

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПАРАМЕТР УСТОЙЧИВОСТИ  
ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ РАВНОВЕСНОЙ ПОВЕРХНОСТИ  
КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ

Л. А. СЛОБОЖАНИН, А. Д. ТЮПЦОВ

(Харьков)

В [1] вопрос об устойчивости равновесного состояния капиллярной жидкости в слабых силовых полях был сведен к определению условий, при которых положительно наименьшее собственное значение  $\lambda^*$  некоторой краевой задачи. В [2] показано, что  $\lambda^*$  — монотонная функция параметра  $\chi$ , зависящего от формы сосуда. Там же были описаны основные свойства функции  $\lambda^*(\chi)$ .

В настоящей статье эти свойства использованы для изучения общей задачи об устойчивости осесимметричной односвязной поверхности жидкости. Изложен метод расчета критических значений параметра  $\chi$  и построения максимальной области устойчивости. Детально изучены случаи полной невесомости, действия поля гравитационных сил и поля центробежных сил. Для них в аналитической либо в графической форме представлены критические значения параметра  $\chi$ , что позволяет при заданной форме сосуда судить об устойчивости любой из семейства осесимметричных равновесных поверхностей. Отметим, что при действии поля сил тяжести критические значения  $\chi$  для некоторых равновесных поверхностей были найдены в [1].

**1. Условия устойчивости.** Пусть однородная несжимаемая жидкость частично заполняет некоторый осесимметричный сосуд, который неподвижен или равномерно вращается относительно оси симметрии  $z$ . Будем считать, что на жидкость действуют капиллярные силы и заданное потенциальное поле массовых сил. Предположим, что под действием этих сил жидкость в сосуде находится в состоянии относительного равновесия, а ее свободная поверхность осесимметрична и односвязна.

Введем цилиндрическую систему координат  $r, \theta, z$ . Образующую равновесной свободной поверхности жидкости (равновесную линию) представим в параметрической форме:  $r(s), z(s)$ ,  $s$  — длина дуги, отсчитываемая от оси  $z$ . Значение  $s$  в точке контакта с поверхностью сосуда обозначим через  $t$ . Тогда  $s \in [0, t]$ . Будем считать, что  $r(s) > 0$  при  $0 < s \leq t$ .

Пусть  $N(s, \theta)$  — отклонение по нормали возмущенной поверхности жидкости от невозмущенной. Наиболее опасны возмущения вида  $N = \varphi(s)$  и  $N = \varphi(s) \sin \theta$  [2]. О наличии или отсутствии устойчивости можно судить по знаку наименьших собственных значений  $\lambda_{01}$  и  $\lambda_{11}$  следующих задач на отрезке  $[0, t]$ :

$$(1.1) \quad L_0 \varphi + \mu = \lambda_0 \varphi, \quad \int_0^t r \varphi ds = 0$$

$$(1.2) \quad L_1 \varphi = \lambda_1 \varphi,$$

$$L_0 u \equiv -u'' - \frac{r'}{r} u' + au, \quad L_1 = L_0 + \frac{1}{r_2}, \quad a = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Pi}{\partial n} - k_1^2 - k_2^2$$

<sup>1</sup> Барняк М. Я. Приближенные методы решения задач статики и динамики жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости. Канд. дисс., Киев, 1971.

с условием ограниченности  $\varphi(s)$  в точке  $s=0$  и краевым условием

$$(1.3) \quad \chi\varphi(t) + \varphi'(t) = 0 \quad (\chi = (k \cos \alpha - k_0) / \sin \alpha)$$

Здесь  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения на свободной поверхности жидкости;  $\Pi$  — объемная плотность потенциала массовых сил (в том числе и центробежных);  $\partial/\partial n$  — производная по внешней нормали к области, занятой жидкостью;  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны поверхности жидкости;  $\mu$  — неизвестная постоянная;  $\alpha$  — угол смачивания ( $0 < \alpha < \pi$ );  $k$  и  $k_0$  — кривизны образующих поверхности жидкости и стенки сосуда в точке их контакта ( $k > 0$ , если выпуклость направлена внутрь области, занятой жидкостью;  $k_0 > 0$ , если вогнутость направлена внутрь сосуда); функция  $a(s)$  предполагается непрерывной на отрезке  $[0, t]$ .

Равновесное состояние жидкости является устойчивым, если

$$(1.4) \quad \lambda^* = \min(\lambda_{01}, \lambda_{11}) > 0$$

и неустойчивым, если  $\lambda^* < 0$  [2].

**2. Некоторые свойства собственных значений.** Задачи (1.1), (1.3) и (1.2), (1.3) обозначим через  $A_0$  и  $A_1$ . Наряду с задачами  $A_0$ ,  $A_1$  будем рассматривать и соответствующие им задачи  $B_0$ ,  $B_1$  с краевым условием Дирихле  $\varphi(t) = 0$ . Для них собственные значения будем обозначать через  $\nu_0$  и  $\nu_1$  соответственно.

Для каждой из задач  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_0$ ,  $B_1$  все собственные значения действительны, их множество дискретно и имеет единственную предельную точку  $+\infty$ . Очевидно, все  $\lambda_1$  и  $\nu_1$  просты, а  $\lambda_0$  и  $\nu_0$  либо просты, либо двукратны.

В каждой задаче собственные значения расположим в порядке возрастания (двукратные  $\lambda_0$  или  $\nu_0$  повторяются дважды). Их будем отмечать двумя индексами: первый индекс принимает значения 0 или 1 в соответствии с тем, рассматриваются задачи  $A_0$ ,  $B_0$  или  $A_1$ ,  $B_1$ ; второй индекс обозначает порядковый номер данного собственного значения.

Приведем без доказательства основные свойства функций  $\lambda_{ij}(\chi)$  и  $\nu_{ij}(t)$  (они легко следуют из [3, 4]).

1°. Функции  $\lambda_{ij}(\chi)$  определены и непрерывны при всех  $-\infty < \chi < +\infty$ , причем

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \lambda_{i1}(\chi) = -\infty, \quad \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \lambda_{i,i+1}(\chi) = \nu_{ij} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \lambda_{ij}(\chi)$$

2°. Если  $\chi_1 < \chi_2$ , то  $\lambda_{ij}(\chi_1) < \lambda_{ij}(\chi_2)$  и  $\lambda_{0j}(\chi_1) \leq \lambda_{0j}(\chi_2)$ , равенство возможно только для двукратных  $\lambda_{0j}$ . Заметим, что двукратность  $\lambda_{0j}$  или  $\nu_{0j}$  — явление редкое. Далее будем считать, что  $\lambda_{0j}$  и  $\nu_{0j}$  простые.

3°. Функции  $\nu_{ij}(t)$  непрерывны,  $\nu_{ij}(t_1) < \nu_{ij}(t_2)$  при  $t_1 < t_2$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} \nu_{ij} = +\infty$ .

**3. Максимальные участки и области устойчивости.** Пусть  $\nu^* = \min(\nu_{01}, \nu_{11})$ . Из 1° и 2° следует, что  $\lambda^*(\chi) \leq \nu^*$ . Поэтому, если  $\nu^* < 0$ , то  $\lambda^*(\chi) < 0$  при всех  $\chi$ , т. е. равновесная поверхность жидкости неустойчива в любом угле смачивания.

Естественно поставить вопрос; как можно выделить те равновесные поверхности, для которых выполнено необходимое условие грубой устойчивости  $\nu^* > 0$ ?

Рассмотрим некоторую интегральную кривую дифференциального уравнения равновесия [5], содержащую точку  $r=0$ . Любой участок  $0 \leq s \leq t$  этой кривой может служить равновесной линией, определяющей односвязную свободную поверхность жидкости в некотором сосуде при неко-

торых значениях физических параметров. Изменяя величину  $t$ , получим совокупность равновесных линий на данной интегральной кривой.

Из свойства 3° ясно, что для каждой интегральной кривой существует некоторый максимальный участок, примыкающий к оси, для всех точек которого  $v^*(t) > 0$ . Такой участок будем называть максимальным участком устойчивости. Очевидно, что если этот участок не содержит всю интегральную кривую, то существует такое  $t=t^*$ , что  $v^*(t^*)=0$ . При этом  $v^*(t) > 0$ , если  $t < t^*$ , и  $v^*(t) < 0$ , если  $t > t^*$ . Точку на интегральной кривой, соответствующую значению  $t=t^*$ , будем называть границей максимального участка устойчивости.

*Предложение 1.* Пусть задана некоторая интегральная кривая, соответствующая односвязной поверхности вращения. Если на этой кривой существует точка  $s=t^*$ , такая, что  $v^*(t^*)=0$ , то  $t^*=\min(t_0, t_1)$ , где  $t_0$  и  $t_1$  есть первые из точек на интегральной кривой, в которых обращаются в нуль соответственно функции  $u_1(t)$  и

$$(3.1) \quad D_0(t) = u_{01}(t) \int_0^t ru_{02} ds - u_{02}(t) \int_0^t ru_{01} ds$$

а  $u_{01}(s)$ ,  $u_{02}(s)$  и  $u_1(s)$  являются решениями следующих уравнений:

$$(3.2) \quad L_0 u_{01} = 0, \quad L_0 u_{02} + 1 = 0, \quad L_1 u_1 = 0$$

Доказательство. Пусть  $u_0(s)$  и  $u_1(s)$  есть решения (1.1) и (1.2). Очевидно, что если  $u_i(t)=0$ , то  $v_i=0$  ( $i=0, 1$ ) является собственным значением соответствующей задачи  $B_i$ . Так как согласно 3° при достаточно малых значениях  $t$  будет  $v^*(t) > 0$ , то  $u_i(t) \neq 0$  ( $i=0, 1$ ) для таких  $t$ . Пусть  $t$  непрерывно возрастает. Ясно, что до тех пор пока не обратится в нуль хотя бы одна из функций  $u_i(t)$  ( $i=0, 1$ ), величина  $v^*(t)$  будет оставаться положительной. Если  $t=t_i$  есть те наименьшие значения  $t > 0$ , при которых обращаются в нуль функции  $u_i(t)$  ( $i=0, 1$ ), то согласно 3°  $v_{i1}(t) > 0$  при  $t < t_i$  и  $v_{i1} < 0$  при  $t > t_i$ . Отсюда следует, что  $v^*(t) > 0$  при  $t < \min(t_0, t_1)$ ,  $v^*(t) < 0$  при  $t > \min(t_0, t_1)$ . Поэтому  $t^*=\min(t_0, t_1)$  является границей максимального участка устойчивости и  $v^*(t^*)=0$ . Для завершения доказательства нужно показать, что  $u_0(t)=0$  в том и только в том случае, когда  $D_0(t)=0$ . Заметим, что общее решение уравнения из (1.1) можно записать в виде суммы

$$(3.3) \quad u_0(s) = cu_{01}(s) + \mu u_{02}(s)$$

где  $c$  — произвольная постоянная, а  $u_{01}(s)$  и  $u_{02}(s)$  являются решениями соответствующих уравнений из (3.2). Если потребовать, чтобы  $u_0(s)$  была собственной функцией задачи  $B_0$  при  $v_0=0$ , то получим

$$cu_{01}(t) + \mu u_{02}(t) = 0, \quad c \int_0^t ru_{01} ds + \mu \int_0^t ru_{02} ds = 0$$

Для существования нетривиального решения этой системы уравнений относительно  $c$  и  $\mu$  необходимо и достаточно, чтобы был равен нулю ее определитель, который совпадает с выражением  $D_0(t)$ .

Заметим, что  $c$  и  $\mu$  можно выбрать следующим образом:

$$(3.4) \quad c = \int_0^t ru_{02} ds, \quad \mu = - \int_0^t ru_{01} ds$$

Тогда  $u_0(t) = D_0(t)$ .

Таким образом, для каждой интегральной кривой максимальный участок устойчивости можно найти, интегрируя уравнения (3.2) до первой из точек, где обращается в нуль функция  $u_1(t)$  или функция  $D_0(t)$ , определяемая равенством (3.1).

Если рассматривается некоторое семейство интегральных кривых, которые непрерывно зависят от одного или нескольких параметров, то множество максимальных участков устойчивости этих кривых будем называть максимальной областью устойчивости  $H$ . Очевидно, что граница области  $H$  состоит из граничных точек максимальных участков устойчивости интегральных кривых.

Подчеркнем, что все участки интегральных кривых, выходящие за пределы области  $H$ , соответствуют односвязным равновесным поверхностям, которые неустойчивы в любом сосуде и при любом угле смачивания.

**4. Критические значения параметра  $\chi$ .** Пусть для некоторого участка интегральной кривой выполнено условие  $\nu^* > 0$ , т. е. этот участок содержится в максимальном участке устойчивости. В этом случае из 1° следует, что, изменяя  $\chi$ , можно сделать  $\lambda^*$  как положительным, так и отрицательным, т. е. равновесную поверхность можно сделать как устойчивой, так и неустойчивой. Кроме того, если  $\lambda_{01}$  простое, то из 2° следует, что существует единственное значение  $\chi = \chi^*$ , для которого  $\lambda^*(\chi^*) = 0$ . При этом  $\lambda^*(\chi) < 0$ , если  $\chi < \chi^*$ , и  $\lambda^*(\chi) > 0$ , если  $\chi > \chi^*$ .

Таким образом, равновесная поверхность жидкости будет устойчивой, если  $\chi > \chi^*$ , и неустойчивой, если  $\chi < \chi^*$ . Значение  $\chi = \chi^*$  будем называть критическим.

Очевидно, критические значения параметра  $\chi$  существуют только при  $\nu^* \geq 0$ .

Общая методика нахождения критических значений параметров изложена в [2]. В рассматриваемом случае она очень проста и определяется нижеследующим предложением.

*Предложение 2.* Пусть задана некоторая интегральная кривая, соответствующая односвязной осесимметричной поверхности. Тогда для каждого ее участка  $0 \leq s \leq t$ , содержащегося в максимальном участке устойчивости этой кривой, критическое значение параметра  $\chi$  определяется равенствами

$$(4.1) \quad \chi^* = \max(\chi_0, \chi_1), \quad \chi_0 = -[u_{01}'(t) \int_0^t ru_{02} ds - \\ - u_{02}'(t) \int_0^t ru_{01} ds] / D_0(t), \quad \chi_1 = -u_1'(t) / u_1(t)$$

где  $u_{01}(s)$ ,  $u_{02}(s)$  и  $u_1(s)$  есть решения уравнений (3.2).

*Доказательство.* Так как рассматриваемый участок интегральной кривой принадлежит максимальному участку устойчивости и поэтому выполнено условие  $\nu^* > 0$ , то критическое значение  $\chi$  существует. Из условия  $\nu^* > 0$  следует, что  $\nu_{01} > 0$  и  $\nu_{11} > 0$ . Пусть  $u_i(s)$  есть решения (1.1) и (1.2) при  $\lambda_i = 0$ . Очевидно, что если выполнено условие (1.3) для  $\varphi = u_i$ , то  $\lambda_i = 0$  ( $i=0,1$ ) является собственным значением задачи  $A_i$ . При достаточно больших  $\chi$  наименьшие собственные значения  $\lambda_{01}$  и  $\lambda_{11}$  задач  $A_0$  и  $A_1$  согласно 1° будут близки к  $\nu_{01}$ ,  $\nu_{11}$  и, значит, положительны; поэтому для функций  $u_i(s)$  краевые условия вида (1.3) выполняться не будут. Пусть  $\chi$  непрерывно уменьшается. Величина  $\lambda_{i1}$  ( $i=0,1$ ) будет оставаться положительной до тех пор, пока при некотором  $\chi = \chi_i$  для функции  $u_i(s)$  выполнится условие вида (1.3). В этот момент собственное значение  $\lambda_{i1}$  обратится в нуль и будет  $\lambda_{i1}(\chi) < 0$  при  $\chi < \chi_i$ ,  $\lambda_{i1}(\chi) > 0$  при  $\chi > \chi_i$  ( $i=0,1$ ).

Отсюда следует, что  $\lambda^* < 0$  при  $\chi < \max(\chi_0, \chi_1)$ ,  $\lambda^* > 0$  при  $\chi > \max(\chi_0, \chi_1)$ .

Поэтому  $\chi^* = \max(\chi_0, \chi_1)$  является критическим значением параметра  $\chi$ .

Покажем, что  $\chi_0 = -u_0'(t) / u_0(t)$  можно записать в таком виде, как в (4.1). Для этого воспользуемся (3.3) и условием

$$\int_0^t ru_0 ds = 0$$

которое удовлетворится, если  $s$  и  $\mu$  выбрать согласно (3.4). Тогда

$$u_0(t) = D_0(t), \quad u_0'(t) = u_{01}'(t) \int_0^t ru_{02} ds - u_{02}'(t) \int_0^t ru_{01} ds$$

и доказательство закончено.

Итак, если задана какая-либо интегральная кривая, то, интегрируя вдоль нее уравнения (3.2), можно во всех точках этой кривой, принадлежащих максимальному участку устойчивости, найти  $\chi_0$ ,  $\chi_1$  и критическое значение  $\chi = \chi^*$ . Теперь, если найдена некоторая равновесная линия (о методе нахождения см. [5]), представляющая собой участок  $0 \leq s \leq t$  этой интегральной кривой, принадлежащий максимальному участку устойчивости, то для решения вопроса об устойчивости соответствующей равновесной поверхности достаточно сравнить действительное значение  $\chi$  в точке  $s=t$  с его критическим значением.

Отметим, что для однопараметрического семейства интегральных кривых удобное представление результатов вычисления  $\chi^*$  можно получить, нанося на такое семейство линии уровня  $\chi^* = \text{const}$ . В частности, линия  $\chi^* = +\infty$  дает границу области  $H$ .

*Замечание 1.* Правые части в формулах, определяющих  $\chi_0$  и  $\chi_1$ , конечно, можно вычислять и в точках интегральной кривой, которые не принадлежат максимальному участку устойчивости. Но в этом случае  $\max(\chi_0, \chi_1)$  уже не будут представлять собой значение величины  $\chi^*$ , так как за пределами максимального участка устойчивости  $v^* < 0$  и критическое значение  $\chi$  не существует.

*Замечание 2.* Для частного случая, когда поле массовых сил является гравитационным, формулы (4.1) (с соответствующей этому случаю модификацией) были получены М. Я. Барняком (см. сноску на стр. 74). Но приведенные доводы М. Я. Барняка, оправдывающие эти формулы, являются лишь необходимыми. Без указания условий, достаточных для справедливости этих формул ( $v_{01} > 0$  и  $v_{11} > 0$ ), они дают не критические значения параметра  $\chi$ , а лишь те его значения, при которых одно из собственных значений  $\lambda_{0j}$  или  $\lambda_{1j}$  ( $j=1, 2, 3, \dots$ ), не обязательно наименьшее, равно нулю.

Перейдем к определению  $\chi^*$  для конкретных полей массовых сил.

**5. Полная невесомость.** В случае полной невесомости односвязными осесимметричными равновесными поверхностями являются произвольные сферы и плоскости.

На сферической поверхности радиуса  $r_0$  будет  $r(s) = r_0 \sin(s/r_0)$  и ограниченные решения уравнений (3.2) таковы:

$$u_{01}(s) = \cos(s/r_0), \quad u_{02}(s) = r_0^2/2, \quad u_1(s) = \sin(s/r_0)$$

После подстановки полученных выражений для  $u_{01}(s)$ ,  $u_{02}(s)$  и  $u_1(s)$  в формулы (4.1) для  $\chi_0$  и  $\chi_1$  и после простых преобразований получим

$$\chi_0 = -\frac{2}{r_0} \operatorname{ctg} \frac{t}{2r_0}, \quad \chi_1 = -\frac{1}{r_0} \operatorname{ctg} \frac{t}{r_0}$$

Очевидно, на интервале  $0 < t < \pi r_0$  всегда  $2 \operatorname{ctg}(t/2r_0) > \operatorname{ctg}(t/r_0)$ , поэтому  $\chi^*(t) = \chi_1(t)$ , т. е.

$$(5.1) \quad \chi^* = -\frac{1}{r_0} \operatorname{ctg} \frac{t}{r_0}$$

В предельном случае, при  $r_0 \rightarrow \infty$ , сферическая поверхность вырождается в плоскость. Тогда из (5.1) получим  $\chi^* = -1/t$ .

**6. Действие поля сил тяжести.** Рассмотрим случай, когда на жидкость действует однородное гравитационное поле, направленное вдоль оси симметрии сосуда  $z$  и имеющее объемную плотность потенциала, равную  $\rho n g z$ . Здесь  $\rho$  — плотность жидкости;  $g = 9.81 \text{ м/сек}^2$ ;  $n$  — коэффициент пе-

перегрузки, который будем считать положительным, если сила тяжести направлена вниз, и отрицательным, если она направлена вверх (предполагается, что жидкость находится ниже свободной поверхности). Начало координат поместим в точку пересечения равновесной поверхности с осью  $z$ .

Соответствующее этому случаю семейство односвязных осесимметричных равновесных поверхностей было изучено в [2, 5, 6]. В безразмерных переменных образующая равновесной поверхности должна удовлетворять системе

$$(6.1) \quad R=r|b|^{1/2}, \quad Z=z|b|^{1/2},$$

$$S=s|b|^{1/2} \quad (b=\rho ng/\sigma)$$

$$(6.2) \quad R''=-Z'(\varepsilon Z+C-Z'/R),$$

$$Z''=R'(\varepsilon Z+C-Z'/R)$$

$$(6.3) \quad R(0)=Z(0)=Z'(0)=0,$$

$$R'(0)=1$$

Здесь  $\varepsilon$  принимает значение  $+1$  при положительных перегрузках гравитационного поля и  $-1$  при отрицательных перегрузках.

Для каждого значения  $\varepsilon$  интегральные кривые задачи (6.2), (6.3) образуют однопараметрическое (по  $C$ ) семейство. На фиг. 1 ( $\varepsilon=+1$ ) и фиг. 2 ( $\varepsilon=-1$ ) для этих кривых при  $C \geq 0$  воспроизведены начальные участки, которые ограничены соответственно пунктирной линией, проходящей через точки с горизонтальной касательной, и ломаной  $OwEF$  (при  $C=0$  интегральной кривой в обоих случаях служит горизонтальная прямая  $Z=0$ ). Значениям  $C < 0$  отвечают кривые, которые получаются из соответствующих кривых для  $C > 0$  при их зеркальном отображении относительно оси  $R$ .

Для нахождения значений  $\chi_0$ ,  $\chi_1$  и  $\chi^*$  необходимо определить ограниченные решения уравнений (3.2) вдоль приведенных кривых. Уравнения (3.2) следует преобразовать к безразмерному виду согласно преобразованиям (6.1). При этом оператор  $L_0$  примет такой вид:

$$L_0 u = -u'' - \frac{R'}{R} u' + \left[ \varepsilon R' - \left( \varepsilon Z + C - \frac{Z'}{R} \right)^2 - \left( \frac{Z'}{R} \right)^2 \right] u$$

где  $u(S)$  — величина безразмерная. Легко проверить, что

$$(6.4) \quad u_{02}(S) = -\varepsilon R'(S), \quad u_1(S_1) = Z'(S)$$

Функция  $u_{01}(S)$  может быть найдена только численно.

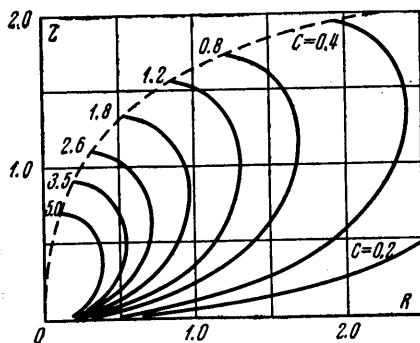
Используя (4.1), (6.4) и (6.2), получим

$$(6.5) \quad \chi_1(t) = -Z''(t)/Z'(t) = -k(t)R'(t)/Z'(t) \quad (k = \varepsilon Z + C - Z'/R)$$

где  $k$  — кривизна интегральной кривой.

Заметим, что в точках оси  $R$ , являющейся интегральной кривой при  $C=0$ , формула (6.5) неприменима (имеет место неопределенность, поскольку  $k(S) \equiv 0$  и  $Z'(S) \equiv 0$ ). Здесь  $S=R$ , а уравнение для  $u_1(S)$  принимает вид уравнения Бесселя

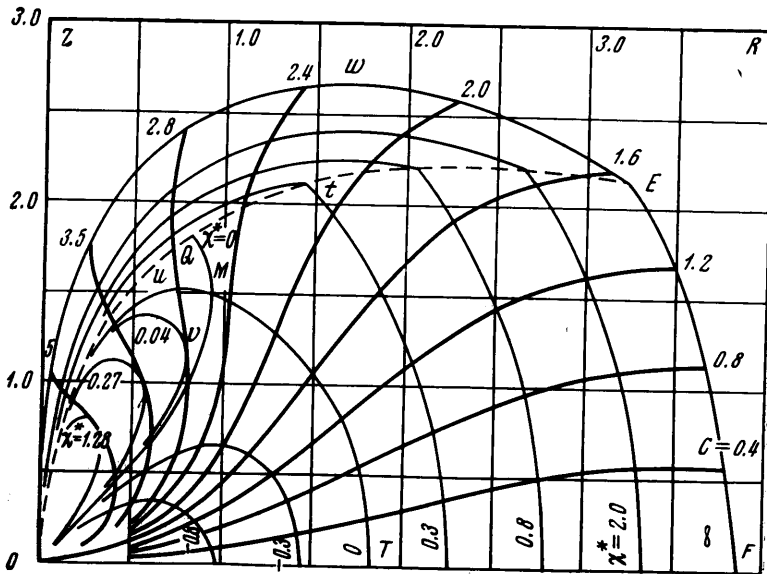
$$(6.6) \quad \frac{d^2 u_1}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du_1}{dR} - \left( \varepsilon + \frac{1}{R^2} \right) u_1 = 0$$



Фиг. 1

Остановимся подробнее на результатах вычислений величины  $\chi^*$  отдельно для случая положительных и случая отрицательных перегрузок гравитационного поля.

**Положительные перегрузки** ( $\varepsilon=+1$ ). В результате вычислений, проведенных авторами, а также М. Я. Барняком (см. сноску на стр. 74) было обнаружено, что во всей максимальной области устойчивости  $\chi_1 > \chi_0$ , а потому  $\chi^* = \chi_1$  (т. е. для равновесных поверхностей, определяемых равновесной линией, которая принадлежит области  $H$ , более опасными являются неосесимметричные возмущения). Согласно (6.5) граница области  $H$  опре-



Фиг. 2

деляется точками интегральных кривых, в которых  $Z'$  впервые (после начальной точки  $S=0$ ) обращается в нуль (в этих точках  $\chi^* = +\infty$ ). Пунктирная линия на фиг. 1 и представляет собой границу области  $H$  для положительных значений  $C$ . Она асимптотически стремится к горизонтальной прямой  $Z=2$ . При отрицательных  $C$  граница представляет собой зеркальное отражение приведенной линии относительно оси  $R$ .

Пусть теперь согласно методике [5] построена равновесная линия (принадлежащая области  $H$ ), которая определяет форму осесимметричной односвязной равновесной поверхности в заданном сосуде при известных значениях объема и угла смачивания жидкости (необходимый для этого графический материал приведен в п. 8).

Тогда в точке контакта этой линии со стенкой сосуда известны координаты  $R$ ,  $Z$  и угол  $\beta$  наклона касательной (а следовательно, и  $R' = \cos \beta$ ,  $Z' = \sin \beta$ ). Кроме того, известно и значение параметра  $C$ . Поэтому значение  $\chi^*$  нетрудно определить по формуле (6.5) всюду, кроме точек, лежащих на прямой  $Z=0$ . При  $\varepsilon=+1$  уравнение (6.6) имеет решение  $u_1(R) = I_1(R)$ , а потому в точках оси  $Z=0$  величина  $\chi^*(R) = -I_1'(R)/I_1(R)$ , где  $I_1(R)$  — функция Бесселя мнимого аргумента первого порядка.

Теперь для решения вопроса об устойчивости остается сравнить  $\chi^*$  с истинным значением  $\chi$ , вычисленным в безразмерных переменных. При определении  $\chi$  безразмерная кривизна  $k$  равновесной линии в конечной точке

находится из (6.5), а безразмерную кривизну  $k_0$  образующей сосуда легко найти, если форма сосуда известна.

**Отрицательные перегрузки** ( $\varepsilon = -1$ ). По результатам численного решения приведенных к безразмерной форме уравнений (3.2) вдоль семейства интегральных кривых, соответствующих значениям  $C \geq 0$ , и последующего использования соотношений (4.1) на фиг. 2 построены линии уровня  $\chi^* = \text{const}$ . При  $C < 0$  продолжениями этих линий служат их зеркальные отображения относительно оси  $R$ . Поэтому дальнейшее изложение достаточно вести для области, отвечающей  $C \geq 0$ .

Ломаная  $OwEF$  является границей области  $H$ . На этой линии  $\chi^* = +\infty$ . На пунктирной кривой  $OQtE$   $\chi_0 = \chi_1$ , т. е. потеря устойчивости происходит одновременно по осесимметричным и неосесимметричным возмущениям. Более подробные, чем на фиг. 2, сведения для определения величины  $\chi^* = \chi_0 = \chi_1$  на кривой  $OQtE$  приведены в таблице. В области, ограниченной ломанной  $OwEtQO$ ,  $\chi_0 > \chi_1$  и поэтому  $\chi^* = \chi_0$ , т. е. более опасными являются осесимметричные возмущения. В области, ограниченной ломаной  $OQEFO$ ,  $\chi^* = \chi_1$ , т. е. потеря устойчивости происходит только неосесимметричным образом.

$C$	$R$	$Z$	$\chi^*$	$C$	$R$	$Z$	$\chi^*$
1.6	2.925	2.168	3.751	3.1	0.544	1.553	-0.064
1.8	2.223	2.208	1.014	3.5	0.388	1.350	-0.070
2.0	1.755	2.169	0.510	4.0	0.271	1.154	-0.064
2.2	1.395	2.083	0.254	5.0	0.156	0.887	-0.042
2.4	1.114	1.972	0.105	7.0	0.073	0.607	-0.022
2.6	0.896	1.850	0.017	10.0	0.035	0.414	-0.004
2.8	0.730	1.731	-0.018				

Из (6.5) следует, что  $\chi_1 = 0$  в точках перегиба ( $k=0$ ) интегральных кривых (линия  $OuMT$  на фиг. 2) и в точках с вертикальной касательной ( $R'=0$ ) — линия  $OvMQ$ . В областях, ограниченных ломаными  $OvMTO$  и  $OuMQO$ , величина  $\chi^* = \chi_1 < 0$ . В областях, ограниченных ломаными  $OvMuO$  и  $TMQtEFT$ , величина  $\chi^* = \chi_1 > 0$ .

Заметим, что в области  $\chi_1 > \chi_0$  линии уровня  $\chi^* = \chi_1 = \text{const}$  можно было бы и не строить, так как значения  $\chi_1$  легко вычисляются согласно формуле (6.5) (по аналогии с положительными перегрузками). Из уравнения (6.6) получаем, что в точках оси  $R$  функция  $u_1(R) = J_1(R)$ , т. е.  $\chi^*(R) = -J_1'(R)/J_1(R)$ , где  $J_1(R)$  — функция Бесселя первого порядка.

В начало координат линии  $\chi^* = \text{const}$  входят под углами (к прямой  $Z=0$ ), равными  $\pi/2$  или  $\pi/4$ . Это следует из формулы (5.1) при  $r_0 \rightarrow 0$  (при больших  $|C|$  равновесные поверхности близки к сферам с радиусом, равным  $2/|C|$ ).

Отметим, что для интегральных кривых, соответствующих значениям  $C=1, 1.625, 2$  и  $4$ , М. Я. Барняком (см. сноску на стр. 74) были вычислены величины  $\chi_0$  и  $\chi_1$  как функции от длины дуги  $S$  вдоль этих кривых и построены соответствующие графики  $\chi_0(S)$ ,  $\chi_1(S)$ .

**7. Вращающаяся невесомая жидкость.** Пусть сосуд вместе с заполняющей его жидкостью вращается вокруг оси симметрии  $z$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Внешнее силовое поле отсутствует. Направим ось  $z$  от жидкости к газу, а начало координат поместим в точку пересечения этой оси со свободной поверхностью жидкости.

После линейного преобразования

$$(7.1) \quad R = rp^{1/2}, \quad Z = zp^{1/2}, \quad S = sp^{1/2} \quad (p = \rho\omega^2/2\sigma)$$

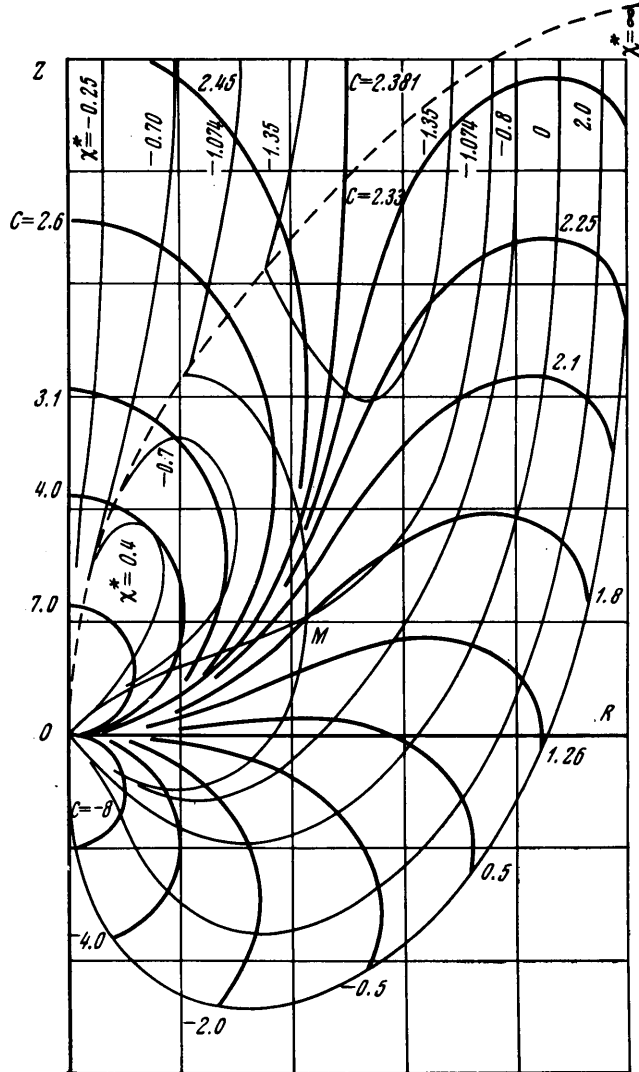


Функции  $R(S)$ ,  $Z(S)$  на равновесной линии должны удовлетворять системе [2, 7]

$$(7.2) \quad R'' = -Z'(-R^2 + C - Z'/R), \quad Z'' = R'(-R^2 + C - Z'/R)$$

$$(7.3) \quad R(0) = Z(0) = Z'(0) = 0, \quad R'(0) = 1$$

Каждая интегральная кривая задачи (7.2), (7.3) определяется значением параметра  $C$ . Свойства однопараметрического семейства этих инте-



Фиг. 3

гральных кривых достаточно подробно изучены [2, 7]. На фиг. 3 изображены (находящиеся в области  $Z \leq 3$ ) максимальные участки устойчивости интегральных кривых задачи (7.2), (7.3). Из-за недостатка места на фиг. 3 не обозначена координатная сетка (цена деления на осях  $R$ ,  $Z$  равна 0.5).

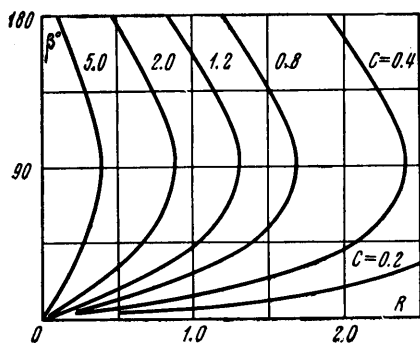
Для определения значений  $\chi^*$  в текущих точках интегральных кривых приведем уравнения (3.2) к безразмерному виду согласно преобразованиям

(7.1). Для оператора  $L_0$  получим

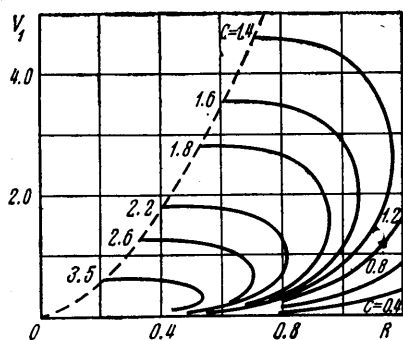
$$L_0 u = -u'' - \frac{R'}{R} u' + \left[ 2RZ' - \left( -R^2 + C - \frac{Z'}{R} \right)^2 - \left( \frac{Z'}{R} \right)^2 \right] u.$$

Здесь через  $u$  и  $t$  обозначены безразмерные значения соответствующих величин.

Численное решение полученных уравнений с последующим использованием соотношений (4.1) позволило определить значения  $\chi^*$  вдоль интегральных кривых. На фиг. 3 показаны линии уровня  $\chi^* = \text{const}$ . Совокуп-



Фиг. 4



Фиг. 5

ность точек, в которых  $\chi^* = +\infty$ , образует границу области  $H$ . Пунктирная кривая отделяет область (лежащую справа внизу), в которой устойчивость теряется относительно неосесимметричных возмущений ( $\chi^* = \chi_1$ ), от области, в которой более опасными являются осесимметричные возмущения ( $\chi^* = \chi_0$ ). На этой кривой линии  $\chi^* = \text{const}$  имеют излом.

Поверхность  $\chi^*(R, Z)$  в области, где  $\chi_1 > \chi_0$ , имеет седлообразную форму. В точке перевала  $M$  этой поверхности  $\chi^* = -1.074$ .

Вычисления показали, что интегральные кривые, соответствующие значениям  $C > 3/\sqrt{2} \approx 2.381$ , целиком содержатся внутри области  $H$ . Для этих кривых значение  $\chi^*$  на положительной полуоси  $Z$  равно нулю.

После того как равновесная линия построена (см. [5], а также п. 8), для решения вопроса об устойчивости соответствующей равновесной поверхности (в случае, если равновесная линия находится внутри области  $H$ ) следует по данным фиг. 3 определить значение  $\chi^*$  в конечной точке и сравнить его с безразмерным значением  $\chi$ . Безразмерная кривизна равновесной линии  $k = -R^2 + C - Z'/R$  и ее величина в конечной точке легко подсчитывается по известным  $R$ ,  $C$  и  $Z' = \sin \beta$ . Безразмерная кривизна  $k_0$  образующей сосуда без труда находится, если известна форма сосуда в переменных (7.1).

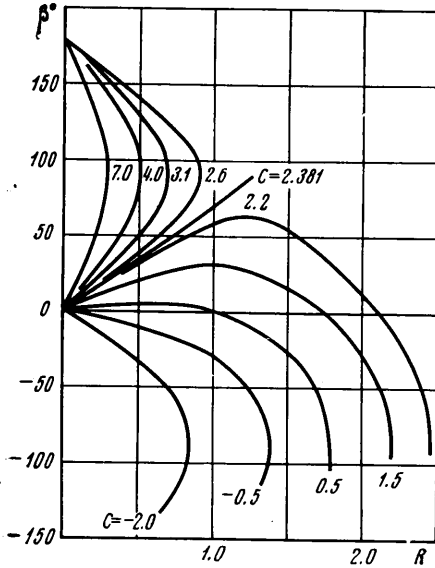
**8. Дополнение.** При решении вопроса об устойчивости предполагалось, что сама равновесная поверхность, реализующаяся в конкретном сосуде при заданных значениях интенсивности силового поля, объема и угла смачивания жидкости, уже известна. Методу отыскания равновесной линии — образующей равновесной поверхности, была посвящена работа [5]. Из нее следует, что для построения равновесной линии необходимо знать некоторые дополнительные данные о семействе интегральных кривых в заданном силовом поле. Там же такие данные были приведены для случая отрицательных перегрузок гравитационного поля ( $\epsilon = -1$ ). Эти данные включают в себя зависимости угла  $\beta$  наклона касательной к интегральным кривым задачи

(6.2), (6.3) и безразмерного объема

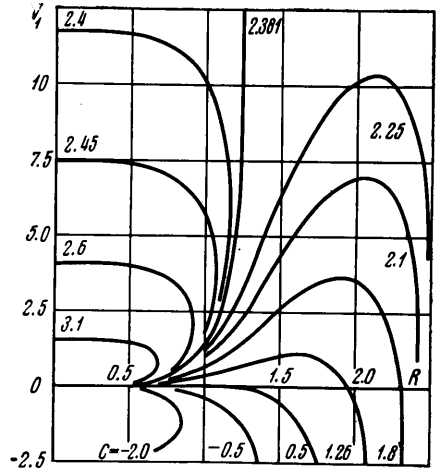
$$V_1 = \pi \int_0^s R^2 Z' dS$$

от абсциссы  $R$ .

Аналогичные результаты для интегральных кривых, отвечающих случаю положительных перегрузок гравитационного поля (фиг. 1) и случаю вращающейся невесомой жидкости (фиг. 3), приведены соответственно на фиг. 4, 5 и на фиг. 6, 7. Заметим, что на интегральных кривых задачи (6.2), (6.3) зависимости  $\beta(R)$  и  $V_1(R)$



Фиг. 6



Фиг. 7

при отрицательных значениях  $C$  могут быть построены с использованием соотношений  $\beta(-C, R) = -\beta(C, R)$ ,  $V_1(-C, R) = -V_1(C, R)$ , а при построении зависимости  $\beta(C, R)$  на интегральных кривых задачи (7.2), (7.3) можно воспользоваться формулой  $\sin \beta = CR/2 - R^3/4$ .

Поступила 17 VI 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. Устойчивость равновесных форм поверхности жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
2. Беляева М. А., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. В сб. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости». М., ВЦ АН СССР, 1968.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 1. М., Гостехиздат, 1951.
4. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Основы вариационного исчисления, т. 1, ч. 2. М., ОНТИ, 1935.
5. Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Об определении равновесного состояния капиллярной жидкости в сосуде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.
6. Беляева М. А., Мышкис А. Д., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых гравитационных полях. Равновесные формы поверхности жидкости. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
7. Слобожанин Л. А. Гидростатика в слабых силовых полях. Равновесные формы поверхности вращающейся жидкости в условиях невесомости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.