

**ПОДОБИЕ ПРИ ИСТЕЧЕНИИ СИЛЬНО НЕДОРАСШИРЕННЫХ  
СТРУЙ В СПУТНЫЙ ГИПЕРЗВУКОВОЙ ПОТОК**

**А. П. ВАСИЛЬКОВ, И. Н. МУРЗИНОВ**

(Москва)

Рассматривается истечение невязкого совершенного газа из сильно недорасширенного сверхзвукового сопла в спутный гиперзвуковой поток. В предположении, что радиус среза сопла пренебрежимо мал по сравнению с характерными размерами струи, получены выражения для поперечного и продольного размеров струи, а также параметры подобия, определяющие безразмерные газодинамические функции. Выполнение подобия проверено сравнением с численными расчетами.

Подобие при истечении сильно недорасширенных струй рассматривалось в [1-3], где, в частности, определялся характерный размер течения. В [4] указывалось, что наблюдаемая в экспериментах структура струи наилучшим образом может быть описана при введении двух характерных размеров — продольного и поперечного. Эффективное построение этих двух характерных размеров для случая невязкого истечения в затопленное пространство осуществлено в работе [5], в которой показано, что при использовании продольного и поперечного размеров геометрии течения и газодинамические параметры оказываются слабо зависящими от показателя адиабаты истекающего газа и параметра, образованного из интегральных характеристик сопла. Данная работа представляет собой обобщение результатов [5] на случай истечения струи в спутный гиперзвуковой поток.

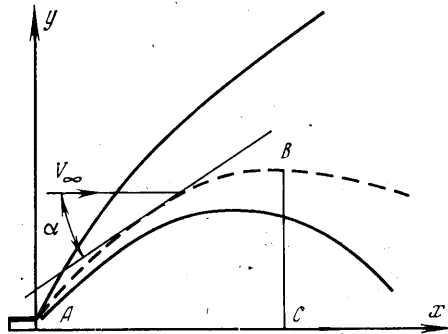
1. Рассмотрим сильно недорасширенную осесимметричную струю в спутном гиперзвуковом потоке, характеризуемом плотностью  $\rho_\infty$  и скоростью  $V_\infty$ . Предполагается, что радиус выходного сечения сопла  $R_s$  намного меньше характерных размеров струи — поперечного  $R_y$  и продольного  $R_x$ . В этом предположении естественно рассматривать сопло как источник с соответствующими интегральными параметрами: расходом  $Q$ , импульсом газа на срезе сопла  $I$  и максимальной скоростью истечения  $V_m$ . Течение предполагается невязким, внешний и истекающий газы — совершенными показателями адиабаты  $\gamma_\infty$  и  $\gamma$  соответственно.

Запишем интегралы сохранения массы и импульса в проекции на ось  $x$  для объема, ограниченно выходным сечением сопла, контактной поверхностью  $AB$ , разделяющей истекающий и внешний газы, и сечением  $BC$ , в котором радиус струи максимален (фиг. 1). В общепринятых обозначениях имеем

$$(1.1) \quad 2\pi \int_{BC} \rho u y dy = Q, \quad 2\pi \int_{BC} (p + \rho u^2) y dy = I + 2\pi \int_{AB} p y dy$$

Для оценки интеграла по  $AB$  примем давление на контактной поверхности по Ньютону

$$(1.2) \quad p = \rho_\infty V_\infty^2 \sin^2 \alpha = \rho_\infty V_\infty^2 [1 + (dx/dy)^2]^{-1}$$



Фиг. 1

Здесь  $\alpha$  — угол, образованный касательной к  $AB$  с направлением набегающего потока,  $x(y)$  — уравнение контактной поверхности. Полагая в сечении  $BC$   $u \sim V_m$  (тогда  $p \ll \rho u^2$ ), из (1.1) с учетом (1.2) получаем

$$(1.3) \quad QV_m - I \sim 2\pi\rho_\infty V_\infty^2 \int_0^{R_y} [1 + (dx/dy)^2]^{-1/2} y dy$$

Принимая для оценки  $dx/dy \sim R_x/R_y$  и вводя обозначение  $R_0^2 = (QV_m - I)/(\pi\rho_\infty V_\infty^2)$ , из (1.3) получаем соотношение

$$(1.4) \quad R_y^2 \sim R_0^2 (1 + R_x^2/R_y^2)$$

Второе соотношение можно получить на основе аналогии истечения из сопла с большими числами Маха  $M_a$  на срезе с нестационарным разлетом цилиндрического жгута газа с параметрами на срезе сопла, когда давление на границе разлетающегося газа определяется давлением на контактной поверхности [5].

Заметим, что в предположениях авторов давление на границе разлетающегося жгута  $p(t)$  намного меньше начального давления жгута, т. е. давления на срезе  $p$ . (для случая затопленной струи  $p(t) = p_\infty = \text{const}$ ). Таким образом, в силу  $p(t) \ll p_a$  при  $t \geq 0$  можно считать, что характерная скорость разлета жгута определяется в основном начальными параметрами жгута и слабо зависит от  $p(t)$ , т. е. от условий внешнего потока.

Принимая характерную поперечную скорость разлета  $V_{m1} = \sqrt{2i_a}$ , где  $i_a$  — характерная энтальпия газа на срезе, имеем

$$(1.5) \quad R_y/R_x \sim V_{m1}/V_m$$

В (1.5) принято, что время достижения частицей газа сечения струи, где ее радиус максимален, одного порядка с временем, за которое разлетающийся жгут газа расширяется до своего наибольшего радиуса. Для  $M_a \gg 1$  полученное соотношение можно переписать в виде

$$(1.6) \quad R_y \sim R_x (1 - I_1)^{1/2}$$

где  $I_1 = I(QV_m)^{-1}$ . Для сопла с равномерными параметрами на выходе величину  $I_1$  можно выразить через  $M_a$  и  $\gamma$  следующим образом:

$$(1.7) \quad I_1 = \left(1 + \frac{1}{\gamma M_a^2}\right) \left(1 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{M_a^2}\right)^{-1/2}$$

Отсюда видно, что при больших числах Маха  $M_a$   $I_1 = 1 + O(M_a^{-2})$ . Отметим, что, вообще говоря, параметр  $I_1$  в широком диапазоне изменения  $\gamma$  и  $M_a$  слабо меняется и близок к единице [5].

Из (1.4) и (1.5) получаем

$$(1.8) \quad R_y = \left(\frac{QV_m}{\pi\rho_\infty V_\infty^2}\right)^{1/2}, \quad R_x = R_y (1 - I_1)^{-1/2}$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. В работе [5]<sup>1</sup> получены аналогичные выражения для поперечного и продольного размеров при истечении струй в затопленное пространство с давлением  $p_\infty$

$$(1.9) \quad R_y = \left(\frac{QV_m - I}{\pi p_\infty}\right)^{1/2}, \quad R_x = \left(\frac{QV_m}{\pi p_\infty}\right)^{1/2}$$

<sup>1</sup> В работе [5] автором допущена неточность: коэффициенты в (3.8) следует увеличить вдвое.

Если для истекающих в спутный поток струй в качестве характерного давления взять

$$(1.10) \quad p_0 = \rho_\infty V_\infty^2 R_y^2 R_x^{-2}$$

и подставить это значение вместо  $p_\infty$  в (1.9), то для характерных размеров получаются те же выражения (1.8). Таким образом, введением некоторой эффективной нерасчетности основные характерные струи при истечении в спутный поток могут быть получены из аналогичных величин при истечении в затопленное пространство. Следует иметь в виду, что это не означает существования подобия геометрических картин при истечении в спутный поток и затопленное пространство, так как они принципиально различны [6]. Однако в области между соплом и максимумом первой бочки контуры внутренних скачков и границ струй выбором соответствующей нерасчетности по (1.10) могут быть при истечении в затопленное пространство и спутный поток практически сведены друг к другу. Ниже приведены выражения характерных размеров (1.8) для профилированного сопла с постоянными параметрами на выходе через значения обычно используемых газодинамических величин

$$(1.11) \quad R_y = R_x \frac{M_a}{M_\infty} \left( \frac{\gamma}{\gamma_\infty} n \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{M_a^2} \right)^{1/2}, \quad R_x = R_y (1 - I_1)^{-1/2}$$

где  $n = p_0/p_\infty$  — нерасчетность,  $M_\infty$  — число Маха в набегающем потоке, параметр  $I_1$  выражается через  $\gamma$  и  $M_a$  посредством (1.7).

Следует отметить, что полученные характерные величины  $R_x$  и  $R_y$  не являются точными значениями продольного и поперечного размеров струй, истекающих в спутный поток, они лишь пропорциональны им. Коэффициенты пропорциональности могут быть определены, например, из соответствующего численного расчета.

Из сравнения (1.8) и (1.9) следует интересный вывод, что относительная толщина струи  $R_y/R_x$  остается одной и той же величиной при истечении в затопленное пространство и спутный поток и определяется лишь параметром  $I_1$  независимо от условий внешнего течения.

2. В соответствии с полученными оценками характерных размеров и известными оценками газодинамических параметров в гиперзвуковых течениях, примем в качестве характерных определяющих величин выше и ниже контактной поверхности следующие значения

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_{01} &= R_x, & y_{01} &= R_y, & u_{01} &= V_\infty, & v_{01} &= V_\infty (1 - I_1)^{1/2} \\ \rho_{01} &= \rho_\infty, & p_{01} &= \rho_\infty V_\infty^2 (1 - I_1) \\ x_{02} &= x_{01}, & y_{02} &= y_{01}, & u_{02} &= V_m, & v_{02} &= V_m (1 - I_1)^{1/2} \\ \rho_{02} &= \rho_\infty V_\infty^2 / V_m^2, & p_{02} &= p_{01} \end{aligned}$$

Тогда записанные в безразмерном виде уравнения газовой динамики выше и ниже контактной поверхности будут иметь вид

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= - (1 - I_1) \frac{\partial p}{\partial x}, & \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial(\rho u y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v y)}{\partial y} &= 0, & u \frac{\partial(p/\rho^\gamma)}{\partial x} + v \frac{\partial(p/\rho^\gamma)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

При этом показатель адиабаты, вообще говоря, свой в каждой области. Из соотношений на внешней ударной волне помимо уже встречающихся в уравнениях параметров  $I_1$  и  $\gamma_\infty$  войдет число Маха  $M_\infty$ . На по-

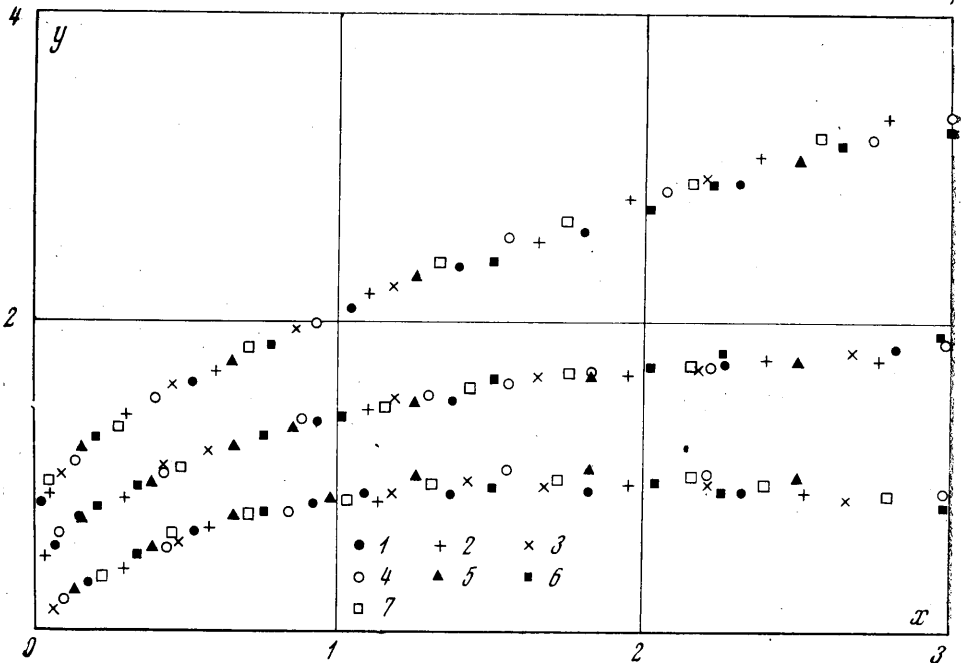
верхности контактного разрыва условия непротекания  $v/u=dy/dx$  и равенство давлений с обеих сторон никаких дополнительных параметров не вносят. Можно показать, что аналогичное утверждение справедливо и для всякого внутреннего скачка.

Интегральные «начальные условия» — условия на выходе сопла — в безразмерном виде запишутся следующим образом:

$$(2.3) \quad Q^{\circ} = Q(\pi y_{02}^2 \rho_{02} u_{02})^{-1} \equiv 1, \quad I^{\circ} = I(\pi y_{02}^2 \rho_{02} u_{02}^2)^{-1} \equiv I_1 \\ V^{\circ} = V_m / u_{02} \equiv 1, \quad R^{\circ} = R_c / y_{02}$$

Эти условия содержат один дополнительный параметр  $R^{\circ}$ , который для рассматриваемых режимов пренебрежимо мал и может быть исключен из числа определяющих параметров.

Таким образом, при сделанных предположениях течение определяется четырьмя параметрами:  $\gamma_{\infty}$ ,  $\gamma$ ,  $I_1$ ,  $M_{\infty}$ . Для достаточно больших чисел



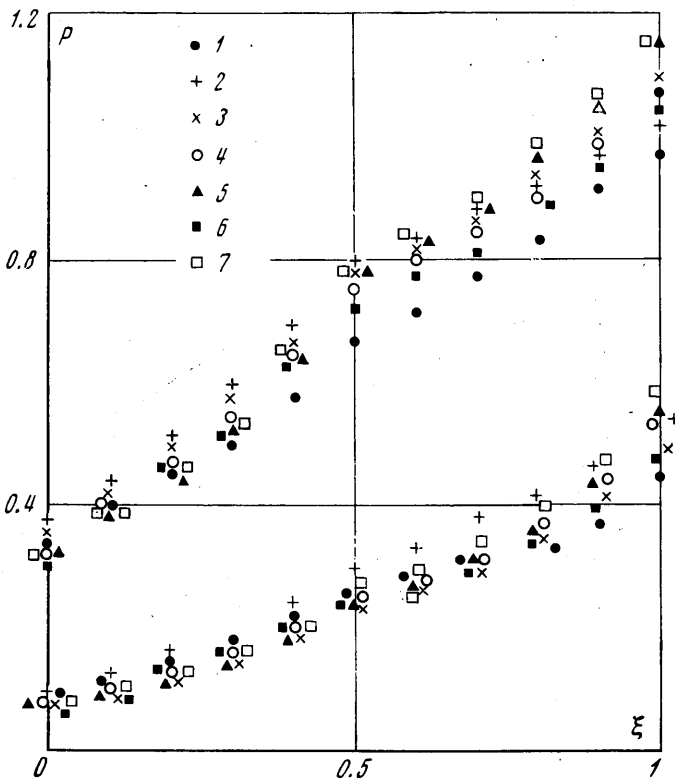
Фиг. 2

$M_{\infty}$  в соответствии с законом гиперзвуковой стабилизации из определяющих параметров может быть исключено также и число  $M_{\infty}$ , если относительная толщина струи не стремится одновременно к нулю.

Проиллюстрируем выполнение подобия численными расчетами [7]. Анализ приведенных в [7] результатов показывает, что геометрия течения и профили газодинамических функций в выбранных переменных слабо зависят от определяющих параметров. На фиг. 2 для различных расчетных случаев показаны (снизу вверх) формы висячих скачков, границы струй и головные ударные волны. При этом для удобства кривые разнесены так, что ординаты границ струй и внешних скачков увеличены соответственно на 0.4 и 0.8.

На фиг. 3 приведены профили давления в ударных слоях для подобных сечений  $x=0.4$  (верхний ряд точек) и  $x=1$ , причем здесь поперечная координата для каждого ударного слоя нормирована таким образом,

что  $\xi=0, 0.5, 1$  соответствуют висячему скачку уплотнения, поверхности контактного разрыва и внешней ударной волне. На фиг. 4 показаны профили плотности для сечения  $x=1$ . Интервалы  $(0, 1)$  последовательно слева направо соответствуют областям от оси симметрии до висячего скачка, от висячего скачка до границы струи и от границы струи до внешнего скачка. В каждой из областей указаны свои масштабы плотности. Видно, что в целом имеет место удовлетворительное выполнение полей плотности, за исключением узкого слоя вблизи границы струи. В этом слое течение сильно завихрено. Наличие этого слоя связано с тем обстоятельством, что часть истекающего из сопла газа вблизи границы струи не проходит через сильный висячий скачок уплотнения. Строго говоря, су-

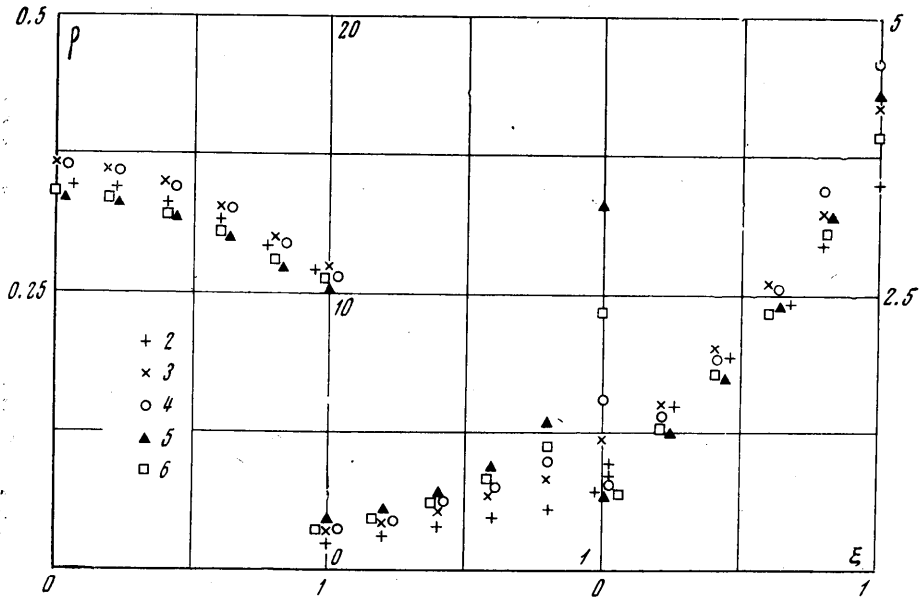


Фиг. 3

ществование такого сильно завихренного слоя исключает подобие течений по нерасчетности, так как плотность газа вблизи от границы струи и за висячим скачком уплотнения зависит от нерасчетности по разным законам [7]. Однако вследствие незначительной толщины этого сильно завихренного слоя, как показывают результаты, подобие по нерасчетностям выполняется вполне удовлетворительно.

Точки на фигурах соответствуют следующим условиям расчета:

	1	2	3	4	5	6	7
$\gamma$	1.15	1.3	1.3	1.3	1.3	1.35	1.4
$M_a$	4	3	4	4	5	4	4
$n$	$10^4$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^7$	$10^4$	$10^5$
$M_\infty$	10	8	12	15	15	25	12



Фиг. 4

Все расчеты выполнены для конических сопел с углом полураствора  $\varphi=10^\circ$ ,  $\gamma_\infty=1.4$  для всех случаев.

Отметим, что изменение угла полураствора сопла вплоть до  $15^\circ$  практически сохраняет подобие струй, за исключением небольшой окрестности сопла. Например, для двух сопел с  $\varphi=5$  и  $15^\circ$  ( $M_a=4$ ,  $M_\infty=12$ ,  $n=10^5$ ,  $\gamma=1.3$ ) сравнение форм висячего скачка, границ струй и головных скачков показывает, что отличие соответствующих ординат при  $x=0.2$  не превышает 10%, а для  $x=0.6$  оно уменьшается уже до 3%; профили давления в ударных слоях различаются еще меньше: максимальное различие при  $x=0.2$  не превышает 5%.

Следует также заметить, что анализ расчетных данных показал, что изменение параметров внешнего потока в широких пределах слабо влияет на относительную толщину струи. Это обстоятельство подтверждает справедливость предположения (1.5), следствием которого является независимость относительной толщины струи от спутного потока.

В основе полученных критериев подобия лежит одно существенное предположение, что сопло характеризуется своими интегральными параметрами. Естественно ожидать, что это предположение будет справедливым лишь на достаточно больших расстояниях от среза, намного превышающих радиус выходного сечения сопла. Вблизи же сопла (а в некоторых случаях и в бесконечной области вдоль оси симметрии [8]) течение будет определяться конкретными значениями газодинамических параметров на срезе сопла.

В работах [4, 6] отмечалось, что вязкость оказывает существенное влияние при истечении сильно недорасширенных струй. Это в первую очередь относится к полям плотности и температуры и в относительно меньшей степени сказывается на геометрии течения и распределении давления. Поэтому полученные критерии подобия могут быть использованы для корреляции расчетных данных по истечению сильно недорасширенных струй и для дальнейшего уточнения картины течения с учетом вязкости.

Поступила 4 VII 1973

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Albini F. A.* Approximate computation of underexpanded jet structure. *AIAA Journal*, 1965, vol. 3, No. 8.
2. *Moran J. P.* Similarity in high-altitude jets. *AIAA Journal*, 1967, vol. 5, No. 7.
3. *Гусев В. Н., Михайлов В. В.* О подобии течений с расширяющимися струями. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 4.
4. *Авдеевский В. С., Иванов А. В., Карпман И. М., Трасковский В. Д., Юделович М. Я.* Течение в сверхзвуковой вязкой недорасширенной струе. Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 3.
5. *Мурзинов И. Н.* Параметры подобия при истечении сильно недорасширенных струй в затопленное пространство. Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 4.
6. *Авдеевский В. С., Иванов А. В., Карпман И. М., Трасковский В. Д., Юделович М. Я.* Структура турбулентных недорасширенных струй, вытекающих в затопленное пространство и спутный поток. Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 3.
7. *Аверенкова Г. И., Ашратов Э. А., Волконская Т. Г., Дьяконов Ю. Н., Егорова Н. И., Мельников Д. А., Росляков Г. С., Усков В. И.* Сверхзвуковые струи идеального газа. Истечение струй в вакуум. Истечение струй в спутный сверхзвуковой поток. М., Изд-во МГУ, 1970.
8. *Ладыженский М. Д.* Пространственные гиперзвуковые течения газа. М., «Машиностроение», 1968.