**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1974**

УДК 532.529

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОЯ ЖИДКОСТИ ПРИ БАРБОТАЖЕ

М. К. ЛИХТ, В. А. ШТЕЙНБЕРГ

(*Харьков*)

Рассматривается новый тип неустойчивости горизонтального слоя неподвижной жидкости, вызванной движением через нее пузырей газа или частиц взвеси. Показано, что при достижении некоторого критического расхода газа (или взвеси) слой существенной неоднородности скорости пузырей газа становится неустойчивым и возникающим конвективным течением разбивается на ячейки Бенара. При движении пузырей (или взвеси) в поле силы тяжести критерий неустойчивости оказывается не зависящим от высоты слоя и существенно зависящим от размера пузыря и кинематической вязкости жидкости.

1. Теоретически исследованы многочисленные случаи конвективной неустойчивости слоя жидкости [1]. В них неустойчивость обусловлена градиентами термодинамических параметров, зависимостью характеристик жидкости от этих параметров и силовым полем.

Принципиально другим типом конвективной неустойчивости является неустойчивость горизонтального слоя покоящейся жидкости, через которую барботируют пузыри газа, взаимодействующие с ней в соответствии с законом Стокса. Общим со случаем тепловой неустойчивости является исходное равновесное состояние и возникающее стационарное движение, разделяющее слой жидкости на вертикальные ячейки.

Однако причины возникновения неустойчивости здесь совершенно иные. Во-первых, причиной неустойчивости является неравномерность распределения плотности «пористой» жидкости по высоте, которая вызывается наличием градиента скорости подъема пузырей ($dW_0/dz\neq0$), во-вторых, неравномерность силы воздействия пузырей на жидкость по высоте. Эти факторы вызывают стационарное конвективное движение, препятствуют которому сжимаемость и диссипация. В данном случае, как и вообще при рассмотрении конвективной неустойчивости [2], изучается влияние одного из этих двух факторов на условия возникновения конвекции, что приводит к двум независимым критериям Рэлея и Шварцшильда.

В предельном случае при достаточно больших высотах слоя и пренебрежении вязкостью можно показать, что при некотором градиенте скорости подъема пузырей газа возникает неустойчивость пористой жидкости. Действительно, в простейшем случае, когда вторая причина возникновения неустойчивости несущественна, плотность пористой жидкости является функцией газосодержания $\rho(\varphi)$, которое при постоянном расходе газа обратно пропорционально скорости пузыря газа W_0. Тогда при $dW_0/dz\neq0$ из-за зависимости $\varphi_0(z)$ плотность пористой жидкости неравномерна по высоте. Предельное значение градиента скорости, при котором возникает неустойчивость, можно получить аналогично адиабатическому градиенту (критерию Шварцшильда) [3]

$$\left(\frac{dW_0}{dz}\right)^*=\frac{W_0}{\varphi_0}\frac{g\beta_\varphi}{(\partial S/\partial\varphi)_p},\qquad \beta_\varphi=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_\varphi$$

Следовательно, при градиентах скорости подъема пузыря, больших критического значения, должна возникнуть конвекция.

В другом предельном случае применяется приближение несжимаемой жидкости, аналогичное приближению Буссинеска [4], т. е. остаются как основные члены с $(\partial\rho/\partial\varphi)_p$, так как в уравнении Навье – Стокса этот член описывает движущую силу – силу Архимеда. Такое рассмотрение возможно, если характерный размер системы не слишком велик, так что изменение плотности с высотой несущественно.

Следует отметить, что этот механизм неустойчивости является весьма общим и проявляется не только при барботаже газа, но и при движении капель жидкости через газ, твердых частиц через газ, твердых частиц через газ или жидкость в дисперсных потоках в различных силовых полях. При этом для возникновения неустойчивости необходимо наличие градиента скорости примеси, отличного от нуля и критического расхода.

Интересные эксперименты, подтверждающие изложенную точку зрения на механизм конвективной неустойчивости, приводящей к образованию ячеистой структуры, описаны в [5]. Автор этой работы наблюдал образование ячеек в слое тумана в условиях, когда газ охлаждается снизу и нагревается сверху и при отсутствии градиента температуры. Опыты проводились с туманом и дымом. Слой тумана через 2 *сек* распадался на ячейки. Размер ячеек зависел от высоты слоя расширения: чем выше слой, тем выше ячейка. При малом давлении (порядка нескольких *мм* рт. ст.) ячейки исчезают; однородный туман оседает за 1–2 *сек* без образования ячеек. Интересно, что образование ячеистой структуры наблюдается в слое дыма или тумана в естественных условиях. Автор [5] приходит к выводу, что ячеистая структура образуется после появления однородного тумана в результате падения капель в поле тяжести.

2. Не уменьшая общности, дальнейшее исследование и выбор уравнений проведем для случая барботажа газа через жидкость при стационарной подаче на нижнюю границу. Однако полученные результаты пригодны и для исследования устойчивости движения капелек жидкости в жидкости или в газе, а также твердых частиц в газе и в жидкости.

В дальнейшем полагаем, что движение пористой жидкости описывается уравнением Навье — Стокса с учетом силы Стокса — результат увлечения жидкости барботирующими пузырями. Полная система уравнений, описывающих движение пористой жидкости и пузырей, имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+(\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U}=-\frac{\nabla p}{\rho_1(1-\varphi)}+\nu_1\Delta\mathbf{U}+\mathbf{g}+\frac{C\varphi}{\rho_1(1-\varphi)}(\mathbf{W}-\mathbf{U}) \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{U}=0,\qquad \partial\varphi/\partial t+\operatorname{div}\varphi\mathbf{W}=0,\qquad C\equiv 12\nu_1\rho_1/d^2$$

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt}=-\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_2}\mathbf{g}-\frac{C}{\rho_2}(\mathbf{W}-\mathbf{U}),\qquad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{W}\nabla)$$

Здесь ρ_1, ρ_2 — плотности жидкости и газа соответственно; ν_1 — коэффициент сдвиговой вязкости жидкости, φ — относительное объемное газосодержание, U – скорость движения жидкости, $\mathbf{W}$ — скорость движения пузыря газа, p — давление, d — диаметр пузыря газа, индексы 1 и 2 относятся к жидкости и газу соответственно. Плотность пористой жидкости принята $\rho_1(1-\varphi)$.

Линеаризуем около состояния $\mathbf{U}=0$ полученную систему уравнений (2.1) по малым возмущениям φ', ρ', $\mathbf{W}'$, связанным с возникновением конвекции ($\mathbf{U}\neq0$). При линеаризации уравнения Навье — Стокса в (2.1) следует учесть

$$\rho'=-\rho_1\varphi' \tag{2.2}$$

$$\frac{\nabla p}{\rho_1(1-\varphi)}=-g\gamma+\frac{C\varphi_0W_0}{\rho_1(1-\varphi_0)}\gamma+\frac{\nabla p'}{\rho_1(1-\varphi_0)}+\left[\frac{C\varphi_0W_0}{\rho_1(1-\varphi_0)}-g\right]\frac{\varphi'}{1-\varphi_0}\gamma \tag{2.3}$$

$$\frac{\varphi}{1-\varphi}(\mathbf{W}-\mathbf{U})=\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}\gamma+\frac{W_0\varphi'}{(1-\varphi_0)^2}\gamma+\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}(\mathbf{W}'-\mathbf{U})$$

$$\partial\varphi_0/\partial t+\operatorname{div}(\varphi_0\mathbf{W}_0)=0 \tag{2.4}$$

т. е. имеет место постоянный расход газа по высоте (нулевой индекс относится к состоянию равновесия).

Подставляя (2.2) – (2.4) в (2.1), получаем окончательно систему уравнений, описывающий конвекцию пористой жидкости, вызванную барботирующими через нее пузырями, в приближении несжимаемых компонент

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{dt}=-\frac{\nabla p'}{\rho_1(1-\varphi_0)}+\frac{g\varphi'}{1-\varphi_0}\gamma+\nu_1\Delta\mathbf{U}+ \tag{2.5}$$
$$+\frac{CW_0\varphi'}{\rho_1(1-\varphi_0)}\gamma+\frac{C\varphi_0}{\rho_1(1-\varphi_0)}(\mathbf{W}'-\mathbf{U})$$
$$\operatorname{div}\mathbf{U}=0,\quad \frac{\partial\varphi'}{\partial t}+\operatorname{div}(\varphi'\mathbf{W}_0+\varphi_0\mathbf{W}')=0,\quad \frac{\partial \mathbf{W}'}{\partial t}+(\mathbf{W}'\nabla)\mathbf{W}_0+$$
$$+(\mathbf{W}_0\nabla)\mathbf{W}'=-\frac{C}{\rho_2}(\mathbf{W}'-\mathbf{U})$$

Система линейных нестационарных уравнений (2.5) имеет решения, зависящие от времени как $\exp(-i\omega t)$. Предполагаем, что для (2.5) выполняется «принцип изменения устойчивости», т. е. возникающее движение стационарно. Математически этот принцип сводится к тому, что условием неустойчивости является не $\operatorname{Im}\omega=0$, а $\omega=0$, т. е. производные по времени в (2.5) можно опускать. Тогда (2.5) значительно упрощается и после обезразмеривания приводится к виду

$$\nabla p'=G\varphi'\gamma+\nu_1(1-\varphi_0)\Delta\mathbf{U}+\frac{Cl^2}{\rho_1\nu_1}\varphi_0(\mathbf{W}'-\mathbf{U})+\frac{Cl^3W_0\varphi_0}{\rho_1\nu_1^2}\varphi'\gamma \tag{2.6}$$
$$\operatorname{div}\left(\frac{\varphi_0W_0l}{\nu_1}\varphi'\gamma+\varphi_0\mathbf{W}'\right)=0,\qquad (\mathbf{W}'\nabla)\mathbf{W}_0+(\mathbf{W}_0\nabla)\mathbf{W}'=$$
$$=-\frac{Cl}{\rho_2}(\mathbf{W}'-\mathbf{U}),\qquad G\equiv\frac{gl^3\varphi_0}{\nu^2}$$

В качестве единицы длины выбрана высота слоя l, газосодержания — φ_0, скорости — ν_1/l. Для решения задачи на собственные значения для (2.6) необходимо исключить переменные U_x, U_y, p', φ', $\mathbf{W}'$ и получить уравнение относительно одной переменной. Для этого из последних двух уравнений (2.6) получим зависимость между φ' и U_z и $(\mathbf{W}'-\mathbf{U})$ и U_z. Из третьего уравнения (2.6) в соответствии с приближением Буссинеска для (2.6) получаем

$$d\varphi'/dz=-(\nu_1/lW_0)\operatorname{div}\mathbf{W}' \tag{2.7}$$

Приближение Буссинеска предполагает пренебрежение зависимостью плотности от координат в уравнении непрерывности, что в данном случае соответствует $\varphi_0=\mathrm{const}$ в уравнении непрерывности, как для газовой компоненты, так и для жидкой. Условия применимости такого приближения можно получить аналогично [4] или при использовании вариационного метода[1].

Из четвертого уравнения системы (2.6) получаем следующее уравнение, связывающее W_z' и U_z:

$$\frac{dW_z'}{dz}+\frac{W_0+Cl/\rho_2}{W_0}W_z'=\frac{Cl}{\rho_2W_0}U_z$$

[1] Штейнберг В. А. Конвекция в сжимаемой жидкости и ее особенность вблизи критической точки. Канд. дисс., М., 1971.

решение которого имеет вид

$$W_z'=\exp\left[-\int \frac{\dot W_0+Cl/\rho_2}{W_0}dz\right]\times$$
$$\times\left\{\int \exp\left[\frac{\dot W_0+Cl/\rho_2}{W_0}dz\right]\frac{Cl}{\rho_2 W_0}U_z\,dz+A\right\}$$

при $\dot W_0\rho_2 \ll Cl$, подставляя решение уравнения движения пузыря в предыдущее уравнение, получаем [1]

$$W_z'=e^{-t}\int e^t U_z\,dt$$

Если U_z плавная, медленно меняющаяся функция, то $W_z'\approx U_z$.

Аналогично при $W_0\rho_2 \ll Cl$ и плавной функции U_z в зоне разгона пузыря имеем

$$\mathbf{W}'-\mathbf{U}=-(\dot W_0\rho_2/Cl)U_z\boldsymbol{\gamma} \tag{2.8}$$

Из (2.7), (2.8) с учетом $W_z'\approx U_z \operatorname{div}\mathbf{U}=0$ и граничного условия $\varphi'=0$, $U_z=0$ при $z=\pm{}^1/_2$ получаем

$$\varphi'=(\nu_1\rho_2\dot W_0)(Cl^2W_0)^{-1}U_z \tag{2.9}$$

В результате преобразований получаем уравнение для амплитуды вертикальной скорости $U_z\equiv f(z)$

$$D^2f-\frac{1}{1-\varphi_0}\frac{d\varphi_0}{dz}D\frac{df}{dz}=R_0\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}\frac{d\ln W_0}{dz}k^2f \tag{2.10}$$

$$R_0\equiv\frac{1}{12}\left(\frac{d}{l}\right)^2\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{gl^3}{\nu_1^2}\qquad D\equiv\frac{d^2}{dz^2}-k^2 \tag{2.11}$$

Здесь R_0 — аналог числа Рэлея, $k=|\mathbf{k}|$, $\mathbf{k}$ — двумерный волновой вектор в горизонтальной плоскости xy.

Граничные условия для (2.10) зависят, как и в случае тепловой неустойчивости, от того, ограничен ли слой жидкости твердыми поверхностями или поверхность жидкости свободна. В случае твердых границ или свободных имеем соответственно

$$f=\frac{df}{dz}=0,\quad z=\pm\frac{1}{2};\quad f=\frac{d^2f}{dz^2}=0,\quad z=\pm\frac{1}{2} \tag{2.12}$$

при этом начало координат выбрано в средней плоскости слоя.

3. Для решения сформулированной задачи необходимо выяснить вид зависимости коэффициентов уравнения (2.10) от координат. Для этого приведем решение задачи о движении пузыря газа в неподвижной жидкости в безразмерных переменных (в качестве единицы скорости здесь выбрана W_m, единицы времени — ρ_2C^{-1})

$$\frac{dv}{dt}=1-v,\qquad v=1-(1-v_n)e^{-t} \tag{3.1}$$
$$z+\frac{1}{2}=z_0[t-(1-v_n)(1-e^{-t})],\qquad F=\varphi_0 v$$
$$W_m=\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{C}\approx\frac{gd^2}{12\nu_1},\qquad z_0=\frac{W_m\rho_2}{Cl},\qquad v_n=\frac{W_n}{W_m}$$

где v_n — начальная скорость движения пузыря, F — расход газа.

[1] Используя безразмерные переменные из (3.1), неравенство $\dot W_0\rho_2 \ll Cl$ записывается в виде $v^{-1}dv/dt \ll 1$. Это условие выполняется уже при $v_n>0$ и $t>0$, что видно при подстановке решения (3.1) в предыдущее неравенство $e^{-t}\ll[2(1-v_n)]^{-1}$.

Выражения (3.1) дают параметрическую зависимость коэффициентов уравнения (2.10) от координаты z. Из (3.1) видно, что коэффициенты уравнения изменяются экспоненциальным образом; причем характерной длиной является $z_0 l$ – слой существенной неравномерности скорости. Здесь следует отметить, что при $dW_0/dz=0$ (а значит, и $d\varphi_0/dz=0$) рассматриваемая система абсолютно устойчива. Отсюда ясно, что возникающая конвекция жидкости сосредоточена в основном в слое порядка характерного размера $z_0 l$, если $z_0 l<l$.

4. Уравнение (2.10) громоздко, что делает невозможным аналитическое решение задачи, а численное решение также связано с большими трудностями. Поэтому оценим предварительно роль каждого из членов уравнения в механизме устойчивости. Домножив (2.10) на $f(z)$ и проинтегрировав его в интервале $(-{}^1/_2,\ {}^1/_2)$, получим уравнение относительно собственного числа задачи. Этим собственным числом здесь может быть, например, произвольная функция $\Phi(F,\ v_n,\ k)$. Из полученного алгебраического уравнения относительно собственного числа задачи видно, что при $R_0\gg1$ второй член в (2.10) вносит незначительный вклад в устойчивость (добавка порядка единицы к R_0). Поэтому в этом случае (2.10) с учетом (3.1) приводится к более простому виду

$$D^2 f-R_0 k^2\frac{F}{z_0}\frac{dv/dt}{v^2(v-F)}f=0 \tag{4.1}$$

Из-за сложной зависимости коэффициента при втором члене от координат z уравнение (4.1) не поддается аналитическому решению. Поэтому для приближенного вычисления собственного значения считаем, что

$$\frac{F}{z_0}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\frac{dv/dt}{v^2(v-F)}f^2\,dz\approx\left\langle\frac{F\,dv/dt}{z_0 v^2(v-F)}\right\rangle\int\limits_{-1/2}^{1/2}f^2\,dz \tag{4.2}$$

$$\left\langle\frac{F}{z_0}\frac{dv/dt}{v^2(v-F)}\right\rangle=\frac{F}{z_0}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\frac{dv/dt}{v^2(v-F)}dz=\ln\frac{(v_k-F)v_n}{v_k(v_n-F)}$$

где v_k — конечная скорость движения пузыря.

Уравнение (4.1) и соответствующее выражение для коэффициента (4.2) записаны для случая, когда высота слоя жидкости $l<z_0 l$. Тогда характерным размером в задаче является высота слоя. В другом предельном случае $l>z_0 l$ характерным размером в задаче оказывается высота слоя существенной неравномерности скорости пузыря $z_0 l$.

Выбрав для обезразмеривания уравнений в качестве единицы длины $z_0 l$ в отличие от (2.6) и оценив вклад различных членов в (2.10) в устойчивость аналогично предыдущему, получаем следующее уравнение при $R_0 z_0\gg1$:

$$D^2 f-R_0 z_0 k_1^2\left\langle\frac{F\,dv/dt}{v^2(v-F)}\right\rangle f=0 \tag{4.3}$$

$$D\equiv d^2/dz_1^2-k_1^2,\qquad z_1=z/z_0,\qquad k_1=kz_0$$

$$\left\langle\frac{F\,dv/dt}{v^2(v-F)}\right\rangle=F\int\limits_0^\infty\frac{dv/dt}{v^2(v-F)}dz_1=\ln\frac{(1-F)v_n}{v_n-F}$$

Верхний предел в интеграле (4.3) заменен ∞, так как под интегралом стоит экспонента и результирующая ошибка экспоненцально мала.

Для удобства запишем (4.1) и (4.3) в виде

(4.4) $$D^2f-\lambda^2k^4f=0$$

(4.5) $$\lambda^2\equiv R_0k^{-2}\left\langle\frac{F\,dv/dt}{z_0v^2(v-F)}\right\rangle,\qquad \lambda^2\equiv R_0z_0k_1^{-2}\left\langle\frac{F\,dv/dt}{v^2(v-F)}\right\rangle$$

Таким образом, исходная задача свелась к определению из (4.4) и соответствующих граничных условий функции $\lambda(k)$, причем минимальное значение собственного числа является критерием возникновения неустойчивости, а минимизирующее значение k_0 определяет периодичность решения в горизонтальной плоскости.

5. Решение уравнения (4.4) может быть записано в общем виде

(5.1) $$f=A_1\operatorname{ch}2\mu_1z+A_2\operatorname{ch}2\mu_2z+B_1\operatorname{sh}2\mu_1z+B_2\operatorname{sh}2\mu_2z$$
$$4\mu_1^2=k^2(1+\lambda),\qquad 4\mu_2^2=k^2(1-\lambda)$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные.

Используя симметрию граничных условий, можно разделить четное и нечетное решения в двух симметричных случаях.

В случае двух свободных границ четное решение записывается в виде

(5.2) $$f_e=A_1\operatorname{ch}2\mu_1z+A_2\operatorname{ch}2\mu_2z$$

Тогда из (2.12) получаем $2\mu=i\pi n$ и $f_e=A\cos\pi nz$, где A — произвольная постоянная, n — целое число, не равное нулю. Подставляя f_e в (4.4) имеем

(5.3) $$\lambda^2=(1+n^2\pi^2/k^2)^2$$

Аналогично для нечетного решения

(5.4) $$f_n=B_1\operatorname{sh}2\mu_1z+B_2\operatorname{sh}2\mu_2z,\qquad \lambda^2=(1+4n^2\pi^2/k^2)^2$$

Так как наименьшее значение λ^2k^2 определяет критерий устойчивости, то в (5.3) следует принять $n=1$ и минимизировать по k. Тогда, подставляя предварительно (4.2) в (4.5), получаем критерий устойчивости при $l<z_0l$ в случае свободных границ при $k_0=\pi$

(5.5) $$F^*=v_n\left\{1-\frac{1-v_n/v_k}{\exp(\gamma/R_0)-v_n/v_k}\right\},\qquad \gamma=4\pi^2$$

и тем самым критическое начальное газосодержание

(5.6) $$\varphi_n^*=1-\frac{1-v_n/v_k}{\exp(\gamma/R_0)-v_n/v_k}$$

Для нечетного решения $\gamma=16\pi^2$ при $k_0=2\pi$.

В другом предельном случае ($l>z_0l$) из (4.8) с подстановкой (4.5) при $k_0=\pi z_0^{-1}$ имеем

(5.7) $$\varphi_n^*=1-\frac{1-v_n}{\exp(4\pi^2/R_0z_0)-v_n}$$

В случае двух твердых границ из граничных условий (2.12) получаем системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_i, для которой характеристическое уравнение для четного (5.2) и нечетного

(5.4) решения соответственно имеет вид

(5.8) $\sqrt{\lambda+1}\,\mathrm{th}\,{}^1/_2 k\sqrt{\lambda+1} = -\sqrt{\lambda-1}\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2 k\sqrt{\lambda-1}$

(5.9) $\sqrt{\lambda+1}\,\mathrm{cth}\,{}^1/_2 k\sqrt{\lambda+1} = \sqrt{\lambda-1}\,\mathrm{ctg}\,{}^1/_2 k\sqrt{\lambda-1}$

Численное исследование трансцендентных уравнений (5.8) и (5.9) дает следующие значения критериев устойчивости:

(5.10) $\gamma_e = \lambda^2 k^2 = 68.5, \quad k_0 = 4.73; \quad \gamma_n = 158.5, \quad k_0 = 6.2$

В случае, когда одна граница твердая, другая свободная, как отмечено в [6], любое нечетное решение в случае обеих твердых границ, соответствующее высоте слоя l, также является решением и в рассматриваемом случае при высоте слоя $l'=l/2$.

При $l<z_0 l$ критерий устойчивости R_0 пропорционален l и $\gamma=79.25$ при $k_0=6.2$; в другом случае $l>z_0 l$ критерий не зависит от высоты слоя и $\gamma=158.5$ при $k_0=6.2\ z_0^{-1}$.

6. При химической очистке газа или жидкости, а также при мокрой очистке газа широко используются барботажные устройства. Основным преимуществом этих устройств является высокий коэффициент массообмена (или теплообмена в аналогичных теплообменных аппаратах). Однако, как известно из эксперимента, с увеличением расхода газа наступает срыв пузырькового режима, и коэффициент массообмена падает скачком. Величина критического расхода газа и его зависимость от физических параметров, а также физические причины этого явления до сих пор не были рассмотрены в литературе. На основании предложенного решения задачи о гидродинамической устойчивости пузырькового режима барботажа газа через жидкость предлагается критерий для определения такого критического расхода газа, из которого следует зависимость критического расхода газа от физических параметров.

В качестве примера приведем расчет критического газосодержания при барботаже воздуха через слой воды при обеих свободных границах. В этом случае безразмерный комплекс из (4.3) (из оценок видно, что $lz_0<l$ при $l>1$ *см*)

$$R_0 z_0 = \left(\frac{\rho_2 g}{\rho_1}\right)^2 \left(\frac{d^2}{12\nu_1}\right)^3 \frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1}\nu_1^{-1} \tag{6.1}$$

при $\rho_2/\rho_1=10^{-3}$, $q=10^3$ *см/сек*, $\nu_1=10^{-2}$ *см²/сек*; $d=0.15$ *см* и $z_0=l^{-1}$, $R_0\simeq 100\,l$ равен $R_0 z_0=100$; тогда при свободных границах $\varphi_n^*=1-(1-v_n)/(1.49-v_n)$.

При относительной начальной скорости пузыря газа $v_n=0.85$ $\varphi_n^*=0.8$, что близко к экспериментальным данным по переходу от пузырькового к стержневому режиму барботажа [7]. Следует отметить, что размерное волновое число, при котором наступает неустойчивость, как и сам критерий, не зависит от высоты слоя жидкости, а соответствующий ему размер конвективной ячейки равен при свободных границах $\varkappa=2\pi l/k_0=2$ *см*. Близкие значения получаются и при других граничных условиях.

Характерным отличием полученного критерия, как видно из (6.1), является сильная зависимость от кинематической вязкости жидкости ($\sim\nu_1^{-4}$) и размера пузыря газа ($\sim d^6$) и отсутствие зависимости от высоты слоя.

Таким образом, изменяя размер пузырьков и начальную скорость их подъема, а также варьируя эффективную вязкость жидкости, например, химическими добавками или полимерными примесями, можно сильно влиять на условия наступления кризиса оптимального режима барботажа.

Поступила 5 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford, Clarendon Press., 1961.
2. *Гитерман М. Ш., Штейнберг В. А.* Критерии возникновения свободной конвекции в сжимаемой, вязкой и теплопроводной жидкости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
4. *Spiegel E. A., Veronis G.* On the boussinesq approximation for a compressible fluid. Astrophys. J., 1960, vol. 131, No. 2.
5. *Ляпидевский В. К.* К вопросу об образовании ячеистой структуры в слое тумана или дыма. ЖЭТФ, 1956, т. 30, № 2.
6. *Pellew A., Southwell R. V.* On maintained convective motion in a fluid heated from below. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1940, vol. 176, No. 966.
7. *Локшин В. А., Шварц А. Л.* Расчет движущих напоров и гидравлических сопротивлений при движении пароводяной смеси в вертикальных подъемных трубах. Теплоэнергетика, 1959, № 8.