потенциального пространственного источника

$$\psi=\psi_0 r\int_0^\infty e^{-mx}J_1(mr)\,dm=\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}\right)\psi_0\qquad(x\geqslant0)$$

4. Поле скоростей. Найдем теперь распределение скоростей в потоке.

Согласно (1.1) окружная, радиальная и осевая компоненты скорости равны

$$v_\varphi=\frac{k\psi}{r}=-{}^1/_2 i\psi_0 kr^{-1}\int_0^\infty\chi(\lambda,x)\frac{e^{{}^1/_2\pi\lambda}}{\operatorname{ch}{}^1/_2\pi\lambda}M_{-i\lambda,\,{}^1/_2}(i\varepsilon r^2)\,d\lambda\tag{4.1}$$

$$v_r=-{}^1/_2 i\psi_0 r^{-1}\int_0\frac{\partial\chi(\lambda,x)}{\partial x}\frac{e^{{}^1/_2\pi\lambda}}{\operatorname{ch}{}^1/_2\pi\lambda}M_{-i\lambda,\,{}^1/_2}(i\varepsilon r^2)\,d\lambda\tag{4.2}$$

$$\frac{\partial\chi(\lambda,x)}{\partial x}=\begin{cases}\mp\sqrt{k^2-m^2}\sin\sqrt{k^2-m^2}\,x, & m\leqslant k\\ \mp\sqrt{m^2-k^2}\,e^{\mp\sqrt{m^2-k^2}\,x}, & m\geqslant k\end{cases}$$

$$v_x=-\varepsilon\psi_0\int_0^\infty\chi(\lambda,x)\frac{e^{1/2\pi\lambda}}{\operatorname{ch}{}^1/{}_2\pi\lambda}M'_{-i\lambda,\,1/2}(i\varepsilon r^2)\,d\lambda \tag{4.3}$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу.

При $r=0$ (на оси течения)

$$v_x=-\varepsilon\psi_0\int_0^\infty\chi(\lambda,x)\frac{e^{1/2\pi\lambda}}{\operatorname{ch}{}^1/{}_2\pi\lambda}\,d\lambda,\quad v_r=v_\varphi=0$$

Перейдем к исследованию поля скоростей в экваториальной плоскости ($x=0$). Учитывая, что

$$\chi(m,0)=1,\quad \left.\frac{\partial\chi}{\partial x}\right|_{x=0}=\begin{cases}0, & m\leqslant k\\ \mp\sqrt{m^2-k^2}, & m\geqslant k\end{cases}$$

для составляющих скорости получим

$$v_x=-\varepsilon\psi_0\int_0^\infty\frac{e^{1/2\pi\lambda}}{\operatorname{ch}{}^1/{}_2\pi\lambda}M'_{-i\lambda,\,1/2}(i\varepsilon r^2)\,d\lambda$$

$$v_r=\pm{}^1/{}_2i\psi_0r^{-1}\int_{k^2/4\varepsilon}^\infty\sqrt{4\varepsilon\lambda-k^2}\,\frac{e^{1/2\pi\lambda}}{\operatorname{ch}{}^1/{}_2\pi\lambda}M_{-i\lambda,\,1/2}(i\varepsilon r^2)\,d\lambda$$

$$v_\varphi=-{}^1/{}_2i\psi_0kr^{-1}\int_0^\infty\frac{e^{1/2\pi\lambda}}{\operatorname{ch}{}^1/{}_2\pi\lambda}M_{-i\lambda,\,1/2}(i\varepsilon r^2)\,d\lambda$$

Положим теперь в (4.1)—(4.3) $k=0$. Найдем

$$v_x=-\varepsilon\psi_0\int_0^\infty e^{-2\sqrt{\varepsilon\lambda}\,|x|}\frac{e^{1/2\pi\lambda}}{\operatorname{ch}{}^1/{}_2\pi\lambda}M_{-i\lambda,\,1/2}(i\varepsilon r^2)\,d\lambda \tag{4.4}$$

$$v_r=\pm i\sqrt{\varepsilon}\,\psi_0r^{-1}\int_0^\infty e^{-2\sqrt{\varepsilon\lambda}\,|x|}\frac{e^{1/2\pi\lambda}}{\operatorname{ch}{}^1/{}_2\pi\lambda}\sqrt{\lambda}\,M_{-i\lambda,\,1/2}(i\varepsilon r^2)\,d\lambda$$

$$v_\varphi=0$$

5. Полутело в винтовом потоке. Используя метод суперпозиции потоков, исследуем обтекание полутела осесимметричным однородным винтовым потоком.

Запишем уравнение для функции тока Ψ невозмущенного течения

$$r\frac{d^2\Psi}{dr^2}-\frac{d\Psi}{dr}+k^2r\Psi=0 \tag{5.1}$$

Решение уравнения (5.1), удовлетворяющее условию конечности скоростей на оси симметрии течения

$$\Psi=CrJ_1(kr)$$

где C — произвольная постоянная.

Обозначая скорость на оси симметрии течения через U_0, получим

$$\Psi=U_0k^{-1}rJ_1(kr) \tag{5.2}$$

Функции тока (5.2) соответствует следующее распределение скоростей:

$$V_x=-U_0J_0(kr),\ V_r=0,\ V_\varphi=U_0J_1(kr) \tag{5.3}$$

На оси симметрии течения ($r=0$) $V_\varphi=0$, в бесконечно удаленной точке $V_x=V_r=V_\varphi=0$.

Течение (5.3) представляет собой однопараметрический осесимметричный однородный винтовой поток.

Наложим теперь на этот поток течение от однородного винтового источника, характеризующегося функцией тока (3.9)

$$\psi=r\left[\frac{U_0}{k}J_1(kr)-\frac{Q}{4\pi}\int_0^\infty \chi(m,x)J_1(mr)\,dm\right] \tag{5.4}$$

Здесь в отличие от п. 3, при $x\leqslant 0$

$$\chi(m,x)=\begin{cases}\dfrac{k^2+m^2}{k^2-m^2}\cos\sqrt{k^2-m^2}\,x-\dfrac{2m^2}{k^2-m^2}, & m<k\\[2ex] -\dfrac{m^2+k^2}{m^2-k^2}e^{\sqrt{m^2-k^2}\,x}+\dfrac{2m^2}{m^2-k^2}, & m>k\end{cases}$$

Выражение (5.4) дает решение задачи об осесимметричном обтекании полутела винтовым потоком. Действительно, уравнение нулевой линии тока распадается на два уравнения

$$r=0,\quad x>0;\quad J_1(kr)-\frac{Qk}{4\pi U_0}\int_0^\infty \chi(m,x)J_1(mr)\,dm=0 \tag{5.5}$$

Первое уравнение соответствует оси симметрии течения x, второе представляет собой образующую осесимметричного полутела.

Исследуем геометрию полутела. При $x=0$ имеем

$$rJ_1(kr)=\frac{Qk}{4\pi U_0} \tag{5.6}$$

Решая это уравнение относительно r, найдем радиус полутела в сечении плоскостью $x=0$.

Полагая в (5.5) $r=0$, получим уравнение для определения положения носика полутела, которое может быть приведено к виду

$$\frac{4\pi U_0}{Q}x^2-kx\sin kx-\cos kx=0 \tag{5.7}$$

Компоненты скорости на поверхности полутела определяются формулами

$$v_x=-U_0J_0(kr)+\frac{Q}{4\pi}\int_0^\infty m\chi(m,x)J_0(mr)\,dm \tag{5.8}$$

$$v_r=-\frac{Q}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\partial\chi}{\partial x}J_1(mr)\,dm$$

$$v_\varphi=0$$

где x и r — текущие координаты точки поверхности. Можно убедиться, что при $m\to k$, $x<0$ несобственные интегралы в (5.8) тоже сходятся.

Координаты критической точки удовлетворяют уравнениям (5.7) и $r=0$.

При $k=0$, как и следовало ожидать, получаем поле течения для полутела в потенциальном осесимметричном потоке со скоростью U_0.

Комбинируя равные по мощности винтовой источник и сток, можно найти аналог твердым телам Ренкина.

Используя выражение (3.8), подобным образом получим картину обтекания полутела однопараметрическим вихревым потоком с распределением скоростей

$$V_x^* = N \sin {}^1/_2 r_* - \cos {}^1/_2 r_*, \quad V_r = V_\varphi = 0, \tag{5.9}$$

$$V_x^* = V_x/U_0, \; N = \Psi_0/U_0 l^2, \; r_* = (r/l)^2$$

Здесь U_0 и Ψ_0 — соответственно скорость и функция тока на оси симметрии течения, l — некоторый характерный размер.

6. Поле давлений в осесимметричных вихревых потоках. В некоторых однопараметрических вихревых течениях, несмотря на то что скорость течения изменяется по величине при переходе от одной точки к другой, давление остается неизменным. Для случая плоскопараллельных однопараметрических вихревых течений этот факт был отмечен в [5]. Покажем, что высказанное утверждение сохраняет силу и в случае осесимметричных вихревых потоков с равной нулю окружной скоростью.

Механическая энергия единицы массы жидкости при отсутствии внешних объемных сил

$$E = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}, \quad V^2 = V_x^2 + V_r^2 + V_\varphi^2 \tag{6.1}$$

где p — давление, ρ — плотность.

Запишем выражение (6.1) в дифференциальной форме

$$dE = \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) \tag{6.2}$$

В случае однопараметрических течений радиальная компонента скорости $V_r=0$, кроме того, компоненты скорости и энергия E зависят только от координаты r. При этом [1]

$$\frac{dE}{dr} = {}^1/_2 \frac{dV_x^2}{dr} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{d(rV_\varphi)}{dr}$$

Полагая теперь $V_\varphi=0$, найдем, что $dE=d(V_x^2/2)$ и, следовательно $p=\text{const}$.

Отсюда следует, во-первых, что если произвольное тело вращения обтекается однопараметрическим осесимметричным вихревым потоком с окружной скоростью, равной нулю, то на большом расстоянии от этого тела давление постоянно. Во-вторых, в интегральной форме уравнение Бернулли для рассматриваемого течения может быть записано в виде

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{1}{r} \int_0^\psi \Omega(r,t)\,dt = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U_\infty^2}{2} \tag{6.3}$$

$\Omega(r,\psi) = rF'(\psi)$ — вихрь скорости; p_∞ — давление в невозмущенном течении, а U_∞ — скорость этого течения на нулевой линии тока ($\psi=0$), $v^2 = v_x^2 + v_r^2$.

Уравнение (6.3) применимо ко всему потоку в целом. Например, в потоке (5.9) выражение (6.3) принимает вид

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + {}^1/_2 \frac{\psi^2}{l^4} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U_\infty^2}{2} \tag{6.4}$$

Найдем распределение давлений по поверхности полутела, введя в (6.4) вместо величины U_∞ скорость набегающего потока на оси симметрии течения. Получим

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=\frac{p_\infty}{\rho}+(N^2+1)\frac{U_0^2}{2}. \tag{6.5}$$

По аналогии с обтеканием полутела потенциальным потоком будем характеризовать распределение давления по поверхности полутела в вихревом потоке безразмерной величиной

$$\bar{p}=\frac{p-p_\infty}{{}^1/{}_2\rho U_\infty^2}=1-\left(\frac{v}{U_\infty}\right)^2=1-\frac{(v/U_0)^2}{N^2+1} \tag{6.6}$$

и называть ее коэффициентом давления; $U_\infty \neq 0$, так как U_0 и Ψ_0 не равны нулю одновременно.

Таким образом, значение коэффициента давления в какой-либо точке поверхности обтекаемого потоком (5.9) полутела полностью определяется отношением скорости в этой точке к скорости невозмущенного течения на оси симметрии этого полутела и значением параметра N.

Известно, что при винтовом движении невязкой жидкости запас энергии во всей массе жидкости постоянен [6], т. е. уравнение Бернулли $p/\rho+$ $+v^2/2=\text{const}$ применимо ко всему потоку в целом. В этом случае $\bar{p}=2(p-p_0)/\rho U_0^2$, где p_0 — давление на оси симметрии набегающего потока.

Учитывая (5.8), запишем выражение для коэффициента давления вдоль поверхности обтекаемого полутела

$$\bar{p}=1-J_0^2(kr)-\frac{Q}{4\pi U_0}\left\{\frac{Q}{4\pi U_0}(P_1^2+P_2^2)-2P_1J_0(kr)\right\} \tag{6.7}$$

$$P_1=\int_0^\infty m\chi(m,x)J_0(m,r)\,dm,\qquad P_2=\int_0^\infty \frac{\partial\chi}{\partial x}J_1(mr)\,dm$$

При $k=0$ получаем известное выражение для коэффициента давления в точках поверхности полутела, обтекаемого потенциальным осесимметричным потоком со скоростью U_0.

Автор признателен В. Е. Давидсону, интерес и внимание которого к данной работе стимулировали решение обсуждаемых в ней задач.

Поступила 21 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев О. Ф.* Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М., Госэнергоиздат, 1958.
2. *Овчинников О. Н.* Осесимметричное обтекание тел вращения вихревым потоком. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 6.
3. *Cristea I. I.* Un tip de miscari axial simetrice rotationale pentru fluide incompresibile. An. Univ. Bucuresti. Ser. Stiint. natur, 1964, vol. 13, No. 1.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., «Наука», 1965.
5. *Ярмицкий А. Г.* Обтекание кругового цилиндра потоками несжимаемой жидкости с линейной связью между вихрем и функцией тока. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
6. *Громека И. С.* Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. Собр. соч., М., Изд-во АН СССР, 1952.