УДК 532.5

ПОГРУЖЕНИЕ ПЛАВАЮЩЕГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

В. Н. ШАЦ

(Ленинград)

Изучается плоское безвихревое движение идеальной несжимаемой жидкости при вертикальном равноускоренном погружении тела, днище которого деформируется по заданному закону. Используется метод решения [1].

Приводятся зависимости для вычисления давления, силы сопротивления погружению и формы свободной поверхности.

Рассматривается плоская задача о движении идеальной и несжимаемой жидкости. При $t<0$ на ее поверхности плавает тело, подводная часть которого ограничена гладкой симметричной кривой ABC $y=y_0(x)$; в точках A и C кривая ABC достаточно гладко переходит в вертикальные прямые. При $t=0$ начинается вертикальное погружение тела в жидкость, в процессе которого днище деформируется по закону $y=f(x, t)$.

Функция $f(x, t)$ дифференцируема бесконечное число раз по координатам x и t; начальная скорость деформации $\partial f(x, 0)/\partial t=0$. Для упрощения вычислений ограничимся случаем равноускоренного погружения с ускорением ω.

Потенциал скорости жидкости $\varphi(x, y, t)$ удовлетворяет известным краевым условиям [2], определяющим безотрывное обтекание деформируемого тела, а также кинематические характеристики и равенство нулю интеграла Коши — Лагранжа для свободной поверхности жидкости $y=\eta(x, t)$.

Решение задачи разыскивается методом малого параметра, в качестве которого выбирается $\varepsilon=At(A=\sqrt{\omega/a},\ a=AC/2)$.

Введем в рассмотрение ряды

$$\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\varphi_k(x, y),\qquad \eta=\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j r_j(x),\qquad f=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\alpha_m(x)\tag{1}$$

$$\cos(n, x)=\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l c_l(x),\qquad \cos(n, y)=\sum_{p=0}^{\infty}\varepsilon^p b_p(x)$$

где φ_k, r_j, α_m, b_p — неизвестные функции, $n=n(x, t)$ — вектор внешней нормали к поверхности тела.

Коэффициенты в трех последних рядах (1) находятся при разложении в ряды Маклорена по ε функции f и правых частей зависимостей

$$\cos(n, x)=B/\sqrt{1+B^2},\qquad \cos(n, y)=-1/\sqrt{1+B^2},\qquad B=\frac{d}{dx}(y_0+f)$$

Приравнивая коэффициенты соответствующих рядов при одинаковых степенях ε, имеем

$$\alpha_m=\frac{1}{m!}A^{-m/2}\frac{d^m f(x, 0)}{dt^m},\qquad c_0=\cos(n_0, x),\qquad b_0=\cos(n_0, y)\tag{2}$$

$$c_1=b_1=0,\qquad c_2=B_1^{-3/2}\frac{d\alpha_2}{dx},\qquad b_2=B_1^{-3/2}\frac{d\alpha_2}{dx}\frac{dy_0}{dx},\ \ldots$$

Здесь $B_1=1+(dy_0/dx)^2$, $n_0=n_0(x)$ – вектор внешней нормали к кривой ABC.

Функции φ_k и r_j находятся при разложении краевых условий для функций φ и η в ряды Тейлора по y в окрестности границы L области D, занятой невозмущенной жидкостью [1]. В этих рядах разность $y-y_1=\eta$ на свободной поверхности, $y-y_1=f-a\varepsilon^2/2$ на поверхности тела ($y_1=y_1(x)$ — уравнение кривой L). После подстановки рядов в краевые условия получим формулы для определения r_j и смешанные краевые условия для гармонических функций φ_k, заданные на кривой L.

Для $k\leqslant 3$, $j\leqslant 4$ имеем

$$r_j=\frac{1}{j}\frac{\partial\varphi_{j-1}}{\partial y}\tag{3}$$

$$|x|<a\qquad \frac{\partial\varphi_0}{\partial n_0}=0,\qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n_0}=2b_0B_2,\qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n_0}=B_2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial n\,\partial y}+3b_0\alpha_3$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial n_0} = -B_2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial n_0\,\partial y} - b_0\frac{\partial\alpha_2}{dx}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\tau\,dy} + 4b_0\alpha_4 + 2b_2\alpha_2 \tag{4}$$

$$|x|>a \qquad \varphi_0=\varphi_1=\varphi_2=0, \qquad \varphi_3 = -\frac{r_2}{3}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+g\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2$$

Здесь $B_2=\alpha_2-a/2$, τ_0 – вектор касательной к кривой ABC.

Из (3) следует, что функция φ_1 равна потенциалу скорости жидкости при ударе плавающего твердого тела со скоростью $v(x)=-2B_2$.

Давление $p(x, t)$ на тело определяется аналогично при разложении интеграла Коши – Лагранжа в ряд по степеням ε. Первые несколько коэффициентов этого ряда имеют вид (ρ — плотность)

$$\frac{p_0}{\rho} = -A\varphi_1 - gy_0, \qquad \frac{p_1}{\rho} = -A\left(2\varphi_2 + \alpha_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - \alpha_1 g\right)$$

$$\frac{p_2}{\rho} = -A\left(3\varphi_3 + 2\alpha_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\alpha_1^2}{2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + B_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right) -$$

$$- B_2 g - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2$$

Сила сопротивления погружению тела равна

$$Q(t) = \sum_{h=0}^{\infty}\varepsilon^h Q_h, \qquad Q_h = 2\rho\int_0^{a/2} p_h\,dx$$

Функции $\partial\Phi_k/\partial z=\partial\varphi_k/\partial x-i\partial\varphi_k/\partial y$ вычисляются с помощью формул Келдыша — Седова после конформного отображения области D плоскости $z=x+iy$ на нижнюю полуплоскость $\zeta=u+iv$. При этом краевые условия (4) на участке ABC кривой L изменяются согласно зависимостям

$$\frac{\partial\varphi_k(z)}{\partial n_0} = -\frac{\partial\varphi_k(\zeta)}{\partial v}\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|, \qquad \frac{\partial\varphi_k(z)}{\partial\tau_0} = \frac{\partial\varphi_k(\zeta)}{\partial u}\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|$$

Функции φ_k находятся по формуле

$$\varphi_k = \operatorname{Re}\int_0^{\zeta}\frac{d\Phi_k}{d\zeta}d\zeta + C, \qquad C = -\int_0^{\infty}\frac{d\Phi_k}{d\zeta}d\zeta$$

В [1] ошибочно принято $C=0$. Используя известные значения φ_k при $v=0$, $u\in(1,\infty)$, определяемые формулами (φ), преобразуем последнюю формулу к виду

$$C = \varphi_k(1,0) - \int_0^1\frac{\partial\varphi_k(u,0)}{\partial u}du$$

Полученные результаты позволят вычислить давление на тело, силу сопротивления и форму свободной поверхности жидкости.

Поступила 25 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шац В. Н.* Вертикальное погружение плавающего цилиндрического тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 2.
2. *Логвинович Г. В.* Гидродинамика течений со свободными границами. Киев, «Наукова думка», 1969.