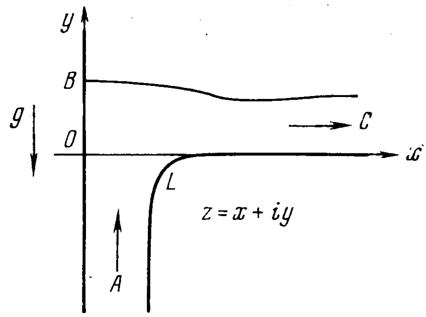
УДК 532.5.031

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОДНОГО СТРУЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. И. ПЕТУХОВ

(Норильск)

В работе рассматривается струйное течение тяжелой жидкости в геометрии, представленной на фигуре. Несжимаемая идеальная жидкость однородным потоком истекает из бесконечно удаленной точки A; AB — вертикальная непроницаемая твердая стенка; ALC — твердая стенка, форма которой определяется условием: на ALC модуль скорости жидкости v_0 остается постоянным; BC — свободная граница жидкости. Ускорение свободного падения g направлено вертикально вниз. В точке A ширина канала известна и равна H. Течение предполагается стационарным.



Пусть H — линейный масштаб, v_0 — масштаб скорости, Hv_0 — масштаб потенциала скорости и функции тока. Далее, если не оговорено обратное, рассматриваются безразмерные величины.

Пусть $W=\varphi+i\psi$ — комплексный потенциал, φ — потенциал скорости, ψ — функция тока. Известно [1], что $dW/dz=v_x-iv_y=ve^{-i\Theta}$, где v_x, v_y, v, Θ — компоненты скорости, ее модуль и угол между вектором скорости и осью x. Очевидно, что на ALC $v=1$. Будем считать на ALC $\psi=0$, тогда на ABC $\psi=1$. Область течения в плоскости комплексного потенциала представляет собой полосу единичной ширины.

Введем вспомогательную комплексную переменную t

$$W=(1/\pi)\ln(-2/(1+t)) \tag{1}$$

Области течения соответствует верхняя полуплоскость переменной t, свободная граница BC занимает на действительной оси отрезок $[-1,1]$, а точке A соответствует бесконечно удаленная точка.

Введем модифицированную функцию Жуковского [1]

$$F(t)=i(\ln v-i\Theta)/\sqrt{1-t} \tag{2}$$

Выберем ветвь функции $\sqrt{1-t}$, имеющую на участке действительной оси $(-\infty, 1)$ аргумент, равный нулю.

Учитывая это, имеем: на AC $\operatorname{Im}F=0$, на CB $\operatorname{Im}F=\ln v/\sqrt{1-t}$, на BA $\operatorname{Im}F=\pi/2\sqrt{1-t}$. По формуле Шварца [2] функцию $F(t)$ восстановим во всей плоскости t

$$F(t)=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-1}^{1}\frac{\ln v\,d\xi}{\sqrt{1-\xi}(\xi-t)}+\frac{\pi}{2}\int_{1}^{\infty}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi-1}(\xi-t)}\right] \tag{3}$$

Из (2) следует, что на отрезке $[-1, 1]$ плоскости t $\operatorname{Re}F(t)=\Theta/\sqrt{1-t}$. Поэтому на этом отрезке $\Theta/\sqrt{1-t}$ равняется правой части (3).

Дифференциальная форма условия сохранения давления на свободной границе имеет вид [1]

$$\frac{d\sigma}{dt}=\mu\frac{\Theta}{1+t},\qquad \mu=\frac{3gH}{\pi v_0^2},\qquad \delta=\frac{3}{\pi\mu} \tag{4}$$

$$\sigma=v^3,\qquad \sin\Theta\approx\Theta,\qquad \sigma(1)=0,\qquad \sigma(-1)=1$$

Функция $\ln\sigma/\sqrt{1-t}$ имеет особенность при $t=1$ и ограничена при $t=-1$. Учитывая это, осуществим обращение интеграла типа Коши в выражении для $\Theta/\sqrt{1-t}$.

Подставив в результат обращения Θ из (4), получим

$$\sigma=\sigma_0 \exp\left\{-\delta\sqrt{1+t}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1+\xi}}{\xi-t}\,d\sigma\right\},\qquad \sigma_0=\left[\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+t}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+t}}\right]^{3/2} \tag{5}$$

Учитывая, что отношение σ/σ_0 является всюду в области течения аналитической функцией, будем искать решение уравнения (5) с учетом граничных условий в виде

$$\sigma=\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k+1}u^{2k+1},\qquad u=\left[\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+t}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+t}}\right]^{1/2} \tag{6}$$

Подставив (6) в (5), получим следующие соотношения для определения коэффициентов:

$$a_{2k+1}=\frac{\delta}{k-1}\left\{(k-1)\,b_{k-1}\left(1-\sum_{k=2}^{\infty}a_{2k+1}\right)+\sum_{n=2}^{k-1}(k-n)\,b_{k-n}a_{2n+1}\right\} \tag{7}$$

$$b_j=\sum_{p=1}^{\infty}(2p+1)\,a_{2p+1}I_{j,p}$$

$$I_{j,p}=\frac{1}{2(j-p)+1}+\frac{1}{2(j+p)+3}-\frac{1}{2(j-p)-3}-\frac{1}{1(j+p)-1}$$

$$k=2,3,4,\ldots;\ j=1,2,3,\ldots$$

Пользуясь тем, что в $I_{j,p}$ первое слагаемое при $p=p_0$ совпадает с третьим слагаемым при $p=p_0-1$, а второе слагаемое при $p=p_0$ совпадает с четвертым при $p=p_0-2$ (при фиксированном j), можно записать

$$b_j=3I_{j,1}\left(1-\sum_{p=2}^{\infty}a_{2p+1}\right)+\frac{15}{2}a_5\frac{1}{j^2-(3/2)^2}+\frac{15}{2}a_7\frac{1}{j^2-(5/2)^2}+ \tag{8}$$

$$+\sum_{p=4}^{\infty}c_p\left[\frac{1}{j-(p-1/2)}-\frac{1}{j+(p-1/2)}\right]$$

$$c_p=(p+1/2a_{2p+1}-(p-3/2)\,a_{2p-3}$$

Пусть ряд $\sum_{p=2}^{\infty}a_{2p+1}$ абсолютно сходится. Последовательностью $\{(2p+1)\,a_{2p+1}\}$ в этом случае является последовательностью с ограниченным изменением [4], и, следовательно, ряд с общим членом c_p абсолютно сходится. Докажем абсолютную сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty}b_j$. Первые три слагаемые в (8), очевидно, порождают абсолютно сходящиеся ряды. Необходимо доказать абсолютную сходимость ряда с общим членом

$$T_j=\sum_{p=4}^{\infty}|c_p|\left[\frac{1}{j-(p-1/2)}-\frac{1}{j+(p-1/2)}\right] \tag{9}$$

Нетрудно заметить, что при фиксированном значении p выражение в квадратных скобках в (9) может быть просуммировано по j. Сумма положительна и равна $(p-1/2)^{-1}$. Воспользоваться этой суммой можно, если доказано, что все T_j, начиная с некоторого номера $j=N$, положительны. Сравнив в (9) положительные и отрицательные слагаемые, легко установить, что при любой последовательности c_p, порождающей абсолютно сходящийся ряд $\sum_{p=4}^{\infty} c_p$ все члены последовательности T_j, начиная с некоторого номера N, положительны. Оценку числа N здесь получить не удалось, поэтому дальше пользуемся только фактом его существования.

Оператор в правой части (8) обозначим через Y. Будем рассматривать последовательности $\{a_{2p+1}\}$ такие, что

$$\sum_{p=2}^{\infty} |a_{2p+1}| \leqslant A_0$$

где A_0 — некоторое фиксированное число. Пусть $d_{2p+1} = Ya_{2p+1}$. Из (7) легко установить неравенство

$$\sum_{p=2}^{\infty} |d_{2p+1}| \leqslant \delta[(1+2A_0)(33+A_0P(N))] \tag{10}$$

В пространстве таких последовательностей введем метрику

$$\rho(a, a') = \sum_{k=2}^{\infty} |a_{2k+1} - a'_{2k+1}| \tag{11}$$

где a и a' — последовательности. Очевидно, что пространство охарактеризованных выше последовательностей с метрикой (11), является полным [5].

Из (8) легко получается оценка

$$\sum_{j=1}^{\infty} |b_j - b_j'| \leqslant P(N) \sum_{p=2}^{\infty} |a_{2p+1} - a'_{2p+1}| \tag{12}$$

Воспользовавшись (12), из (7) имеем

$$\sum_{k=2}^{\infty} |d_{2k+1} - d'_{2k+1}| \leqslant \delta[66+P(N)(1-4A_0)] \sum_{p=2}^{\infty} |a_{2p+1} - a'_{2p+1}| \tag{13}$$

Выберем δ так, чтобы правая часть (10) была меньше или равна A_0 и, кроме того, $\delta[66+P(N)(1+4A_0)]<1$. Очевидно, что сделать это возможно. Оператор Y в этом случае является стягивающим, а из теоремы о неподвижной точке [5] вытекает существование решения системы уравнений (7).

Соотношение (7) позволяет при малых δ осуществить построение решения методом итераций. Эти вычисления были проведены на ЭВМ автором совместно с В. Д. Кустовским для δ=0.025. В качестве последовательности в «нулевой» итерации выбиралась последовательность, построенная из нулей. Подставив нулевые значения в правые части (7) и (8), получим последовательность первой итерации ($\overset{(1)}{a}_{2k+1} = 3\delta I_{j,1}$). В каждой последующей итерации вычислялись первые сто коэффициентов. После третьей итерации процесс последовательных приближений практически сошелся.

Таким образом, доказано существование решения уравнения (5) при малых δ (больших μ) и найден путь его численного построения.

Поступила 30 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды, т. 1. М., «Мир», 1965.
5. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.