

**ДИНАМИКА ПАРОВОЙ ПОЛОСТИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ
ПОСТУПАТЕЛЬНО**

Г. Н. КУЗНЕЦОВ, И. Е. ЩЕКИН

(Сухуми)

Большинство выполненных исследований динамики неустойчивой кавитационной полости основываются на предположении, что полость поступательно не перемещается. Подробные обзоры этих работ можно найти в монографиях [1, 2]. В данной работе учитывается связь и взаимное влияние радиального и поступательного движения полости в безграничной жидкости. Некоторые частные случаи рассматривались ранее в работах [3-7]. Наиболее полный анализ закономерностей взаимодействия радиального и поступательного движения в невязкой жидкости выполнен в работе [8]. Ниже рассматривается взаимодействие радиального и поступательного движения полости в процессе ее роста и захлопывания в вязкой несжимаемой жидкости. Вязкость жидкости в радиальном и поступательном движении учитывается, как и в [9], через обобщенные силы.

1. Рассмотрим идеализированную модель движения сферической полости в гидродинамическом поле обтекаемого жидкостью тела, размеры которого существенно превышают размеры полости. При движении полость изменяет свой размер и движется относительно окружающих ее частиц жидкости. Определим параметры радиального и поступательного движения полости под действием внешнего давления, полагая в качестве давления на бесконечности давление в жидкости на расстоянии, существенно превышающем размеры полости, но в пределах которого в каждый момент времени гидродинамическое давление изменяется незначительно.

Примем исходную систему уравнений в виде

$$(1.1) \quad R\dot{R} + \frac{3}{2}R^2 + 4 \frac{\mu\dot{R}}{\rho R} - \frac{1}{4}v^2 = \frac{P_\infty - P(R)}{\rho}$$

$$(1.2) \quad \frac{d}{dt} \left[\rho' V \bar{w} + \frac{1}{2} \rho V (\bar{w} - \bar{u}) \right] = -C_d \frac{\rho |\bar{v}| |\bar{v}|}{2} S - V \text{grad } P_\infty$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \bar{v} = \bar{w} - \bar{u}, \quad C_d = 0.4 + 12\mu(\rho R |v|)^{-1}, \quad S = \pi R^2$$

Здесь R — радиус полости; ρ' , ρ — плотность газа и пара в полости и плотность жидкости; \bar{v} , \bar{w} , \bar{u} — векторы скорости относительного движения полости в жидкости, абсолютной скорости полости и скорости жидкости; $P(R)$ — давление на границе полости; P_∞ — внешнее давление на достаточно большом расстоянии от полости, связанное с \bar{u} через уравнение Эйлера (в общем виде $P_\infty = P_0 + \rho g z + P(x, y, z)$); $\text{grad } P_\infty$ — градиент внешнего давления; C_d — коэффициент сопротивления поступательному движению полости, принятый как для жестких сфер; μ — динамический коэффициент вязкости; g — ускорение силы тяжести; $P_0 + \rho g z$ — гидростатическое давление; $P(x, y, z)$ — гидродинамическое давление вокруг обтекаемого тела.

В принятой системе уравнение (1.1) является модифицированным уравнением Рэлея, в которое введен член, учитывающий поступательное движение [5-8]. Второе уравнение определяет скорость относительного

поступательного движения полости в вязкой весомой жидкости, в которой внешнее давление P_∞ изменяется вдоль траектории движения [3].

При поступательном движении в жидкости полость растет в зоне разрежения $P_\infty' = P_0 + \rho g z - P(x, y, z) < 0$ и захлопывается в зоне избыточного давления $P_\infty'' = P_0 + \rho g z + P(x, y, z) > 0$. При этом определить $R(t)$ и $v(t)$ можно только численно. Для выполнения аналитического исследования в дальнейшем принимается, что $\rho' \ll \rho$, P_∞ — медленно и монотонно меняющаяся функция координат как в зоне разрежения гидродинамического поля, так и в зоне избыточного давления. Это позволяет в обеих зонах считать P_∞' , P_∞'' и $\text{grad } P_\infty'$, $\text{grad } P_\infty''$ различными, но приблизительно постоянными величинами как во время роста, так и во время схлопывания кавитационной полости.

Будем считать, что полость движется вдоль оси z , поверхностное натяжение $\sigma = 0$, а давление $P(R)$ равно насыщающему давлению паров P_d . При этих допущениях запишем уравнения (1.1) и (1.2) в виде

$$(1.3) \quad \dot{R} = \pm \left[\sqrt[2]{\frac{1}{3}(P_\infty - P_d)(\alpha - 1)\rho^{-1} - 8\mu\rho^{-1}R^{-3} \int_{R_0}^R \dot{R} R dR + \frac{1}{2}R^{-3} \int_{R_0}^R R^2 v^2 dR} \right]^{1/2}$$

$$(1.4) \quad \frac{dv}{dR} + (3/R + 9v/\dot{R}R^2)v = -\frac{0.3v^2}{\dot{R}R} + k/\dot{R}$$

$$k = -2(\text{grad}_z P_\infty)\rho^{-1}$$

где $\alpha = (R_0/R)^3$, R_0 — начальный радиус полости, $k = k_1 = -2(\text{grad}_z P_\infty')\rho^{-1}$ в зоне разрежения, $k = k_2 = -2(\text{grad}_z P_\infty'')\rho^{-1}$ — в зоне избыточного давления. Знак плюс в (1.3) соответствует расширению полости, минус — ее сжатию.

2. Рассмотрим поступательное движение и рост кавитационной полости в поле растягивающего напряжения $Z_0 = P_d - P_\infty'$ при $k_1 = \text{const}$. Поступательное движение при известной зависимости $\dot{R}(R)$ определяется нелинейным уравнением Риккати (1.4), которое аналитически не интегрируется. Его приближенное решение может быть найдено в двух частных случаях.

1°. Рост полости происходит достаточно медленно, так что скорость поступательного движения успевает прийти в соответствие с величиной градиента давления. Тогда при решении задачи по схеме Болотина [1] $v(R)$ может быть найдено из стационаризованного в окрестности максимального радиуса R_+ уравнения (1.4) при $dv/dR = 0$. При этом (1.4) обращается в квадратное алгебраическое уравнение относительно v , (1.3) — в интегрируемое дифференциальное уравнение относительно R при известной зависимости $v(R)$.

2°. Полость растет быстро. При больших ее размерах для определения $v(R)$ в (1.4) можно положить $C_d = 0$. Решая (1.4) при не равных нулю k_1 , dv/dR , R , можно получить для произвольного $R \geq R_0$ и $v_0 \neq 0$ формулу

$$(2.1) \quad v = v_0 \alpha - \sqrt{6k_1 R_0 \alpha [\rho(1 - \alpha) Z_0^{-1}]^{1/2}}$$

При выводе (2.1) сначала производная \dot{R} определялась из (1.3) без учета v по формуле

$$(2.2) \quad \dot{R} = [2/3 Z_0 \rho^{-1} (1 - \alpha)]^{1/2}$$

Далее (2.2) подставлялось в (1.4) и выполнялось интегрирование с применением неполной бэта-функции и сходящегося гипергеометрического ряда. Решение для v в (2.1) получено с точностью до первого члена ряда. Подставляя (2.1) в (1.3) и выполняя интегрирование (1.3) с учетом

v , получим выражение для скорости расширения паровой полости радиусом R_0 в градиентном поле при $v_0 \neq 0$, $k_1 \neq 0$

$$(2.3) \quad \dot{R}^2 = {}^2/3 Z_0 (1-\alpha) \rho^{-1} + {}^1/6 v_0^2 \alpha (1-\alpha) - \frac{2\sqrt{6}}{9} v_0 k_1 R_0 (\rho/Z_0)^{1/2} \times \\ \times \alpha (1-\alpha)^{3/2} + {}^1/2 \rho k_1^2 R_0^2 \alpha Z_0^{-1} (1-\alpha)^2$$

С точностью до членов порядка α при $v_0 = 0$, $k_1 \neq 0$ из уравнения (2.3) находим выражение для радиуса R_* , при котором \dot{R} максимальна, и величину максимальной скорости \dot{R}_* .

$$(2.4) \quad R_* = R_0 ({}^1/4 - {}^1/3 Z_0^2 \rho^{-2} R_0^{-2} k_1^{-2})^{-1/2} \\ \dot{R}_* = [{}^2/3 Z_0 \rho^{-1} ({}^3/4 + {}^1/3 Z_0^2 \rho^{-2} R_0^{-2} k_1^{-2}) + \\ + {}^1/16 \rho k_1^2 R_0^2 Z_0^{-1} (1 - {}^16/9 Z_0^4 \rho^{-4} k_1^{-4} R_0^{-4})]^{1/2}$$

В другом частном случае ($v_0 \neq 0$, $k_1 = 0$) выражения для R_* и \dot{R}_* также могут быть найдены

$$(2.5) \quad R_* = R_0 ({}^1/2 - 2Z_0 \rho^{-1} v_0^{-2})^{-1/2}, \quad \dot{R}_* = v_0 / \sqrt{6} ({}^1/2 + 2Z_0 \rho^{-1} v_0^{-2})$$

Из рассмотрения выражений (2.4) и (2.5) видно, что первые формулы соответственно при $k_1 \leq 2Z_0 / \sqrt{3} \rho R_0$ и $v_0 \leq 2(Z_0 \rho^{-1})^{1/2}$ не имеют физического смысла, т. е. экстремального значения \dot{R} не существует и скорость расширения монотонно возрастает по мере роста полости.

В случае, если k_1 и v_0 превышают указанные величины, \dot{R}_* выражается (2.4) и (2.5). Следует отметить, что для неподвижной паровой полости экстремум \dot{R} отсутствует. Таким образом, параметры движения растущей полости в градиентном поле давления определены.

3. Рассмотрим более подробно сжатие кавитационной полости радиуса R_0 , движущейся в начальный момент со скоростью v_0 в поле постоянного избыточного давления $P_0' = P_\infty'' - P_d$ (v_0 — скорость, приобретенная полостью в зоне разрежения). Поскольку захлопывание полости происходит достаточно быстро, то в (1.4) определяющими будут инерционные и вязкостные члены, а градиентом давления можно пренебречь ($k_2 = 0$). В этом случае (1.4) переходит в уравнение Бернулли и может быть проинтегрировано относительно v .

С использованием неполной бэта-функции и гипергеометрического ряда решение (1.4) с точностью до первого члена ряда можно записать

$$(3.1) \quad v = v_0 \alpha A \{1 + 0.2 v_0 A [{}^3/2 \rho / P_0' (\alpha - 1)]^{1/2}\}^{-1}, \\ A = \exp \{-9 v R_0^{-1} [3 \rho / 2 P_0' (1 - \alpha^{-1})]^{1/2}\}$$

Подставляя (3.1) в (1.3), получим уравнение, определяющее скорость захлопывания паровой полости, движущейся поступательно

$$(3.2) \quad \dot{R}^2 = {}^2/3 P_0' \rho^{-1} (\alpha - 1) + {}^1/2 v_0^2 R^{-3} \times \\ \times \int_{R_0}^R R^2 \alpha^2 A^2 \{1 + 0.2 v_0 A [3 \rho / 2 P_0' (\alpha - 1)]^{1/2}\}^{-2} dR$$

Для определения экстремальных значений R и \dot{R} проанализируем (3.2) в двух случаях.

1. Пусть $Re=2Rv/v < 1$

$$(3.3) \quad \dot{R}^2 = 2P_0'/3\rho(\alpha-1)^{+1/2}v_0^2\alpha R_0^3 \int_{R_0}^R A^2 R^{-4} dR$$

При $R < R_0$ можно принять $A = \exp[-9vR_0^{-1}(3\rho/2P_0')^{1/2}]$, тогда

$$(3.4) \quad \dot{R} = -[(\alpha-1)(2P_0'/3\rho^{-1/6}A^2v_0^2\alpha)]^{1/2}$$

В отличие от рэлеевской полости паровая полость, движущаяся поступательно, не захлопывается полностью и ее \dot{R} не обращается в бесконечность. Полагая в (3.4) $\dot{R}=0$, находим значение минимального радиуса, до которого сомкнется полость при первом схлопывании

$$(3.5) \quad R_- = R_0 A^{2/3} (4P_0'/\rho v_0^2)^{-1/3}$$

Подстановка (3.5) в (3.1) позволяет получить максимальное значение v .

$$(3.6) \quad v_* = 4P_0' \{ \rho v_0 A [1 + 0.2(6^{-3/2}\rho v_0^2 A^2/P_0')^{1/2}] \}^{-1}$$

Дифференцируя по времени равенство (3.4) и полагая $\dot{R}=0$, получим

$$(3.7) \quad \dot{R}_* = -^{1/2}\sqrt{6}v_0 A (4P_0'\rho^{-1}v_0^{-2}A^{-2}-1)$$

Точке перегиба зависимости $R(t)$, в которой $\dot{R}=\dot{R}_*$, соответствует

$$(3.8) \quad R_* = R_0 (^{1/2} + 2P_0'\rho^{-1}v_0^{-2}A^{-2})^{-1/3}$$

Используя зависимость (3.4), можно найти время, за которое пузырек достигает минимального размера при первом схлопывании

$$(3.9) \quad \theta_* = \int_{R_-}^{R_0} [(\alpha-1)(2P_0'/3\rho^{-1/6}v_0^2A^2\alpha)]^{-1/2} dR$$

Интеграл (3.9) является неполным эллиптическим интегралом и может быть приближенно вычислен через гамма-функции [8].

2. Пусть $Re \gg 1$. Полагая в (3.2) $A=1$, запишем

$$(3.10) \quad \dot{R}^2 = 2P_0'/3\rho(\alpha-1)^{+1/2}v_0^2\alpha R_0^3 \int_{R_0}^R R^{-4} [1 + 0.2v_0\alpha^{1/2}(3\rho/2P_0')^{1/2}]^{-2} dR$$

Учитывая, что в фазе сжатия $R_0 \gg R$, получим

$$(3.11) \quad \dot{R} = - \left[2P_0'/3\rho(\alpha-1)^{+1/2}v_0^2\alpha R_0^3 \left(\frac{L-K}{BLK} - \frac{1}{B^2} \ln \frac{K\alpha^{1/2}}{L} \right) \right]^{1/2}$$

$$K = R\sqrt{R} + B, \quad L = R_0\sqrt{R_0} + B, \quad B = 0.2v_0R^{3/2}(2P_0'/3\rho)^{-1/2}$$

Из (3.1) и (3.11) величины R_- , R_* , \dot{R}_* , v_* могут быть определены только численно.

Формулы, полученные выше, при $A=1$, $B=0$ определяют параметры движения паровой полости, движущейся поступательно в вязкой жидкости. При $v_0=0$, $k_2=0$ они тождественно переходят в выражения для неподвижной полости.

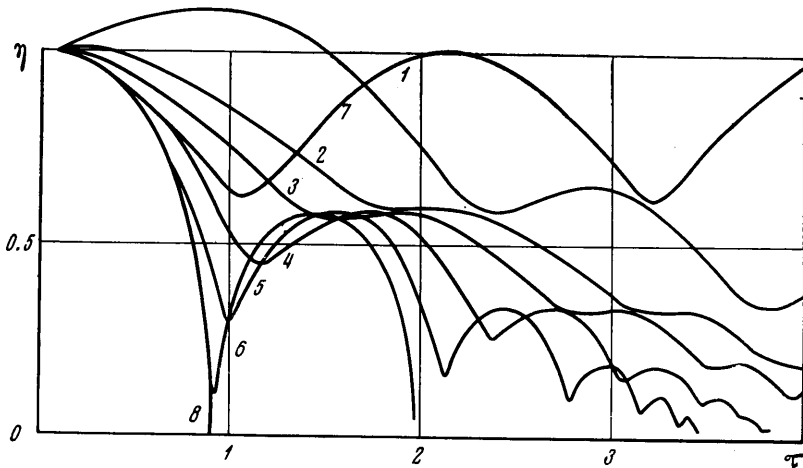
4. Для численного интегрирования система уравнений (1.1), (1.2) при принятых упрощениях была приведена к безразмерному виду

$$(4.1) \quad \ddot{\eta} + \frac{3}{2} \frac{\dot{\eta}^2}{\eta} + 4 \frac{M}{\eta^2} \dot{\eta} - \frac{\beta^2}{4\eta} + \frac{1}{\eta} = 0$$

$$(4.2) \quad \ddot{\beta} + \left(3 \frac{\dot{\eta}}{\eta} + \frac{9M}{\eta^2} \right) \dot{\beta} + \frac{0.3}{\eta} \beta^2 + 2\kappa = 0$$

Численное интегрирование системы уравнений (4.1), (4.2) и исследование решений при $\kappa=0$, $\beta_0 \neq 0$ показало, что в зависимости от величин M и β_0 имеется четыре типа кривых $\eta(\tau)$ и $\beta(\tau)$.

При $M \geq 0.08$, $\beta_0 = 1$ поступательная скорость очень быстро гасится, радиус полости асимптотически приближается к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Экст-



Фиг. 1

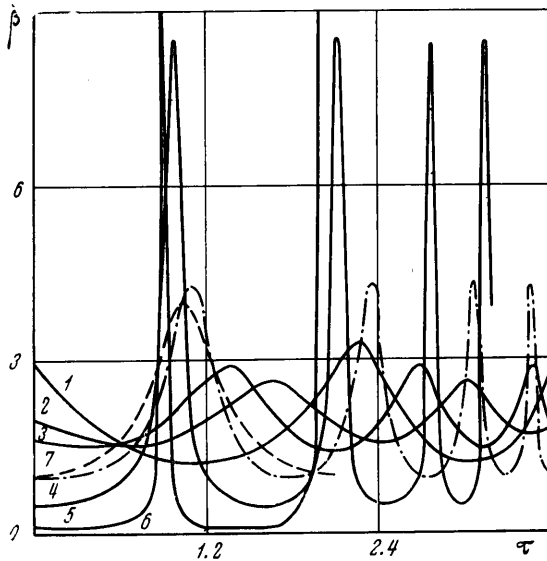
ремальные значения η - и β . Критическое значение M , при превышении которого отсутствует кумуляция энергии, зависит от величины β_0 . При увеличении β_0 это значение M уменьшается от 0.12, соответствующего $\beta_0=0$, до 0 при $\beta_0=2$.

При $10^{-3} < M < 8 \cdot 10^{-2}$, $\beta_0 = 1$ радиус полости пульсирует во времени, уменьшаясь в среднем по мере диссипации кинетической энергии поступательного движения. При достаточно малом η колебательное движение вырождается в аperiodическое. При этом η асимптотически стремится к нулю после точки перегиба η^* .

При $M < 10^{-3}$ пульсация радиуса полости в течение многих периодов от величины M практически не зависит, так как ее поступательное движение осуществляется при $Re \gg 1$ и коэффициенте сопротивления $C_d = 0.4$. В этом случае функции $\eta(\tau)$ и $\beta(\tau)$ полностью определяются величиной β_0 . Типичные зависимости $\eta(\tau)$ и $\beta(\tau)$ при $M = 10^{-3}$ приведены на фиг. 1, 2. Расчеты выполнялись методом Рунге — Кутты для $R_0 = 10^{-2}$ см, $\mu = 10^{-2}$ г/см·сек, $P_0' = 10^6$ дин/см², $k_2 = 0$. Кривые 1–6 на фиг. 1, 2 соответствуют значениям $v_0 = 3 \cdot 10^3, 2 \cdot 10^3, 1.6 \cdot 10^3, 10^3, 5 \cdot 10^2, 10^2$ см/сек ($\beta_0 = 3.2, 1.6, 1.0, 0.5, 0.1$). Кривые 7 получены при $v_0 = 10^3$ см/сек, $C_d = 0$, т. е. для невязкой жидкости. Кривая 8 на фиг. 1 является зависимостью $\eta(\tau)$ при $\beta_0 = 0$ (рэлеевская полость). Эти зависимости при заданных β_0

оказываются такими же, если β_0 изменяется вследствие вариации P_0' или ρ при $v_0 = \text{const}$ при условии, что параметр $M < 10^{-3}$.

Характерно, что при $\beta_0 > 2$ полость, стремясь к статическому равновесию, вначале растет. Средний размер ее начинает уменьшаться лишь после достаточной диссипации энергии. При $\mu = 0$, $C_d = 0$, $\beta_0 = 2$ полость перемещается поступательно, не изменяя своего размера. При $\mu = 0$, $C_d = 0$, $\beta_0 \leq 2$ полость нелинейно пульсирует вокруг равновесного радиуса



Фиг. 2

R_0' с периодом T , которые при заданных v_0 , P_0' , R_0 равны

$$(4.3) \quad R_0' = R_0 (2/v_0)^{-1/2} (P_0'/\rho)^{-1/2}$$

$$(4.4) \quad T = \frac{2\pi R_0}{\sqrt{6}} (\rho/P_0')^{2/3} (v_0/2)^{1/2}$$

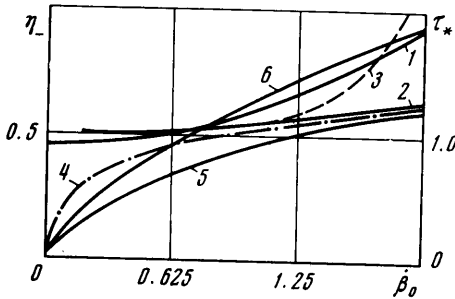
Следует отметить, что выражение (4.4) получено в предположении линейных пульсаций. При нелинейных пульсациях оно выполняется приближенно.

Из рассмотрения кривых 1–6 на фиг. 1, 2 можно отметить, что все i -е пульсации η и β для заданных β_0 подобны между собой. Это приводит к тому, что значения η и β не зависят от того, при какой по счету i -й пульсации они получены. Видно также, что с уменьшением величины β_0 существенно уменьшается значение минимального радиуса η_- , что приводит к значительному росту β_+ . В частности, при $\beta_0 = 0.1$ (фиг. 2, кривая 6) максимальные значения $\beta_+ = 42$. Данный вывод хорошо согласуется с (3.5), (3.6).

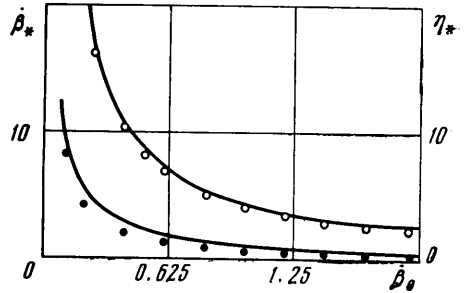
Значения $i - x\eta_+$ для различных v_0 равны (фиг. 1). Скорости поступательного движения полости в момент, соответствующий η_+ , практически равны начальной. Следовательно, соотношение между количествами движения полостей с равными R_0 , движущихся поступательно с различными v_0 , не изменяются в процессе пульсации полостей.

На фиг. 3 приведено семейство зависимостей времени схлопывания полости $\tau_* = \theta \cdot R_0^{-1} (P_0'/\rho)^{1/2}$ при $1 \geq \eta \geq \eta_-$, а также зависимости η_- от β_0 .

Вычисления выполнены при $R_0 = 10^{-2}$ см, $\mu = 10^{-2}$ г/см·сек, $\rho = 1$ г/см³, $P_0' = 10^6$ дин/см², т. е. при $M = 10^{-3}$. Кривые 1 и 2 являются зависимостями $\tau_*(\beta_0)$, полученными интегрированием системы уравнений (4.1), (4.2). Однако в первом случае μ и C_a не равны нулю, во втором — вязкостные члены равны нулю. Характерно, что значения τ_* , определенные по (3.9) при $A=1$, точно совпали с кривой 2.



Фиг. 3



Фиг. 4

Значения τ_* при малых β_0 удобно определять по формуле Рэля, предполагая, что схлопывание происходит при постоянном давлении, равном $P_0' - \rho v_0^2/4$ (кривая 3)

$$(4.5) \quad \tau_* = 0.915 (P_0'/\rho)^{1/2} \left(\frac{4\rho}{4P_0' - \rho v_0^2} \right)^{1/2}$$

Время, определенное по (4.5), совпадает с кривыми 1, 2, при малых β_0 , поскольку сжатие полости в окрестности η_- происходит достаточно быстро, а в окрестности η_+ член $\alpha v_0 \approx v_0$ и можно считать, что схлопывание действительно происходит при постоянном давлении. При медленном схлопывании полости ($\beta_0 > 1,6$) расхождение с кривой 2 становится большим, поскольку по (4.5) приближенно определяется время схлопывания до $\eta = 0$, в то время как в действительности $\eta_- > 0$.

При больших β_0 член $v_0^2/4 \approx P_0'/\rho$ и пульсации полости $\eta(\tau)$ сравнительно невелики, близки к линейным. По этой причине кривая 4, на которой приведена зависимость от β_0 половины периода, определенного по (4.4), хорошо согласуется с кривой 2 при больших β_0 . Кривая 5 получена интегрированием системы (4.1), (4.2) и иллюстрирует зависимость $\eta_-(\beta_0)$ при $\mu \neq 0$, $C_a = 0.4 + 24/Re$. Кривая 6 получена по (3.5). В целом согласие численных и аналитических значений η_- и τ_* можно признать удовлетворительным.

На фиг. 4 при $M = 10^{-3}$ приведены зависимости от β_0 значений $\dot{\eta}_*$ (кривая 1) и $\dot{\beta}_*$ (кривая 2). Все кривые получены интегрированием системы (4.1), (4.2) с учетом вязкостных членов. Кружочками и точками обозначены значения β_* и η_* , полученные по (3.6), (3.7). Поскольку расчеты выполнены при малом M , то эти значения совпадают с β_* и η_* для идеальной жидкости. Интересно отметить, что $\beta_* > \eta_*$, причем отношение $|\beta_*/\eta_*|$ растет с увеличением β_* . Для идеальной жидкости

$$(4.6) \quad \varepsilon = |\beta_*/\eta_*| = 2\sqrt{6} / (1 - 1/4\beta_0^2)$$

Это соотношение хорошо согласуется с данными на фиг. 4, в частности $\varepsilon \rightarrow \infty$ при $\beta_0 \rightarrow 2$. Тот факт, что значения β_* могут существенно превышать

η^* , позволяет сделать вывод о необходимости учета поступательного движения захлопывающихся полостей в задачах об излучении кавитационного шума и о кавитационной эрозии. Динамика кавитационных полостей должна описываться системой уравнений, учитывающей взаимодействие радиального и поступательного движений.

При малых значениях безразмерной вязкости M в уравнениях движения можно полагать $\mu=0$. Движение в этом случае будет определяться начальной скоростью β . При $M \geq 0.1$ вязкость нужно учитывать. Кинетическая энергия поступательного движения захлопывающейся полости при малых η может существенно превышать поверхностную энергию, вследствие чего при движении полость должна деформироваться. Поэтому аналогичное исследование целесообразно выполнять с учетом деформации полости и кумулятивных эффектов.

Поступила 1 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Перник А. Д. Проблемы кавитации. Л., «Судостроение», 1966.
2. Флинн Г. Физика акустической кавитации в жидкостях. В сб. «Физическая акустика». Методы и приборы ультразвуковых исследований, ч. Б. М., «Мир», 1967.
3. Ильичев В. И., Канзеба А. А., Кузнецов Г. Н., Листров А. Т. Движение газового пузырька в гидродинамическом поле обтекаемого тела. Тр. Акуст. ин-та, 1969, вып. 6.
4. Левковский Ю. Л., Судакова Г. Г. Влияние твердой стенки на замыкание сферической кавитационной каверны. Инж.-физ. ж., 1968, т. 15, вып. 2.
5. Hsu-Chieh Yeh, Wen-Jei Yang. Dynamics of bubbles moving in Liquids with pressure gradient. J. Appl. Phys., 1968, vol. 39, No. 7.
6. Hsu-Chieh Yeh, Wen-Jei Yang. Dynamics of a gas bubble moving in an inviscid liquid subjected to a sudden pressure change. J. Appl. Phys., 1969, vol. 40, No. 4.
7. Кузнецов Г. Н., Щекин И. Е. Взаимодействие пульсирующих пузырьков в вязкой жидкости. Акуст. ж., 1972, т. 18, вып. 4.
8. Воинов О. В., Петров А. Г. Движение сферы переменного объема в идеальной жидкости около плоской поверхности. Изв. АН СССР, МЖТ, 1971, № 5.
9. Головин А. М., Петров А. Г. О движении двух пузырей в жидкости малой вязкости. ПМТФ, 1968, № 3.