

РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ О ПРОФИЛИРОВАНИИ СОПЛА, РЕАЛИЗУЮЩЕГО РАВНОМЕРНЫЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ПОТОК

А. И. РЫЛОВ

(Новосибирск)

Решена задача о построении сверхзвукового плоского несимметричного сопла, реализующего заданный равномерный поток на выходе при минимальной длине одного из контуров и заданной длине (или ординате концевой точки) другого контура.

Задача о построении оптимальной несимметричной системы двух контуров может возникнуть, если на указанные контуры в силу каких-либо причин накладываются неодинаковые (например, по длине) дополнительные ограничения. В [1] были рассмотрены оптимальные несимметричные системы невзаимодействующих контуров, т. е. таких контуров, для которых малое варьирование угла наклона любого из них не изменяет распределение давления на другом. Это позволяет рассматривать каждый из контуров отдельно от другого и свести задачу к задачам, решенным ранее (отметим, что в [1] этот результат был получен более сложным путем). Новой является задача о построении оптимальной несимметричной системы двух взаимодействующих контуров. Впервые такая задача была рассмотрена А. Н. Крайко¹. При этом были исследованы такие конфигурации, у которых один из контуров имеет внутреннюю точку излома, обтекаемую с образованием веера разрежения.

Точное решение задачи о построении несимметричного плоского сопла наибольшей тяги при заданных длинах обоих контуров связано со значительными трудностями. В то же время некоторое представление о свойствах и особенностях таких сопел можно получить из решения некоторой «предельной» задачи. В качестве такой задачи в данной работе рассматривается задача о построении плоского сопла, реализующего на выходе равномерный горизонтальный поток с давлением, равным заданному внешнему давлению, и имеющего наименьшую длину верхнего контура при фиксированной длине нижнего (как будет показано такое построение возможно, лишь начиная с некоторой конечной длины нижнего контура). Отметим, что для заданного внешнего давления указанное сопло дает максимально достижимую тягу. Кроме того, такое сопло является соплом наибольшей тяги при заданных длинах обоих контуров, если длина верхнего контура совпадает с полученной в результате решения сформулированной выше задачи.

Выполненный анализ позволяет получить достаточно наглядные решения, которые наряду с веерами волн разрежения содержат вееры волн сжатия. Однако в отличие от известных решений с веерами волн сжатия [2-6] в этих решениях пересечение одноименных характеристик происходит не на замыкающей характеристике, т. е. не в поле течения, а во внутренней точке излома верхнего контура.

1. Рассмотрим плоские сопла, удовлетворяющие следующим условиям:

1) потоки на входе (на характеристиках $a^{\circ}o$ и ao см. фиг. 1) и на выходе (на характеристиках hb° и hb) сверхзвуковые равномерные и горизонтальные с числами Маха M_1 и M_2 , ($1 < M_1 < M_2$) соответственно;

2) характеристика второго семейства, приходящая в концевую точку b нижнего контура ab , выходит из начальной точки a° верхнего контура $a^{\circ}b^{\circ}$;

3) течение в сопле безударное, изэнтропическое и, следовательно, без пересечения одноименных характеристик внутри сопла. Кроме того, ограничимся случаем совершенного газа с показателем адиабаты κ .

¹ Крайко А. Н. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Докт. дисс., М., 1972.

Из этих условий следует, что в области $oa^{\circ}c$ реализуется центрированная простая волна разрежения, в которой $\theta - h(M) = -h(M_1)$, где θ — угол наклона вектора скорости, а

$$h(M) = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} (M^2-1) - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2-1}$$

В области $cdb^{\circ}h$ реализуется простая волна, в которой $\theta + h(M) = h(M_2)$, а в $a^{\circ}cd$ имеет место поступательное течение с параметрами, определяемыми из соотношений

$$(1.1) \quad \theta_c = (h(M_2) - h(M_1))/2, \quad h(M_c) = (h(M_2) + h(M_1))/2$$

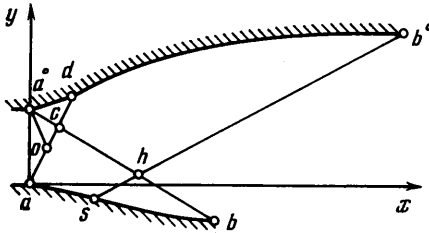
Для заданных чисел Маха M_1 и M_2 требуется построить сопло, имеющее наименьшую длину нижнего контура, т. е. наименьшую абсциссу точки b .

Так как на характеристике chb величины θ и M связаны соотношением $\theta + h(M) = h(M_2)$, то абсцисса точки b определяется распределением числа Маха на chb в соответствии с формулой

$$x_b = x_c + \int_{\psi_c}^{\psi_b} g(M, M_2) d\psi + g(M_2, M_2) (\psi_b - \psi_c)$$

$$g(M, M_2) = \frac{dx}{d\psi} = \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\rho a} = \frac{\cos(h(M_2) - h(M) - \alpha)}{\rho a}$$

где все линейные размеры отнесены к высоте сечения aa° ; $\alpha = \arcsin(1/M)$ — угол Маха; $\rho = \rho(M)$ — плотность; $a = a(M)$ — скорость звука; ψ — функция тока, определенная так, что $\psi_{a^{\circ}} = 0$ и возрастает при перемещении от верхнего контура к нижнему.



Фиг. 1

Точка h может совпадать с точкой b . В этом случае возможна простая центрированная волна разрежения с центром в точке b и $M_b = M_h < M_2$, причем здесь и далее индекс b приписывается предельным значениям параметров при приближении к b по характеристике cb .

Поставленная задача сводится к нахождению такого распределения $M = M(\psi)$ на ch , которое реализует минимум функционала

$$x_b = x_c + \int_{\psi_c}^{\psi_b} g(M, M_2) d\psi + g(M_2, M_2) (\psi_b - \psi_c)$$

при выполнении граничных условий

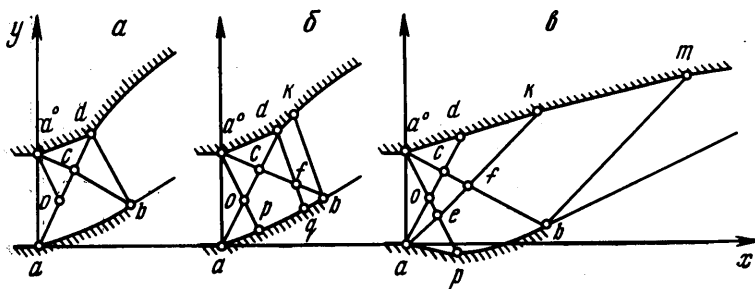
$$M(\psi_c) = M_c = M_c(M_1, M_2), \quad M(\psi_b) = M_2 \quad \text{при} \quad \psi_b < \psi_b$$

$$\text{или} \quad M(\psi_b) = M_b \leq M_2 \quad \text{при} \quad \psi_b = \psi_b$$

Так как $g(M, M_2)$ для фиксированного M_2 зависит лишь от M и не зависит явно от ψ и $dM/d\psi$, то первая вариация x_b имеет вид

$$(1.2) \quad \delta x_b = \int_{\psi_c}^{\psi_b} g_M(M, M_2) \delta M d\psi, \quad g_M(M, M_2) = \left(\frac{\partial g}{\partial M} \right)_{M_2}$$

и, следовательно, уравнение Эйлера записывается в форме $g_M(M, M_2) = 0$. Это конечное уравнение, решением которого (если оно есть) является $M = M_*(M_2) = \text{const}$. В общем случае такое решение не удовлетворяет граничному условию в точке c . Поэтому искомая характеристика ch должна содержать участки краевого экстремума, т. е. участки, на которых недопустимы двусторонние вариации. В данной задаче один из типов участков краевого экстремума может появляться в силу недопустимости пересечения в потоке характеристик первого семейства, проходящих через харак-



Фиг. 2

теристику второго семейства ch . Подобные пересечения возможны лишь на контуре сопла, причем в этом случае недопустимы вариации M на ch , приводящие к перемещению точки пересечения характеристик первого семейства с контура сопла внутрь потока.

Как известно, уравнение для поперечной характеристики, пересекающей простую центрированную волну сжатия, имеет вид

$$(1.3) \quad \psi = \frac{\psi_0}{f(M_0)} f(M), \quad f(M) = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right)^{-1/2(\kappa-1)} (M^2-1)^{-\kappa}$$

Здесь ψ_0 и M_0 — параметры в некоторой точке указанной характеристики, причем можно показать, что $f_M(M) < 0$. Так как chb — поперечная характеристика в простой (необязательно центрированной) волне, то в каждой ее точке в соответствии с (1.3) выполняется неравенство

$$(1.4) \quad \frac{dM}{d\psi} \geq \frac{f(M)}{f_M(M)} \frac{1}{\psi}$$

ибо в противном случае пересечение характеристик имеет место внутри сопла. Параметры в точке c известны в силу (1.1). Поэтому, интегрируя (1.4), найдем, что на chb

$$(1.5) \quad \psi \geq f(M) \psi_c / f(M_c)$$

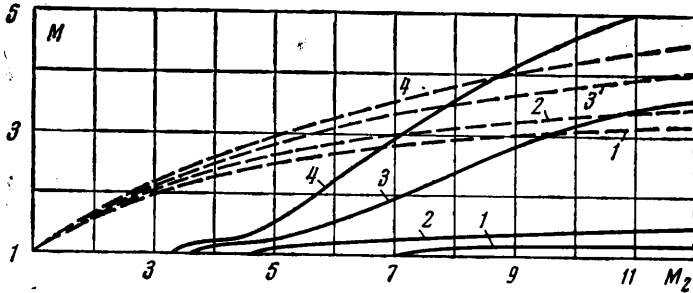
В (1.5) равенство выполняется лишь для сопла с центрированной волной сжатия, которое изображено на фиг. 2, а (отметим, что на фиг. 2, а, б, в опущены концевые части верхних контуров). Так как $f(M)$ — монотонно убывающая функция M , то из (1.5) следует, что распределение числа Маха $M^\circ(\psi)$ на характеристике cb для любого отличного от изображенного на фиг. 2, а течения удовлетворяет неравенству

$$(1.6) \quad M^\circ(\psi) \geq M(\psi), \quad \psi_c \leq \psi \leq \psi_b$$

Здесь M находится из (1.3), причем $M_b = M_{b1}$, где M_{b1} — корень уравнения $2f(M_1) = f(M_{b1})$.

Видно, что M_{b1} зависит лишь от M_1 . Кроме того, $1 < M_{b1} < M_1$.

Решение поставленной задачи существенно зависит от поведения функции $g_M(M, M_2)$. Для различных значений κ эта функция была просчитана в диапазоне $1 < M_2 \leq 12$ и $1 < M < M_3$, где M_3 — достаточно большое число, превышающее M_2 . Расчеты показали, что для каждого M_2 существует не более одного корня $M_* = M_*(M_2)$ уравнения Эйлера $g_M(M, M_2) = 0$, причем $g_M(M, M_2) > 0$ при $M_* < M$.



Фиг. 3

Полученные кривые $M_* = M_*(M_2)$ представлены на фиг. 3 сплошными линиями. Там же приведены кривые $M_c = M_c(M_1, M_2)$ для $M_1 = 1$. Цифрами 1, 2, 3 и 4 на фиг. 3 отмечены кривые, соответствующие $\kappa = 1.4, 1.26, 1.12, 1.07$. Как следует из (1.1), с ростом M_1 возрастает и M_c . Существенно, что для достаточно больших κ , например для $\kappa = 1.4 \div 1.12$, в исследованном диапазоне чисел M_2 имеет место неравенство $M_* < M_c$.

Вид решения зависит от знака функции $g_M(M, M_2)$ в окрестности точки c . Если $g_M(M, M_2) > 0$ при $M > M_{b1}$, то решением поставленной задачи является сопло с центрированной волной сжатия (фиг. 2, а), т. е. реализуется крайовой экстремум, поскольку в этом случае в силу (1.6) из (1.2) $\delta x_b > 0$. В данном случае не только малое, но и конечное варьирование характеристики cb ведет к увеличению длины сопла. В самом деле, из (1.6) и из того, что $g_M(M, M_2) > 0$ при $M > M_{b1}$, следует, что $g(M^o, M_2) \geq g(M, M_2)$ при $\psi_c \leq \psi \leq \psi_b$, где $M^o(\psi)$, как и ранее, дает распределение числа Маха на любой, отличной от построенной выше, характеристике cb . Следовательно

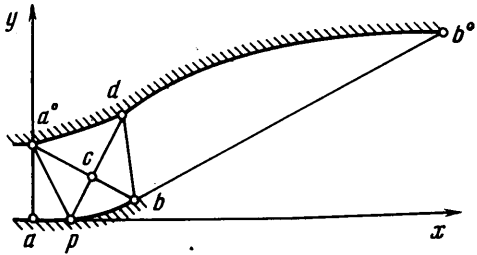
$$\Delta x_b = \int_{\psi_c}^{\psi_b} (g(M^o, M_2) - g(M, M_2)) d\psi > 0$$

Если $M_{b1} < M_* < M_c$ и $g_M(M, M_2) > 0$ при $M > M_*$, то искомая характеристика cb состоит из двух участков (cf и fb), как показано на фиг. 2, б. Первый из них (cf) есть отрезок поперечной характеристики в простой центрированной волне сжатия cdf . На втором (fb) параметры потока постоянны и $M = M_*$. Таким образом, cf — участок крайовой экстремума, а fb — двустороннего.

Из фиг. 3 видно, что при $\kappa = 1.4$ практически всегда оптимум реализует конфигурация, изображенная на фиг. 2, а. При меньших κ может реализоваться решение типа, изображенного на фиг. 2, б. Наконец, при κ , близких к единице, например при $\kappa = 1.07$, реализуется ситуация, для которой ко-

рень M_* уравнения $g_M(M, M_2)=0$ таков, что $M_* > M_c$. Если при этом $M_c < M_* < M_2$ и $g_M(M, M_2) < 0$ для $M < M_*$, то решение дает сопло с веером волн разрежения, изображенное на фиг. 2, в. В этом случае на cf поток разгоняется до $M=M_*$, а в области $fkmb$ имеет место поступательное течение с $M=M_*$.

В постановке задачи начальная точка искомого участка нижнего контура может лежать при $x > 0$. Если, например, она совпадает с точкой пересечения начальной характеристики $a^\circ p$ пучка, образующегося при обтекании излома в a° , то оптимальное сопло, аналогичное изображенному на фиг. 2, а, содержит центрированную волну сжатия (фиг. 4). В этом случае в волне cdb поток тормозится от M_c до $M=M_1$, а волны $pa^\circ c$ и cdb симметричны.



Фиг. 4

Нижние контуры построенных выше сопел находятся из решения задачи Гурса по известным характеристикам. В соплах, содержащих области поступательного движения (фиг. 2, б), возможно пересечение характеристики второго семейства $a^\circ p$ с характеристикой первого семейства dq . В этом случае участок qr нижнего контура прямолинеен.

В построенных выше соплах около концевой точки нижнего контура реализуется веер волн разрежения, в котором поток разгоняется до $M=M_2$. Так как длина проекции замыкающей характеристики bb° на ось x зависит лишь от M_1 и M_2 , то эти сопла будут самыми короткими среди сопел с заданными равномерными горизонтальными потоками на входе и выходе, у которых концы контуров замыкаются характеристикой первого семейства.

Построенные выше сопла с волнами сжатия удобны и для анализа, так как течение в центрированных простых волнах находится аналитически. Отметим, что ранее проводилось аналитическое построение контура сопла с использованием простых волн разрежения [7].

Для $\kappa=1.26$ и $M_1=2.55$ было проведено численное сравнение ряда характеристик сопел с центрированной волной сжатия (типа изображенных на фиг. 4) и сопел с прямолинейной нижней стенкой, рассматривавшихся, например, в [8]. Сравнение показало, что при одних и тех же M_2 сопла фиг. 4 короче сопел с прямой нижней стенкой на 10—15%. Так, при $M_2=5.489$ длины сопел указанных типов равны 186.4 и 220 соответственно. При полных длинах в диапазоне от 30 до 100 сопла, полученные из сопел с центрированной волной сжатия укорочением верхнего контура db° , дают при истечении в вакуум выигрыш в тяге порядка 1.5—2.0% по сравнению с соплами наибольшей тяги той же длины, полученными укорочением сопел с прямолинейной нижней стенкой, а при одной и той же тяге выигрыш в длине составит 8—10%. Очевидно, что сопла, у которых оптимизируется вся нижняя стенка (фиг. 2, а), дадут еще больший выигрыш. Отметим также, что построенные оптимальные конфигурации имеют меньшую длину, чем несимметричные сопла, рассматривавшиеся в [7].

2. Рассмотрим сопла того же типа, как и исследуемые в п. 1 (фиг. 1), но в случае, когда при заданных M_1 и M_2 ($1 < M_1 < M_2$) требуется построить сопло с наименьшей длиной верхнего контура (т. е. с наименьшей абсциссой концевой точки верхнего контура) при заданной длине X нижнего контура.

Заметим, что в соответствии с результатами п. 1, данное построение невозможно, если X меньше минимальной допустимой длины нижнего контура, полученной из решения рассмотренной выше задачи.

Выберем, так же как и в п. 1, в качестве контрольного контура характеристику chb . Тогда поставленная задача сведется к следующей.

При $\psi_c \leq \psi \leq \psi_h$ найти также распределение $M = M(\psi)$, которое обеспечивает минимум функционала при выполнении следующих изопериметрического и граничных условий:

$$(2.1) \quad x_b^0 = x_c + \int_{\psi_c}^{\psi_h} g(M, M_2) d\psi + g(M_2, M_2) \psi_h = \min$$

$$(2.2) \quad x_b = x_c + \int_{\psi_c}^{\psi_h} g(M, M_2) d\psi + g(M_2, M_2) (\psi_b - \psi_h) = X$$

$$M(\psi_c) = M_c = M_c(M_1, M_2), \quad M(\psi_h) = M_2$$

В дополнение к сказанному, характеристика ch , определяемая искомым распределением $M = M(\psi)$, должна обеспечивать изэнтропическое течение в сопле.

Покажем сначала, что точка s (фиг. 1) искомого сопла в данной задаче должна быть точкой излома, а характеристика ch содержит участок краевого экстремума gh , отвечающий вееру разрежения, который возникает при обтекании излома в точке s . Допустив противное, проварьируем одновременно распределение $M = M(\psi)$ слева от h и положение указанной точки, т. е. ψ_h . При сделанном допущении данные вариации могут быть подобраны такими, что $\delta x_b = 0$, $\delta x_b < 0$, а это свидетельствует об ошибочности сделанного предположения. Ранее на существование аналогичной s внутренней точки излома одного из контуров оптимальной несимметричной конфигурации было указано А. Н. Крайко (см. сноску на стр. 85).

Так как течение в веере gsh в данном случае не есть центрированная простая волна разрежения, то произвольная малая вариация возможного участка двустороннего экстремума fg , примыкающего к точке g слева, изменяет и распределение $M = M(\psi)$ на участке краевого экстремума gh . Это обстоятельство не позволяет получить уравнение участка двустороннего экстремума при помощи метода контрольного контура, делая необходимым привлечение для указанной цели общего метода множителей Лагранжа. Поэтому ограничимся небольшим анализом возможного расположения различных участков на ch .

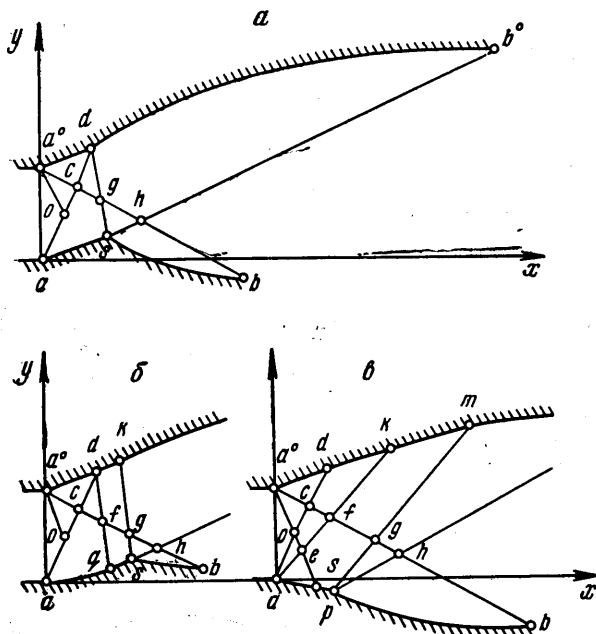
В зависимости от того, какое из решений (фиг. 2, а, б, в) реализуется при минимально допустимой длине X_* нижнего контура, в принципе возможны следующие решения поставленной задачи.

Если при $X = X_*$ реализуется сопло с центрированной волной сжатия (фиг. 2, а) (т. е. $g_M(M, M_2) > 0$ на cb), то при $X > X_*$ решением будет сопло с центрированными волнами сжатия и разрежения, данное на фиг. 5, а. Аналогично, если при $X = X_*$ реализуются сопла, у которых характеристика cb содержит участки двустороннего экстремума (фиг. 2б, в), то при $X > X_*$ решением задачи будут сопла, данные на фиг. 5, б, в (отметим, что на фиг. 5, б, в опущены концевые части верхних контуров). Имеющиеся в этом случае участки двустороннего экстремума fg , как уже отмечалось, не могут быть исследованы методом контрольного контура.

Из приведенных выше сопел (фиг. 5, а, б, в) наиболее типичным, а также удобным для построения и анализа является первое (фиг. 5, а). У дан-

ного сопла с возрастанием X уменьшаются интенсивность веера сжатия cdg , а также величины x_b^* , y_b^* , y_b , точка s смещается влево. При некотором X точка s попадает в начало нижнего контура, длины контуров сравниваются, т. е. $x_b^* = x_b = X$, и реализуется симметричное плоское сопло.

3. В заключение сделаем несколько общих замечаний. Полученные выше результаты могут быть обобщены на случай, когда поток на выходе из сопла направлен под некоторым постоянным (отличным от нуля) углом к оси x . Типы построенных оптимальных конфигураций сохраняются и в том случае, если вместо ограничения на абсциссу точки b задавать ее



Фиг. 5

ординату y_b . При этом особый интерес представляет решение, отвечающее $y_b = 0$. Получающееся в таком случае сопло может рассматриваться как верхняя половина симметричного плоского сопла с замкнутым центральным телом, а сама задача — как задача об укорочении сопла введением в поток центрального тела.

Характерным для рассмотренных выше сопел является наличие в них центрированных волн сжатия с пересечением характеристик во внутренних точках излома верхнего контура, а также центрированных волн разрежения с пересечением характеристик в точках излома нижнего контура, и в частности во внутренних его точках. Центрированные волны сжатия в симметричных оптимальных соплах впервые были рассмотрены в [2, 3], а позднее в [4, 5]. В этих задачах точка фокусировки характеристик располагается на границе области определенности искомого контура (на выходной характеристике). Центрированные волны разрежения, образующиеся при обтекании внутренних точек излома контура, рассматривались в [9-12].

Если M_2 таково, что давление на выходе равно внешнему, то сопла, построенные в п. 2, реализуют максимальную для данного внешнего давления тягу и при заданной длине нижнего контура имеют наименьшую длину верхнего контура. Поэтому можно ожидать, что несимметричные сопла

максимальной тяги при заданных длинах контуров по крайней мере при достаточно большой длине верхнего контура будут содержать некоторые характерные элементы построенных выше сопел, и в частности центрированные волны сжатия. Присутствие в таких соплах центрированных волн разрежения с изломом нижнего контура было показано Крайко А. Н. (см. сноску на стр. 85).

Автор благодарен А. Н. Крайко за интерес и внимание к данной работе, ценные советы и обсуждение результатов.

Институт теоретической
и прикладной механики СО АН СССР

Поступила 20 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов В. М. О системе тел с минимальным волновым сопротивлением. *Инж. ж.*, 1965, т. 5, вып. 6.
2. Шмыглевский Ю. Д. Вариационные задачи для сверхзвуковых тел вращения и сопел. *ПММ*, 1962, т. 26, вып. 1.
3. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. М., Тр. ВЦ АН СССР, 1963.
4. Крайко А. Н. Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. М., Тр. ВЦ АН СССР, 1963.
5. Крайко А. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д. К построению тел оптимальной формы в сверхзвуковом потоке. *ПММ*, 1964, т. 28, вып. 1.
6. Гонор А. Л., Крайко А. Н. Некоторые результаты исследования оптимальных форм при сверх- и гиперзвуковых скоростях. В кн. «Теория оптимальных аэродинамических форм». М., «Мир», 1969.
7. Михайлова М. П. Об истечении газа из сосуда. Сб. статей «Теоретическая гидромеханика», вып. 2. М., Оборонгиз, 1952.
8. Заголока В. В., Зудов В. Н., Шумский В. В. Расчетный анализ плоских несимметричных сопел со сверхзвуковой скоростью на входе. *Изв. АН СССР, Сер. техн. н.*, 1972, № 13, вып. 3.
9. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений. *ПММ*, 1964, т. 28, вып. 2.
10. Крайко А. Н., Осипов А. А. К решению вариационных задач сверхзвуковых течений газа с инородными частицами. *ПММ*, 1968, т. 32, вып. 4.
11. Осипов А. А. К решению вариационных задач газовой динамики сверхзвуковых неравновесных течений. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1969, № 1.
12. Крайко А. Н., Тилляева Н. И. Решение вариационной задачи о построении контура составного сопла. *ПММ*, 1971, т. 35, вып. 4.