

К ТЕОРИИ КАЛОРИМЕТРА НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Б. А. ЗЕМЛЯНСКИЙ, В. П. МАРИНИН

(Москва)

Калориметрический метод измерения теплового потока на проницаемой (или сублимирующей) поверхности требует решения некоторых специфических задач теплообмена, поскольку калориметр, вызывая разрывы в граничных условиях на стенке (прекращение вдува, скачок температуры стенки и ее каталитических свойств и т. п.), вносит возмущения в пограничный слой и измеряет тепловой поток, отличающийся от потока при отсутствии калориметра. В рамках пограничного слоя схематизация таких задач обычно основана на выделении внутреннего пограничного слоя (подслоя), который является областью влияния новых условий на стенке и развивается в основном пограничном слое [1-5]. Для учета влияния неоднородности течения в основном пограничном слое на теплопередачу через подслой здесь используется метод среднемассовых величин [4], который, как показано на разнообразных примерах в [4] и в данной работе, обладает хорошей точностью (даже в окрестности точки разрыва) и пригоден для профилей неоднородного потока достаточно общего вида. На его основе для ламинарного пограничного слоя ниже получены конечные формулы для теплового потока к калориметру относительно малого размера на проницаемой стенке, которые могут быть использованы при обработке экспериментов.

1. Пусть x, y — координаты вдоль и по нормали к поверхности; u, v — компоненты скорости; p, ρ, i — давление, плотность, энтальпия газа; $H = i + \frac{1}{2}u^2$ — полная энтальпия; μ — вязкость; σ — число Прандтля; ψ — расход; τ — напряжение трения; q — тепловой поток; $r(x)$ — радиус поперечного сечения тела; $v=0$ для плоского и $v=1$ для осесимметричного течений. Нижние индексы $0, e, w, 1$ относятся соответственно к среднемассовым параметрам, к параметрам на внешней границе пограничного слоя, на стенке и в сечении $x=x_1$. Градусами отмечены условия на непроницаемой стенке.

Пусть скачкообразное изменение условий на стенке происходит в точке $x=x_1$, за которой развивается внутренний пограничный слой. Согласно методу среднемассовых величин [4] при расчете трения и теплообмена на стенке при $x > x_1$ можно использовать обычные формулы для потенциальных внешних течений с заменой параметров на внешней границе соответствующими среднемассовыми величинами. Тогда для ламинарного режима в приближении локального подобия имеем

$$(1.1) \quad q = A \mu_0 \rho_0 u_0 H_0 r^v \xi'^{-1/2}, \quad \xi' = \int_{x_1}^x \mu_0 \rho_0 u_0 r^{2v} dx$$

Для однородного газа, степенной зависимости $N = \mu \rho / p \sim i^{-n}$, $\sigma = \text{const}$ и изотермической стенки имеют место корреляции Эккерта

$$(1.2) \quad A = 0.332 \left(\frac{i_0}{i_*} \right)^{n/2} \sigma^{-2/3} \frac{H_* - i_w}{H_0}$$

$$H_* = i_0 + \frac{1}{2} \sigma^{1/2} u_0^2, \quad i_* = \frac{1}{2} (i_0 + i_w) + 0.11 \sigma^{1/2} u_0^2, \quad i_0 = H_0 - \frac{1}{2} u_0^2$$

В общем случае A зависит от состава смеси. Для воздуха $n \approx 0.3$ вплоть до температур $T \leq 10\,000^\circ \text{K}$. Среднемассовые величины u_0, H_0 определяются

соотношениями

$$(1.3) \quad u_0 = \frac{1}{\psi} \int_0^{\psi} u(x, \psi) d\psi, \quad H_0 = \frac{1}{\psi} \int_0^{\psi} H(x, \psi) d\psi$$

Здесь осреднение производится по расходу $\psi_0(x)$, поглощаемому внутренним пограничным слоем в рассматриваемом сечении $x = \text{const}$. В рамках локального подобия $\psi_0 = \varphi_0 \xi^{7/2}$ ($\varphi_0 \approx 3.3$ при $\sigma = 1, n = 0$). Соотношение $\psi(x_1) = \psi_0(x)$, замыкающее расчетную схему и выражающее связь между расходом газа в начальном сечении и координатой $x > x_1$, где этот расход поглощается внутренним слоем, запишем в виде

$$(1.4) \quad \frac{d\psi^2}{dx} = \varphi_0^2 \mu_0 \rho_0 u_0 r^{2\nu}$$

Внешние профили $u(x, \psi)$, $H(x, \psi)$ в (1.3) можно брать в начальном сечении $x = x_1$ (оценки работы [4] показывают, что вязкость и теплопроводность практически не влияют на параметры вдоль струек тока вплоть до их встречи с внутренним слоем), а зависимость среднемассовых величин от x через давление можно при необходимости учесть с помощью уравнения адиабаты и уравнения Бернулли.

В качестве примера применения этого метода к задачам пограничного слоя с разрывными условиями на стенке определим (для простоты при $\sigma = 1, n = 0$) тепловой поток на непроницаемой пластине за точкой x_1 скачкообразного изменения температуры ($i_w = i_{w_1}$ или $x < x_1, i_w = i_{w_2}$ при $x > x_1$). Согласно (1.1) при $x > x_1$

$$(1.5) \quad q = 0.332 (\mu \rho)_e u_0 (H_0 - i_{w_2}) \xi'^{-1/2}$$

Используя Блазиусовский профиль скорости и интеграл Крокко, находим при $\varphi = (\mu_e \rho_e u_e x_1)^{-1/2} \psi \ll 1$ с учетом (1.4) ($\varphi_w'' = 0.332, \varphi_0 \approx 3.3$)

$$u_0 = \frac{2}{3} (2\varphi_w'' \varphi)^{1/2} u_e, \quad H_0 = i_{w_1} + \frac{H_e - i_{w_1}}{u_e} u_0$$

$$(2\varphi_w'' \varphi)^{1/2} \approx 2^{1/2} (\varphi_w'' \varphi_0)^{2/3} z^{1/2}, \quad z = \frac{x - x_1}{x_1}$$

Тогда из (1.5) при $0 < x - x_1 \ll x_1$ получаем ($a = 8\varphi_w'' \varphi_0 / 9 \approx 0.975$)

$$(1.6) \quad q = a q_1 (1 + \chi_0 \theta z^{-1/2}), \quad \chi_0 = \frac{3}{(4\varphi_w'' \varphi_0)^{2/3}} \approx 1.12, \quad \theta = \frac{i_{w_1} - i_{w_2}}{H_e - i_{w_1}}$$

Существует также точное в рамках пограничного слоя решение задачи. При $x > x_1$ профиль скорости остается блазиусовским, а полная энтальпия $H = H^{(1)} - (i_{w_1} - i_{w_2}) h(x, \psi)$ в тепловом подслое (вне подслоя $H = H^{(1)}$) определяется в переменных Мизеса уравнением

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \mu_e \rho_e \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial h}{\partial \psi} \right), \quad h(x, 0) = 1, \quad h(x, \infty) = 0$$

При $\varphi \ll 1$, когда $u \sim \varphi^{1/2}$, оно имеет автомодельное решение

$$(1.7) \quad h(t) = \frac{\gamma(1/3, 4/9 t^2)}{\Gamma(1/3)}, \quad t = (2\varphi_w'')^{-1/6} z^{-2/3} \varphi,$$

$$\gamma(\alpha, \xi) = \int_{\xi}^{\infty} \xi^{1-\alpha} e^{-\xi} d\xi$$

Здесь $\Gamma(\alpha) = \gamma(\alpha, 0)$ — гамма-функция. Практическая граница подслоя соответствует примерно значению $i_* \approx 3.5$, что определяет расход газа через подслой и, учитывая второй член разложения u по Φ (порядка Φ^2), позволяет оценить область применимости этого решения ($x - x_1 \leq 0.1x_1$). Из (1.7) найдем тепловой поток на стенке при $x > x_1$

$$(1.8) \quad q = q_1(1 + \chi \theta z^{-1/2}), \quad \chi = \frac{1}{(3\Phi_w'')^{2/3} \Gamma(4/3)} \approx 1.12$$

Сравнение (1.6) и (1.8) свидетельствует о высокой точности метода среднemasовых величин даже в малой окрестности точки разрыва условий на стенке. Этот пример (вместе с приведенными в п. 2, 3) позволяет сделать вывод о применимости метода при решении рассматриваемых задач для калориметра малого размера.

2. Рассмотрим случай вдува однородного газа, т. е. с теми же свойствами, что и находящийся в пограничном слое. Для получения достаточно простых и общих результатов примем во внимание, что калориметр обычно имеет небольшие размеры, так что внутренний пограничный слой на нем, обусловленный прекращением вдува, развивается в пристеночной части основного пограничного слоя. Поэтому полезны следующие разложения u и H по безразмерному расходу $f = \psi \xi_1^{-1/2} \ll 1$ в сечении $x = x_1$, полученные в приближении локального подобия при $i_w = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$ и $N \sim i^{-n}$ (необходимы как минимум два члена разложений)

$$(2.1) \quad \frac{u}{u_e} = C^{1/2} f^{1/2} + \frac{2}{3} \left(B + n\sigma S \frac{H_e - i_w}{i_w} \right) f + \dots$$

$$\frac{H - i_w}{H_e - i_w} = 2\sigma S C^{-1/2} f^{1/2} + \frac{4}{3} \sigma S C^{-1} \left(\frac{3\sigma - 1}{2} B + n\sigma S \frac{H_e - i_w}{i_w} + \frac{3}{8} \frac{1 - \sigma}{\sigma} \frac{u_e^2}{H_e - i_w} C^2 S^{-1} \right) f + \dots$$

Здесь введены обозначения

$$(2.2) \quad C = c_f \text{Re}_1^{1/2} l_{e1}^{1/2}, \quad S = \text{St}_1 \text{Re}_1^{1/2} l_{e1}^{1/2}, \quad B = \left(\frac{\rho_w u_w}{\rho_e u_e} \right)_1 \text{Re}_1^{1/2} l_{e1}^{1/2}$$

$$c_f = \frac{2\tau}{\rho_e u_e^2}, \quad \text{St} = \frac{q}{\rho_e u_e (H_e - i_w)}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_e u_e x_{ef}}{\mu_e}, \quad l_e = \frac{\mu_e \rho_e}{\mu_w \rho_w}$$

$$\xi = \int_0^x \mu_w \rho_w u_e r^{2\nu} dx = \mu_w \rho_w u_e r^{2\nu} x_{ef}, \quad \psi = \int_0^y \rho u r^\nu dy$$

Собирая соответствующие разложения для u_0 , H_0 и других величин, входящих в (1.1), имеем при $f \ll 1$ для изотермической стенки

$$(2.3) \quad q = a q_1 (1 + Q C^{-1/2} f^{1/2} + \dots)$$

$$Q = \frac{1 + 3\sigma}{4} B + \frac{b}{8\sigma} \frac{u_e^2}{H_e - i_w} C^2 S^{-1}$$

$$a = \frac{8}{9} 0.332 \Phi_0 \sigma^{1/2}, \quad b = \frac{3}{2} (1 - \sigma) - \frac{4}{3} (1 - \sigma^{1/2})$$

Влияние давления даст в величину q вклад $O(f^{1/2})$ и поэтому во внимание не принимается.

Отметим, что при отсутствии вдува различие между q и q_1 для $f \ll 1$ будет величиной порядка $f^{1/2}$, а не $f^{1/3}$, как следует из (2.3) при $B=0$ и $\sigma \neq 1$, что нужно отнести к погрешности метода. Учитывая, что вклад второго члена в выражении для Q в величину q при $B \neq 0$ обычно мал (для охлажденной стенки при $x-x_1 \leq 0.1 x_{ef,1}$ не более $\sim 10\%$ [6-8]), будем его опускать, полагая

$$Q \approx (1+3\sigma)B/4$$

Связь между f и x согласно (1.4) имеет вид

$$(2.4) \quad z = \frac{2}{\varphi_0^2} \int_0^f \frac{u_e}{u_0} \frac{f df}{l_0}, \quad z = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_1} \approx \frac{x - x_1}{x_{ef,1}}$$

Отсюда находим главный член разложения $f^{1/2}$ по $z^{1/3}$

$$(2.5) \quad f^{1/2} \approx 1/2 (2\varphi_0)^{2/3} C^{1/6} z^{1/3}$$

Таким образом, при $z \ll 1$ получаем распределение q за точкой прекращения вдува с точностью до членов $O(z^{1/3})$

$$\frac{q}{q_1} = a \left(1 + \frac{1+3\sigma}{8} (2\varphi_0)^{2/3} B C^{-1/3} z^{1/3} + \dots \right)$$

Величина a зависит от φ_0 . Пользуясь известной неопределенностью в φ_0 , выберем φ_0 так, чтобы $a \approx 1$, а именно

$$\varphi_0 \approx 3.3 \sigma^{-1/3}$$

Тогда средний тепловой поток q_+ , измеряемый калориметром длиной $x-x_1$, равен

$$(2.6) \quad q_+ = \frac{1}{z} \int_0^z q dz = q_1 (1 + 1.32 \vartheta C^{0.2/3} \lambda z^{1/3} + \dots)$$

$$\vartheta = \frac{1+3\sigma}{4} \sigma^{-2/3}, \quad \lambda = B^* \left(\frac{C^0}{C} \right)^{1/3}, \quad B^* = \frac{B}{C^0}$$

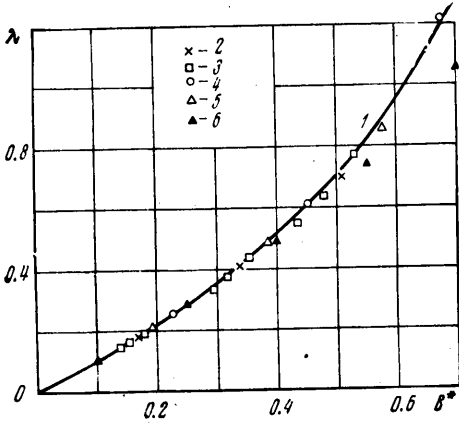
Здесь C^0 — параметр трения на непроницаемой стенке в точке $x=x_1$ (для пластины $C^0 \approx 0.664$). Поскольку отношение C/C^0 входит в λ небольшой степени, можно ожидать, что λ определяется в основном величиной B^* и слабо зависит от закона вдува. Это действительно так, как видно из фиг. 1, где обработаны результаты расчетов [6, 7] для автомодельного вдува (1-5) и [9] для вдува постоянной интенсивности (6). Индексы 1-6 относятся к условиям: 1, $6-\beta=0$; 2, $6-\beta=0.286$; 3, $6-\beta=0.4$ (при $\sigma=1, n=0$); 4, $6-\beta=0$; 5, $6-\beta=0.2$ (при $\sigma=0.7, n=0.3$), а β — параметр градиента давления

$$\beta = 2 \frac{H_e}{i_e} \frac{x_{ef}}{u_e} \frac{du_e}{dx}$$

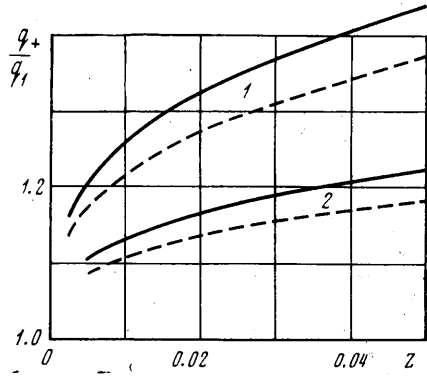
Отсюда можно сделать вывод, что при $z \ll 1$ отношение q_+/q_1 определяется по существу только местным (при $x=x_1$) значением параметра вдува B^* (хотя q_1 , конечно, зависит от закона вдува при $x < x_1$).

Из фиг. 2, где для пластины показаны значения q_+/q_1 , рассчитанные по соотношению (2.6) (сплошные кривые — $\sigma=1, n=0$, пунктир — $\sigma=0.7, n=0.3$; для кривых 1 $B^*=0.675$, для кривых 2 $B^*=0.45$), следует, что для

оценок рассматриваемого эффекта при вдуве однородного газа можно использовать решения уравнения пограничного слоя при простейших предположениях относительно переносных свойств газа ($\sigma=1, n=0$). В этом случае разложения типа (2.1) легко могут быть продолжены, что позволит



Фиг. 1



Фиг. 2

оценить точность результатов. Из уравнений пограничного слоя и (2.4) имеем при $f \ll 1$

$$\frac{u}{u_e} = \frac{H - i_w}{H_e - i_w} = C^{1/2} f^{1/2} + \frac{2}{3} B f + \frac{1}{9} B^2 C^{-1/2} f^{3/2} + \dots$$

$$f^{1/2} = \frac{1}{2} (2\varphi_\delta)^{2/3} C^{1/6} z^{1/3} + \frac{1}{32} (2\varphi_\delta)^{4/3} B C^{-1/6} z^{2/3} + \dots$$

Тогда из (1.1) находим

$$(2.7) \quad \frac{q}{q_1} = 1 + 1.76 C^{2/3} \lambda z^{1/3} + 1.57 C^{4/3} \lambda^2 z^{2/3} + \dots$$

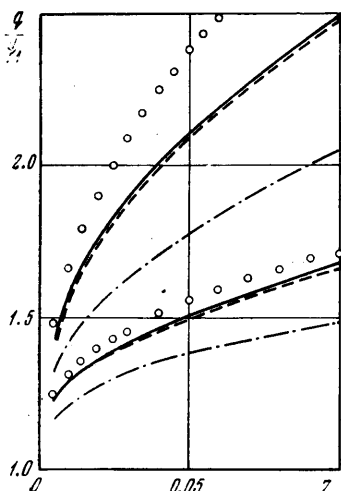
Измеряемый калориметром тепловой поток q_+ соответственно равен

$$(2.8) \quad \frac{q_+}{q_1} = 1 + 1.32 C^{2/3} \lambda z^{1/3} + 0.94 C^{4/3} \lambda^2 z^{2/3} + \dots$$

На фиг. 3 приведено сравнение относительных тепловых потоков q/q_1 за точкой прекращения автомодельного вдува на пластине, рассчитанных методом среднемассовых величин по соотношению (2.7) (сплошные линии) и численно с помощью взятых из работы [8] полных профилей скорости (пунктир). Точками показан результат решения задачи на ЭВМ разностным методом, описанным в работе [10]. Достаточная точность метода среднемассовых величин и разложения (2.7) (по крайней мере при $z \leq 0.1$) позволяет рекомендовать (2.8) для оценок влияния рассматриваемого эффекта на показания калориметра (кривые q_+/q_1 на фиг. 3 показаны штрихпунктиром). Верхняя группа кривых соответствует $B^* = 0.755$, нижняя — $B^* = 0.565$. Отметим, что в (2.8) вклад последнего члена при $B^* \leq 0.7$ достигает $\sim 15\%$ для калориметра длиной $\sim 0.1 x_{ef,1}$. С учетом (2.6) и (2.8) в случае $\sigma \neq 1$ для расчета q_+ при $z \ll 1$ будем использовать приближенное соотношение

$$(2.9) \quad \frac{q_+}{q_1} = 1 + 1.32 \theta(\sigma) C^{2/3} \lambda z^{1/3} + 0.94 C^{4/3} \lambda^2 z^{2/3} + \dots$$

Согласно фиг. 1 при известном значении параметра вдува B^* величину λ можно считать известной по крайней мере при $B^* \leq 0.6$. Тогда (2.9) позволяет найти q_+ по замеренному калориметром тепловому потоку q_+ . Получим, кроме того, явное выражение для q_+ через q_+ , обращая соотношение (2.9) и исключая параметр трения C , входящий в λ , с помощью аналогии Рейнольдса



Фиг. 3

$$C = 2S_a \sigma^{2/3}, \quad S_a = St_{a1} Re_1^{1/2} l_{e1}^{1/2},$$

$$St_a = St \frac{H_e - i_w}{H_a - i_w}$$

$$H_a = i_e + \frac{1}{2} \sigma^{1/2} u_e^2$$

Здесь H_a — равновесная энтальпия стенки.

Тогда из (2.9) находим

$$\frac{q_+}{q_+} = 1 - 1.32\theta \lambda_+ z^{1/3} + (1.16\theta^2 - 0.94) \lambda_+^2 z^{2/3} + \dots$$

$$\lambda_+ = 2^{-1/3} \sigma^{-2/3} B S_+^{-1/3} \left(\frac{H_a - i_w}{H_e - i_w} \right)^{1/3},$$

$$S_+ = St_{+1} Re_1^{1/2} l_{e1}^{1/2},$$

$$St_+ = \frac{q_+}{\rho_e u_e (H_e - i_w)}$$

Это соотношение при заданном параметре вдува B может служить для определения теплообмена на проницаемой стенке по показаниям калориметра. Используя два калориметра, достаточно отличающихся между собой продольным размером, можно наряду с q_+ найти и параметр вдува B .

3. Рассмотрим кратко случай вдува инородного газа при $x < x_1$, принимая, что химические реакции в смеси отсутствуют. Компоненты смеси считаем совершенными газами, вязкости которых $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$ линейно зависят от температуры T (индексы 1, 2 относятся здесь соответственно к вдуваемому и внешнему газам). Вязкость смеси определяем по формуле Манна [11]

$$(3.1) \quad \frac{1}{\mu} = \frac{c}{\mu^{(1)}} + \frac{1-c}{\mu^{(2)}}$$

Здесь c — весовая концентрация вдуваемого газа (при $x < x_1$ на стенке $c = c_w$, на внешней границе $c = 0$). Тепловой поток на стенке при этом равен ($c_p^{(1)}$, $c_p^{(2)}$ — удельные теплоемкости компонент при постоянном давлении, Le — число Льюиса)

$$(3.2) \quad q = \left[\frac{\mu}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\mu}{\sigma} (Le - 1) (c_p^{(1)} - c_p^{(2)}) T \frac{\partial c}{\partial y} \right]_w$$

В области вдува

$$\rho_w v_w = - \frac{Le}{\sigma} \frac{\mu_w}{1 - c_w} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_w$$

Отсюда видно, что в общем случае ($Le \neq 1$, $c_p^{(1)} \neq c_p^{(2)}$) в точке прекращения вдува инородного газа имеет место скачок теплового потока в отли-

чие от случая вдува однородного газа. Как и выше, из уравнений пограничного слоя найдем профили скорости, концентрации, полной энтальпии в пристеночной области при $x=x_1$. Отметим, что здесь функция $l = \mu\rho / (\mu\rho)_w$ при сделанных предположениях зависит только от концентрации c и определяется с помощью (3.1) и уравнения состояния ($M^{(1)}, M^{(2)}$ — молекулярные веса компонент)

$$\rho = \frac{p}{RT} M, \quad \frac{1}{M} = \frac{c}{M^{(1)}} + \frac{1-c}{M^{(2)}}$$

При $f \ll 1$ находим (в обозначениях (2.2))

$$(3.3) \quad \frac{u}{u_e} = C^{1/2} f^{1/2} + \frac{2}{3} B [1 - \alpha \text{Sm}(1 - c_w)] f + \dots$$

$$\frac{c}{c_w} = 1 - 2BC^{-1/2} \text{Sm}(1 - c_w) f^{1/2} + \dots$$

$$\frac{H - i_w}{H_e - i_w} = 2\sigma C^{-1/2} \left[S + \frac{\text{Le} - 1}{\text{Le}} \frac{c_p^{(1)} - c_p^{(2)}}{H_e - i_w} T_w (1 - c_w) B \right] f^{1/2} + \beta f + \dots$$

$$\alpha = \mu_w \left(\frac{1}{\mu_w^{(1)}} - \frac{1}{\mu_w^{(2)}} \right) + M_w \left(\frac{1}{M^{(1)}} - \frac{1}{M^{(2)}} \right)$$

Здесь $\text{Sm} = \sigma / \text{Le}$ — число Шмидта. Выражение для β ввиду его громоздкости приводить не будем, отметим лишь, что при $\sigma = \text{Le} = 1$ в силу интеграла Крокко

$$\beta = 2/3 B [1 - \alpha(1 - c_w)]$$

Найдем теперь тепловой поток за точкой прекращения вдува. При этом второй член в (3.2) выпадает, и тепловой поток при $x > x_1$ можно определять на основе соотношения (1.1), где A в общем случае зависит от состава газа в подслое, который в соответствии со схемой метода следует считать таким же, как состав газа около пластины, обтекаемой однородным внешним потоком, в котором $c = c_0$, при $\partial c / \partial y = 0$ на стенке (здесь c_0 — среднemasовая концентрация вдуваемого газа, определяемая аналогично (1.3)). Эта задача имеет тривиальное решение $c = c_0$, откуда следует, что поперек подслоя состав газа не изменяется. При сделанных допущениях остается постоянной поперек подслоя величина $\mu\rho$, тогда для вычисления A можно использовать (1.2) при $n = 0$. С учетом того, что связь (2.5) между f и z здесь сохраняется, найдем измеряемый калориметром тепловой поток q_+ в виде

$$(3.4) \quad q_+ = q_+^* (1 + Pz^{1/2} + \dots)$$

$$q_+^* = q + \frac{\text{Le} - 1}{\text{Le}} (c_p^{(1)} - c_p^{(2)}) T_w (1 - c_w) \rho_w u_w$$

Выражение для P в общем случае громоздко. Отметим, что при $\sigma = \text{Le} = 1$ (при этом скачок теплового потока отсутствует)

$$P = 1.32 C^{0.2/3} \lambda (1 + \varepsilon), \quad \varepsilon = 1/3 \alpha (1 - c_w)$$

Эти соотношения можно использовать для оценок q_+ в реальных условиях. Важно отметить, что во многих интересных случаях, в том числе при отличии молекулярных весов $M^{(1)}, M^{(2)}$ в несколько раз, величина ε достаточно мала. Так, например, при $\mu_w^{(1)} = \mu_w^{(2)}$ можно получить, что $\varepsilon < \varepsilon_0$ при $c_w > [m(1 - 3\varepsilon_0) - 1] / (m - 1)(1 - 3\varepsilon_0)$, где $m = M^{(1)} / M^{(2)}$. Если в качестве

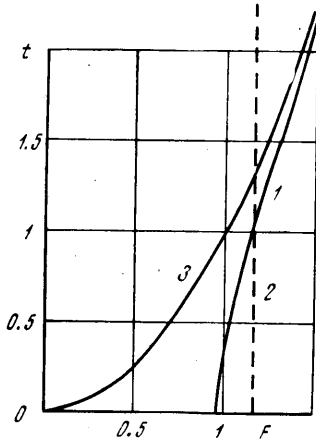
ε_0 выбрать значение ε при слабом вдуве ($B \rightarrow 0$), когда $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1 = (m-1)/3m$, то $\varepsilon < \varepsilon_1$ при $c_{w1} > 0$, т. е. при любом вдуве. Но при малых ε член порядка $z^{1/2}$ в (3.4) совпадает с соответствующим членом в (2.6) и, следовательно, полученные выше для вдува однородного газа формулы для q_+ / q_1 применимы и здесь для q_+ / q_1^* (конечно, C и λ в этом случае зависят также от отношения молекулярных весов m).

В заключение оценим точность схемы в отношении концентрации c вдуваемого газа в подслое. Согласно методу среднemasсовых величин концентрация c поперек подслоя примерно постоянна и равна среднemasсовой c_0 . При $n=0$, $\sigma = Le=1$ и $z \ll 1$ из (2.5), (3.3) имеем

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \frac{c_0}{c_{w1}} &= 1 - \frac{1}{3} (2\varphi_0)^{2/3} C^{2/3} z^{1/2} + \dots \\ &= 1 - 1.17 C^{2/3} z^{1/2} + \dots \end{aligned}$$

Получим при тех же предположениях точное в рамках пограничного слоя решение уравнения диффузии в малой окрестности за точкой прекращения слабого вдува ($B \ll 1$) однородного газа, где на стенке $\partial c / \partial y = 0$ (хотя вдувается однородный газ, его молекулы будем считать мечеными). При $B \ll 1$ всюду $c = 0(B)$, поэтому решение ищем в виде

$$\begin{aligned} c &= c_1 + B \zeta, \quad c_1 = c_{w1} (1 - C^{1/2} f^{1/2}), \\ c_{w1} &\approx 2BC^{-1} \end{aligned}$$



Фиг. 4

Из уравнения диффузии в переменных Мизеса для $\zeta(z, f)$ получаем

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = C^{1/2} \frac{\partial}{\partial f} \left(f^{1/2} \frac{\partial \zeta}{\partial f} \right), \quad \lim_{f \rightarrow 0} f^{1/2} \frac{\partial \zeta}{\partial f} = C^{-1/2}, \quad \zeta(z, \infty) = 0$$

Эта задача имеет автомодельное решение

$$\begin{aligned} \zeta &= C^{-1/2} z^{1/2} g(t), \quad t = C^{-1/2} f z^{-2/3} \\ (t^{1/2} g')' + \frac{2}{3} t g' - \frac{1}{3} g &= 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{1/2} g' = 1, \quad g(\infty) = 0 \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$(3.6) \quad g(t) = 2t^{1/2} - \frac{3}{\Phi(\infty)} \left[\exp\left(-\frac{4}{9} t^{3/2}\right) + \frac{2}{3} t^{1/2} \Phi(t) \right]$$

$$\Phi(t) = \int_0^t \exp\left(-\frac{4}{9} t^{3/2}\right) dt, \quad \Phi(\infty) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \approx 1.55$$

В частности, на стенке при $z > 0$ имеем

$$\frac{c_w}{c_{w1}} \approx 1 + \frac{1}{2} g(0) C^{2/3} z^{1/2} \approx 1 - 0.97 C^{2/3} z^{1/2}$$

На фиг. 4 показано сравнение профиля функции $F(t) = (c_{w1} - c) \cdot (c_{w1} C^{2/3} z^{1/2})^{-1}$, полученного из решения (3.6) (кривая 1) с соответствующим среднemasсовым значением $F_0 \approx 1.17$ из (3.5) (пунктир 2). Кривая 3 соответствует профилю концентраций в начальном сечении $x = x_1$.

Авторы благодарят В. В. Лунева за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Goldstein S.* Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1930, vol. 26, pt 1.
2. *Denison M. R., Baum E.* Compressible free shear layer with finite initial thickness. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 2.
3. *Шмаиенков В. Н.* К исследованию ламинарного пограничного слоя за точкой скачкообразного изменения граничных условий. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
4. *Лунев В. В.* Метод среднemasовых величин для пограничного слоя во внешнем потоке с поперечной неоднородностью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
5. *Демьянов Ю. А.* Об одном способе построения решения уравнений типа Прандтля в окрестности точек нарушения аналитичности граничных условий. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1969, т. 7, № 4.
6. *Emmons H. W., Leigh D. C.* Tabulation of Blasius function with blowing and suction. Aeronaut. Res.- Council, 1954, No. 157.
7. *Dewey C. F.* Use of local similarity concepts in hypersonic viscous interaction problems. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 1.
8. *Schlichting H., Bussman K.* Exakte Lösungen für die laminar Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen. Deutsche Acad. d. Luftfahrt-forschung. Schriften, 1943, Bd 7B, H. 2.
9. *Libby P. A., Chen K.* Laminar boundary layer with uniform injection. Phys. Fluids, 1965, vol. 8, No. 4.
10. *Мурзинов И. Н.* Ламинарный пограничный слой на сфере в гиперзвуковом потоке равномерно диссоциирующего воздуха. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
11. *Голубев И. Ф.* Вязкость газов и газовых смесей. М., Физматгиз, 1959.