

**О РЕЖИМЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ  
ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТЕ**

**О. Э. ЦЫНКОВА**

(Москва)

В связи с применением циклического (периодического) метода заводнения нефтяных пластов [1, 2] рассматриваются эффекты, связанные с наличием существенной зависимости между проницаемостью нефтяного пласта и давлением жидкости [3, 4] и проявляющиеся в условиях режима вынужденных колебаний.

В [5] решена задача о стационарной фильтрации жидкости в двухслойном пласте в предположении функциональной связи между проницаемостью и давлением. С сохранением этого предположения рассматривается одномерная нестационарная задача фильтрации в однородном пласте и проводится в гидравлической постановке обобщение на случай двухслойного пласта.

1. Задачу формулируем в виде

$$(1.1) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (1 + \alpha p) \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} x=0, \quad p &= \sin \omega t; \quad x=1, \quad p=0 \\ t &= t_p \kappa l^{-2}, \quad \omega = \omega_p \kappa^{-1} l^2, \quad x = x_p l^{-1} \\ p &= p_p p_*^{-1}, \quad \kappa = k m^{-1} \mu^{-1} c^{-1} \end{aligned}$$

Здесь  $\omega_p$  — вынуждающая частота и  $p_*$  — амплитуда вынуждающего давления,  $l$  — длина пласта,  $k$  — масштаб проницаемости,  $m$  — пористость пласта,  $\mu$  — вязкость жидкости,  $c$  — коэффициент сжимаемости.

Проницаемость задана в форме  $k(1 + \alpha p)$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Начальные условия отсутствуют, поскольку рассматривается режим вынужденных колебаний.

Решение ищется в виде ряда Фурье

$$(1.3) \quad p = \sum_{k=0}^{\infty} p_{+k} \cos k\omega t + p_{-k} \sin k\omega t, \quad p_{+0} = p_{-0} = p_0$$

Здесь  $p_{\pm k}$  зависят от  $x$ .

Подставляя выражение (1.3) в (1.1) и собирая коэффициенты при последовательных гармониках, получим бесконечную систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций  $p_{\pm k}$

$$(1.4) \quad \frac{d^2 p_{\mp n}}{dx^2} \mp n \omega p_{\pm n} = -\alpha \frac{d^2}{dx^2} \left\{ p_0 p_{\mp n} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} p_{+j} p_{\mp(n-j)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} p_{+k} p_{\mp(k+n)} - p_{-k} p_{\pm(k+n)} \right\}$$

$$x=0, \quad p_{+1}=0, \quad p_{-1}=1, \quad p_{\pm k}=0 \quad (k \neq 1)$$

$$(1.5) \quad x=1, \quad p_{\pm k}=0 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

Первое из соотношений (1.4) с учетом (1.5) дает интеграл

$$(1.6) \quad p_0 = -\frac{\alpha}{4} \left( 2p_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{+k}^2 + p_{-k}^2 + x - 1 \right)$$

Считая коэффициент  $\alpha$  в (1.1) малым параметром, можно искать решение в виде ряда по степеням  $\alpha$

$$(1.7) \quad p_{\pm k} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n p_{\pm k}^{(n)} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

Подставляя (1.7) в (1.4), можно убедиться, что

$$(1.8) \quad p_{\pm k} = \alpha^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} p_{\pm k}^{(k-1+2n)} \alpha^{2n}$$

Для определения зависящих от  $x$  функций  $p_{\pm k}^{(n)}$  получим следующие системы рекуррентных соотношений:

$$(1.9) \quad \frac{d^2 p_{\mp 1}^{(0)}}{dx^2} \mp p_{\pm 1}^{(0)} = 0, \quad p_0^{(1)} = -\frac{1}{4} (x-1 + p_{-1}^{(0)2} + p_{+1}^{(0)2})$$

$$p_{-1}^{(0)} = 1, \quad p_{+1}^{(0)} = 0 \quad (x=0), \quad p_{\pm 1}^{(0)} = 0 \quad (x=1)$$

$$\frac{d^2 p_{-2}^{(1)}}{dx^2} - 2\omega p_{+2}^{(1)} = -\frac{d^2 p_{+1}^{(0)} p_{-1}^{(0)}}{dx^2}, \quad \frac{d^2 p_{+2}^{(1)}}{dx^2} = -\frac{1}{2} [p_{-1}^{(0)2} + p_{-1}^{(0)2}]$$

$$(1.10) \quad p_{\pm 2}^{(1)}(0) = p_{\pm 2}^{(1)}(1) = 0$$

$$(1.11) \quad \frac{d^2 p_{\mp 1}^{(2)}}{dx^2} \mp p_{\pm 1}^{(2)} = -\frac{d^2}{dx^2} \left[ p_0^{(1)} p_{\pm 1}^{(0)} + \frac{1}{2} (p_{+1}^{(0)} p_{\mp 2}^{(1)} \mp p_{-1}^{(0)} p_{\pm 2}^{(1)}) \right]$$

$$p_{\pm 1}^{(2)}(0) = p_{\pm 1}^{(2)}(1) = 0$$

$$(1.12) \quad \frac{d^2 p_{\mp 3}^{(2)}}{dx^2} \mp 3\omega p_{\pm 3}^{(2)} = -\frac{1}{2} [p_{+1}^{(0)} p_{\mp 2}^{(1)} + p_{-1}^{(0)} p_{\pm 2}^{(1)}]$$

$$p_{\pm 2}^{(3)}(0) = p_{\pm 2}^{(3)}(1) = 0$$

$$(1.13) \quad \frac{d^2 p_{\mp 2}^{(3)}}{dx^2} \mp 2\omega p_{\pm 2}^{(3)} = -\frac{d^2}{dx^2} [p_{+1}^{(0)} p_{\mp 1}^{(2)} + p_{-1}^{(0)} p_{\pm 1}^{(2)}]$$

$$p_{\pm 3}^{(2)}(0) = p_{\pm 3}^{(2)}(1) = 0$$

$$p_0^{(3)} = 4^{-1} [p_0^{(1)2} + 2(p_{-1}^{(0)} p_{-1}^{(2)} + p_{+1}^{(0)} p_{+1}^{(2)}) + p_{-2}^{(1)2} + p_{+2}^{(1)2}]$$

Продолжая указанный процесс, можно получить уравнения для коэффициентов при последующих степенях  $\alpha$ .

Основной итерационного процесса являются функции  $p_{\pm 1}^{(0)}$  — решение линейной однородной системы (1.9), которое приближенно определяет первую гармонику

$$\begin{aligned}
 p_{\pm 1}^{(0)} &= \delta^{-1} [\operatorname{ch} \xi (1-x) \sin \xi (1-x) \operatorname{sh} \xi \cos \xi - \\
 &\quad - \operatorname{sh} \xi (1-x) \cos \xi (1-x) \operatorname{ch} \xi \sin \xi ] \\
 (1.14) \quad \xi &= 2^{-1/2} \omega^{1/2}, \quad \delta = \operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \xi \\
 p_{-1}^{(0)} &= \delta^{-1} [\operatorname{sh} \xi (1-x) \cos \xi (1-x) \operatorname{sh} \xi \cos \xi + \\
 &\quad + \operatorname{ch} \xi (1-x) \sin \xi (1-x) \operatorname{ch} \xi \sin \xi ]
 \end{aligned}$$

Далее, решая систему (1.10), определим коэффициенты при первой степени  $\alpha$ , т. е. с точностью до членов порядка  $\alpha^3$  найдем нулевую и вторую гармоники

$$\begin{aligned}
 p_0^{(1)} &= 4^{-1} \{1-x - [\operatorname{ch} 2\xi (1-x) - \cos 2\xi (1-x)] (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\xi)^{-1}\} \\
 p_{\pm 2}^{(1)} &= A_{\pm} \operatorname{ch} \eta (1-x) \cos \eta (1-x) + B_{\pm} \operatorname{sh} \eta (1-x) \sin \eta (1-x) + \\
 &\quad + C_{\pm} \operatorname{ch} \eta (1-x) \sin \eta (1-x) + D_{\pm} \operatorname{sh} \eta (1-x) \cos \eta (1-x) + \\
 &\quad + E_{\pm} \operatorname{ch} 2\xi (1-x) + F_{\pm} \cos 2\xi (1-x) + G_{\pm} \operatorname{ch} 2\xi (1-x) \cos 2\xi (1-x) + \\
 &\quad + H_{\pm} \operatorname{sh} 2\xi (1-x) \sin 2\xi (1-x) \\
 (1.15) \quad \eta &= \omega^{1/2}, \quad A_+ = -\frac{\nu}{6\varphi}, \quad A_- = \frac{1}{2\varphi} - \frac{2}{3} \frac{\kappa}{\varphi^2}, \quad B_+ = \frac{1}{2\varphi} + \frac{\kappa}{3\varphi^2}, \quad B_- = -\frac{\nu}{3\varphi^2} \\
 E_{\pm} &= \frac{1}{4\varphi}, \quad F_{\pm} = \pm \frac{1}{4\varphi}, \quad G_+ = \frac{\nu}{6\varphi}, \quad G_- = \frac{2}{3} \frac{\kappa}{\varphi^2}, \\
 H_+ &= -\frac{\kappa}{6\varphi^2}, \quad H_- = \frac{2}{3} \frac{\nu}{\varphi}
 \end{aligned}$$

$$\varphi = \operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\xi, \quad \psi = \operatorname{ch} 2\xi + \cos 2\xi, \quad \kappa = \operatorname{sh} 2\xi \sin 2\xi, \quad \nu = 1 - \operatorname{ch} 2\xi \cos 2\xi$$

$$\begin{aligned}
 C_{\pm} &= \Delta^{-1} [A_{\pm} \cos \eta \sin \eta - B_{\pm} \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \eta - M_{\pm} \operatorname{ch} \eta \sin \eta - \\
 &\quad - N_{\pm} \operatorname{sh} \eta \cos \eta] \\
 D_{\pm} &= \Delta^{-1} [-A_{\pm} \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \eta + B_{\pm} \cos \eta \sin \eta - M_{\pm} \operatorname{sh} \eta \cos \eta + \\
 &\quad + N_{\pm} \operatorname{ch} \eta \sin \eta] \\
 M_+ &= \frac{1}{4} - \frac{\psi}{6\varphi}, \quad M_- = -\frac{\psi}{4\varphi} - \frac{2}{3} \frac{\kappa}{\varphi^2}, \quad N_+ = \frac{\psi}{4\varphi} - \frac{2}{3} \frac{\kappa}{\varphi^2} \\
 N_- &= -\frac{1}{4} + \frac{1-\nu-\varphi\psi}{3\varphi^2}, \quad \Delta = \operatorname{ch}^2 \eta - \cos^2 \eta
 \end{aligned}$$

С использованием (1.14) и (1.15) из (1.11), (1.12) можно найти  $p_{\pm 1}^{(2)}$  и  $p_{\pm 3}^{(2)}$ , т. е. коэффициенты при  $\alpha^2$  в формулах для первой и третьей гармоник. При этом в формуле для третьей гармоники член порядка  $\alpha^2$  будет главным. Затем из (1.13) определяются  $p_0^{(3)}$  и  $p_{\pm 2}^{(3)}$  — коэффициенты при  $\alpha^3$  в выражениях нулевой и второй гармоник и т. д.

Ограничиваясь величинами порядка  $\alpha$ , записываем искомое решение в виде

$$(1.16) \quad p = \alpha p_0^{(1)} + p_{+1}^{(0)} \cos \omega t + p_{-1}^{(0)} \sin \omega t + \alpha (p_{+2}^{(1)} \cos 2\omega t + p_{-2}^{(1)} \sin 2\omega t)$$

Формула (1.16) содержит не зависящий от времени отличный от нуля член  $\alpha p_0^{(1)}$ . Это значит, что в рассматриваемом случае нелинейной фильтрации среднее по времени цикла давление во всех внутренних точках пласта не равно нулю при нулевом среднем перепаде давления между линиями нагнетания и отбора.

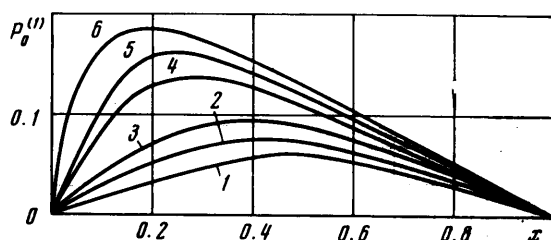
Осредняя (1.1) по времени цикла и используя (1.6), найдем среднюю за цикл скорость жидкости

$$v = \frac{p_* k}{4\mu} \alpha$$

Таким образом, при нулевом среднем перепаде давления между концами интервала получается отличный от нуля средний расход жидкости, пропорциональный фактору нелинейности.

Далее приводятся результаты расчетов нулевой, первой и второй гармоник по формулам (1.14), (1.15).

Расчеты для широкого диапазона вынуждающих частот провел на ЭВМ БЭСМ-6 С. А. Мыхтарянец.



Фиг. 1

На фиг. 1 показаны значения  $p_0^{(1)}(x)$  для  $\omega=0.5, 1, 2, 5, 10, 25$  (кривые 1–6 соответственно). Нулевая гармоника монотонно растет от нуля с ростом  $\omega$ . Предельное при  $\omega \rightarrow \infty$  ее значение равно  $4(1-x)^{-1}$ . Кривые  $p_0^{(1)}$  имеют максимумы по  $x$ , приближающиеся к левому концу интервала  $(0, 1)$  с ростом  $\omega$ . На концах интервала  $p_0^{(1)}(x)$  обращается в нуль.

На фиг. 2 и 3 даны результаты расчетов компонент амплитуд первой и второй гармоник для  $\omega=0.1$  и  $\omega=25$  соответственно. При этом кривые  $\pm 1$  отвечают функциям  $p_{\pm 1}^{(0)}$ , кривые  $\pm 2$  — функциям  $p_{\pm 2}^{(1)}$ .

Очевидно, в области очень малых частот, к которым относится  $\omega=0.1$ , решение практически не отличается от квазистационарного.

Функция  $p_{-1}^{(0)}$  изменяется по  $x$  почти линейно от 1 до 0, остальные компоненты давления очень близки к нулю.

В области больших частот, которую характеризует фиг. 3 с  $\omega=25$ , картина существенно другая. Изменение  $p_{-1}^{(0)}$  по  $x$  резко нелинейное, функции  $p_{+1}^{(0)}, p_{\pm 2}^{(1)}, p_0^{(1)}$  сравнимы по величине с главной компонентой  $p_{-1}^{(0)}$  во всем диапазоне изменения  $x$ , за исключением малой окрестности точки  $x=0$ . Расчетами показано, что частоты можно считать малыми вплоть до  $\omega=1$ .

2. Проведем некоторое обобщение полученных результатов на случай двухслойного пласта с существенной гидродинамической связью между слоями.

Предполагая, что мощность пласта много меньше его длины ( $hl^{-1} \ll 1$ ), рассмотрим квазиодномерную задачу.

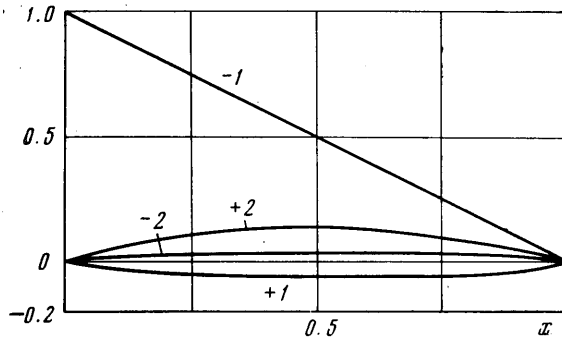
Уравнения Дарси и неразрывности в слоях записываются в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} v_i &= -\frac{k_i}{\mu}(1+\alpha_i p_i) \frac{\partial p_i}{\partial x} \\ h_i \frac{\partial v_i}{\partial x} &= h_i m c \frac{\partial p_i}{\partial t} + (-1)^i q \end{aligned} \quad (i=1,2)$$

где  $q$  — локальный переток между слоями.

Предположим, что проницаемости слоев — величины одного порядка и мощности также отличаются не слишком сильно.

Тогда, считая гидродинамическую связь между слоями полной (малопроницаемые пропластки — перемычки отсутствуют), естественно с учетом



Фиг. 2

$h_i l^{-1} \ll 1$  при умеренных вынуждающих частотах принять условие мгновенного выравнивания давлений между слоями  $p_1 = p_2 = p$ .

Система (2.1) сведется к уравнению (безразмерному)

$$(2.2) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (1 + \alpha p) \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \alpha = \frac{\alpha_1 k_1 h_1 + \alpha_2 k_2 h_2}{k_1 h_1 + k_2 h_2}$$

где в масштаб времени входит средняя по слоям проницаемость пласта

$$k = \frac{k_1 h_1 + k_2 h_2}{h_1 + h_2}$$

При  $x=0$  по-прежнему справедливо условие  $p = \sin \omega t$ , при  $x=1$   $p=0$ . Длины отнесены к длине пласта, давления — к амплитуде вынуждающего давления.

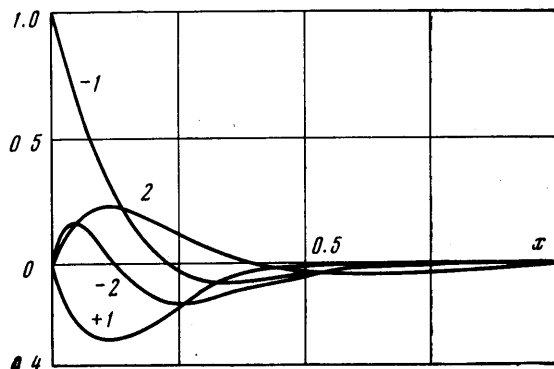
Решение уравнения (2.2) с принятыми граничными условиями дается формулами (1.14)–(1.16). Определим средние за время цикла скорости в слоях и средние за время цикла межслойные перетоки. Из формул (2.1), (1.14)–(1.16) можно получить средние за время цикла скорости жидкости в слоях

$$(2.3) \quad v_i = \frac{k_i p_*}{\mu l} \left[ \frac{\alpha}{4} - (\alpha - \alpha_i) \xi \frac{\text{sh } 2\xi(1-x) + \sin 2\xi(1-x)}{2(\text{ch } 2\xi - \cos 2\xi)} \right]$$

Для среднего суммарного расхода из (2.3) получается очевидное выражение

$$v_1 h_1 + v_2 h_2 = -\frac{h k p_* \alpha}{4 \mu l}$$

Формула (2.3) показывает, что для слоя, где  $\alpha_i < \alpha$ , стационарная компонента скорости растет по длине пласта, а для слоя, в котором  $\alpha_i > \alpha$ , эта скорость падает с увеличением  $x$ . Очевидно, происходит стационарное



Фиг. 3

перетекание жидкости из слоя с более сильной зависимостью проницаемости от давления в слой с менее сильной зависимостью.

Представим (2.3) в виде

$$(2.4) \quad v_i h_i = \frac{p * k h}{\mu l} \left[ \frac{k_i \alpha}{4} + (-1)^i (\alpha_2 - \alpha_1) k_1 k_2 \times \right. \\ \left. \times \frac{\text{sh } 2\xi(1-x) + \sin 2\xi(1-x)}{2(\text{ch } 2\xi - \cos 2\xi)} \right], \quad k_i = k_i h_i (k_1 h_1 + k_2 h_2)^{-1}$$

Из (2.4) дифференцированием по  $x$  получим локальные средние по времени межслойные перетоки из первого слоя во второй

$$(2.5) \quad q = 2p h \omega_p l (\alpha_1 - \alpha_2) k_1 k_2 \times [\text{ch } 2\xi(1-x) + \\ + \cos 2\xi(1-x)] (\text{ch } 2\xi - \cos 2\xi)^{-1}$$

Соотношение (2.5) показывает, что локальные перетоки монотонно падают по длине пласта.

Различие в значениях  $q$  при  $x=0$  и  $x=1$  несущественно для малых  $\xi$ . С ростом  $\xi$  эти различия возрастают и при неограниченном увеличении частоты распределение перетоков приобретает вид  $\delta$ -функции аргумента  $x$ . Таким образом, при больших частотах перетоки велики в области, прилегающей к линии нагнетания и несущественны в остальной части пласта.

Суммарный средний по времени переток из первого слоя во второй  $Q$  можно получить из (2.4) как разность между расходами жидкости в слое на входе и выходе

$$(2.6) \quad Q = \frac{p * (l h \omega_p m c k)^{1/2}}{2(2\mu)^{1/2}} (\alpha_1 - \alpha_2) k_1 k_2 \frac{\text{sh } 2\xi + \sin 2\xi}{\text{ch } 2\xi - \cos 2\xi}$$

Итак, на режиме пульсирующего нагнетания жидкость стационарно перетекает из слоя с большим фактором нелинейности в слой с меньшим значением этого фактора.

В предельных случаях малых и больших вынуждающих частот соотношение (2.6) дает

$$(2.7) \quad Q = \frac{p_k k h}{2\mu} k_1 k_2 (\alpha_1 - \alpha_2) \quad (\xi \ll 1)$$

$$Q = \frac{p_* l h}{2} \frac{(\omega_p m c k)^{1/2}}{(2\mu)^{1/2}} k_1 k_2 (\alpha_1 - \alpha_2) \quad (\xi \gg 1)$$

Формулы (2.7) показывают, что при малых вынуждающих частотах средний межслойный переток не зависит от вынуждающей частоты. При больших частотах средний межслойный переток растет пропорционально корню из частоты.

Приведем пример расчета средней характерной скорости межслойного перетока в случае больших частот.

Приняв  $\alpha_1 = 0.5$ ,  $\alpha_2 = 0.1$ ,  $m = 0.2$ ,  $\mu = 1$  *снз*,  $k = 0.4$  *дарси*,  $k_1 = 0.8$ ,  $k_2 = 0.2$ ,  $c = 10^{-4}$  *атм<sup>-1</sup>*,  $p_* = 50$  *атм*,  $l = 1000$  *м*,  $\omega_p = (5 \text{ час})^{-1}$  (соответственно  $\omega = 80$  и  $\xi = 6.3$ ), найдем из (2.7)  $Q(lh)^{-1} = 7.5$  *м/год*.

Полученная величина имеет порядок скорости продвижения жидкости в пласте при вытеснении нефти водой.

Поступила 30 VII 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Боксерман А. А., Шалимов Б. В. О циклическом воздействии на пласты с двойной пористостью при вытеснении нефти водой. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
2. Боксерман А. А., Шалимов Б. В. Эффективность циклического воздействия на слоисто-неоднородные пласты с непроницаемыми перемычками. В сб. «Теория и практика добычи нефти». М., «Недра», 1971.
3. Добрынин В. М. Физические свойства нефтегазовых коллекторов в глубоких скважинах. М., «Недра», 1965.
4. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М., «Недра», 1970.
5. Кац Р. М. Нелинейная установившаяся фильтрация жидкости в слоистом пласте. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.