МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1974

УДК 532.526.2

О ВЫБОРЕ АВТОМОДЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

А. Г. КУЛИКОВСКИЙ, Ф. А. СЛОБОДКИНА

(*Москва*)

Если скорость внешнего потока на границе пограничного слоя не зависит от времени и задается в виде степенной функции продольной координаты, то может быть найдено автомодельное решение уравнений пограничного слоя с помощью интегрирования одного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка [1–3].

При отрицательном показателе степени в распределении скорости внешнего потока автомодельное решение, удовлетворяющее уравнениям и обычно выставляемым граничным условиям, находится не единственным способом [4]. Аналогичный результат был получен для течений проводящей жидкости в магнитном поле [5].

В настоящей статье исследуется поведение неавтомодельных возмущений автомодельного решения, что позволяет дать основания для выбора автомодельного решения.

1. Будем для простоты рассматривать двумерное течение несжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил. Уравнение пограничного слоя может быть записано в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=U\frac{dU}{dx}+\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \tag{1.1}$$

Здесь ψ — функция тока, $U(x)$ — продольная скорость на внешней границе пограничного слоя, ν — кинематическая вязкость жидкости, x — продольная, а y — поперечная координаты. Функция тока должна удовлетворять граничным условиям, которые возьмем в следующем виде:

$$\psi|_{y=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{y=0}=0,\qquad \lim_{y\to\infty}\frac{\partial\psi}{\partial y}=U(x) \tag{1.2}$$

Имея в виду рассмотрение возмущений автомодельных решений, зададим скорость внешнего потока в виде $U(x)=Cx^m$.

Введем вместо ψ, y, x новые переменные φ, η, ξ по формулам

$$\varphi(x,\eta)=\sqrt{\frac{m+1}{2C}}\,x^{-(m+1)/2}\psi,\qquad \eta=\sqrt{\frac{C(m+1)}{2}}\,x^{(m-1)/2}y,$$

$$\xi=\frac{m+1}{2}\ln x$$

Тогда (1.1) примет вид

$$\varphi_\eta{}'\varphi_{\xi\eta}{}''-\varphi_\xi{}'\varphi_{\eta\eta}{}''=\nu\varphi_{\eta\eta\eta}'''+\varphi\varphi_{\eta\eta}{}''-\beta(\varphi_\eta{}'^2-1),\qquad \beta=\frac{2m}{m+1} \tag{1.3}$$

Здесь штрихами и нижними индексами обозначены частные производные. Можно добиться, чтобы коэффициент при первом члене в правой части был бы равен единице. Это не сделано для того, чтобы в дальнейшем легче было проследить роль вязкости.

Решения уравнения (1.3), не зависящие от ξ, являются автомодельными. Они удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению, получающемуся из (1.3) отбрасыванием левой части, содержащей производные по ξ.

Сделаем в (1.3) еще одно преобразование. Примем вместо η за независимую переменную φ, а в качестве искомой функции возьмем $w(\xi,\varphi)=\varphi_\eta'=U^{-1}\partial\psi/\partial y$ — скорость, отнесенную к скорости внешнего потока автомодельного течения. Тогда получим

$$\frac{\partial w}{\partial \xi}-\varphi\frac{\partial w}{\partial \varphi}=\nu\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(w\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)-\beta\left(w-\frac{1}{w}\right) \tag{1.4}$$

В пограничном слое φ меняется от нуля на стенке до бесконечности при удалении от стенки. Граничные условия для функции $w(\xi,\varphi)$ имеют вид

$$w(\xi,0)=0,\qquad \lim_{\varphi\to\infty} w(\xi,\varphi)=1 \tag{1.5}$$

Начальные данные для решения уравнения (1.4) будем задавать при некотором $\xi=\xi_0$ в виде $w(\xi_0,\varphi)=w_0(\varphi)$.

2. Рассмотрим поведение неавтомодельного решения уравнения (1.4), считая, что решение и функция $w_0(\varphi)$ при больших значениях φ мало отклоняются от единицы, так что можно провести линеаризацию в (1.4) по величине $q=w-1$

$$\frac{\partial q}{\partial\xi}-\varphi\frac{\partial q}{\partial\varphi}=\nu\frac{\partial^2 q}{\partial\varphi^2}-2\beta q \tag{2.1}$$

Будем разыскивать решения этого уравнения в виде

$$q=A\exp i\left(\int k(\varphi)d\varphi-\omega\xi\right)$$

где $k(\varphi)$ — искомая комплексная функция действительного аргумента $A=\text{const}$. Для $k(\varphi)$ получим уравнение

$$ik'=k^2-(i\varphi/\nu)k+(2\beta-i\omega)/\nu \tag{2.2}$$

Отметим, что имеется точное решение этого уравнения $k=0$, $\omega=-2i\beta$, которому соответствует решение уравнения (2.1), не зависящее от координаты φ ($q=q_0\exp(-2\beta\xi)$). Это равенство показывает, что решение $w=1$ уравнения (1.4) при $\beta>0$ устойчиво, а при $\beta<0$ неустойчиво по отношению к возмущениям, не зависящим от поперечной координаты. Физический смысл этой неустойчивости будет обсуждаться ниже.

Обозначим через $k_1(\varphi)$ и $k_2(\varphi)$ функции, обращающие в нуль правую часть уравнения (2.2), причем будем считать, что $\operatorname{Im} k_1\geqslant\operatorname{Im} k_2$. Исследование уравнения (2.2), которое для кратности опустим, показывает, что при $\varphi\to\infty$ все решения, за исключением одного, приближаются к функции $k_1(\varphi)$. Исследуя с помощью (2.2) окрестность значения $k=k_1(\varphi)$, можно показать, что для решений, близких к $k_1(\varphi)$, при $\varphi\gg\nu$, $\nu\omega$, $\nu\beta$ имеет место равенство

$$k(\varphi)=(-\omega-2i\beta)/\varphi+O(\varphi^{-3}) \tag{2.3}$$

Указанное выше точное решение $k=0$, $\omega=-2i\beta$ принадлежит этому семейству решений.

Существует, кроме того, исключительное решение, для которого $k\to k_2(\varphi)$. Можно показать, что для этого решения при $\varphi\gg\nu$, $\nu\omega$, $\nu\beta$ имеет место равенство

$$k(\varphi)=i\varphi/\nu+(\omega-1+2i\beta)/\varphi+O(\varphi^{-2}) \tag{2.4}$$

Равенства (2.3), (2.4) легко получаются методами ВКБ [6].

Таким образом, решение уравнения (2.1), зависящее от ξ как $\exp(-i\omega\xi)$, можно при больших значениях φ записать в виде

$$q=C_1\varphi^{2\beta-i\omega}e^{-i\omega\xi}+C_2\varphi^{-2\beta+i(\omega-1)}e^{-\varphi^2/2\nu}e^{-i\omega\xi} \tag{2.5}$$

При $\omega=0$ равенство (2.5) представляет собой асимптотику автомодельного решения при $\varphi\to\infty$ и соответствует асимптотике, найденной в [5]. При действительных и отличных от нуля значениях ω выражение (2.5) можно рассматривать как суперпозицию двух периодических по переменной ξ волн с волновыми векторами (2.3), (2.4). Применим для определения направления распространения волны то же правило, что и для решений уравнений с постоянными коэффициентами (см., например, [7]), а именно будем считать, что направление распространения волны зависит от знака $\operatorname{Im} k$ при значениях ω с достаточно большими $\operatorname{Im}\omega$. Тогда можно заключить, что первый член правой части (2.5) соответствует волне, распространяющейся при увеличении ξ в отрицательном направлении φ, а второй член соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении φ.

Другим основанием для такого заключения является аналогия уравнения (2.1) с уравнением теплопроводности при наличии источников тепла $-2\beta q$ в среде, движущейся со скоростью $-\varphi$, и обладающей коэффициентом теплопроводности ν. При этом величина ξ играет роль времени, а φ — координаты. Для уравнения теплопроводности существует два типа возмущений, распространяющихся в противоположные стороны. Один тип возмущений представляет собой волну теплопроводности, распространяющуюся против движения среды и быстро затухающую в пространстве. Этой волне соответствует второй член в правой части (2.5). Второй тип возмущений представляет собой волну, распространяющуюся в направлении движения среды, и в некоторых случаях определяется в основном переносом тепла вместе с частицами среды и действием источников.

Так как второе слагаемое в (2.5), содержащее ν очень быстро (как $\exp(-\varphi^2/\nu)$) стремится к нулю при удалении от стенки, то вдали от стенки можно пренебречь этим слагаемым по сравнению с первым слагаемым, не содержащим ν. Это эквивалентно, как будет показано ниже, пренебрежению в (2.1) членом, содержащим ν. Для такого пренебрежения достаточно, чтобы отношение члена, содержащего ν, к «инерционному» члену $\varphi\partial q/\partial\varphi$ было по порядку величины много меньше единицы

$$(\varphi L/\nu)^{-1}\ll 1 \tag{2.6}$$

где L — характерная величина φ, на которой происходит изменение функции q. Например, L можно определить как отношение $q(\partial q/\partial\varphi)^{-1}$. Величина L является функцией φ и ξ.

Выражение в скобках в левой части неравенства (2.6) представляет собой число Рейнольдса, если учесть, что φ в инерционном члене уравнения (2.1) играет роль скорости. Будем считать, что неравенство (2.6) выполнено вдали от стенки. Тогда (2.1) превращается в уравнение первого порядка, общее решение которого можно получить, интегрируя уравнение характеристик

$$d\varphi/d\xi=-\varphi,\qquad dq/d\xi=-2\beta q \tag{2.7}$$

Первое уравнение задает форму характеристики, а второе — изменение q вдоль характеристики, которое, как видно из сравнения (2.1) и (2.7), определяется действием источников тепла.

Если зависимость q от ξ выбрать в виде $\exp(-i\omega\xi)$, то из (2.7) получится первый член в асимптотике (2.5). При этом уравнения (2.7) показывают, что возмущение, соответствующее этому члену, распространяется в сторону убывания φ. Из (2.7) следует, что на характеристиках справедливо равенство

(2.8) $$q=q_0\varphi^{2\beta}$$

Нетрудно найти общее решение уравнений (2.7)

(2.9) $$q=q_0(\varphi e^{\xi})e^{-2\beta\xi} \quad (q_0=w_0-1)$$

При решении задач с начальными данными важно, чтобы условие (2.6) не нарушалось с ростом ξ. Так как L представляет собой величину, пропорциональную разности двух значений φ, то из (2.7) можно заключить, что $dL/d\xi=-L$, где производная взята вдоль характеристики. Из последнего равенства и из первого равенства (2.7) следует, что на характеристике выполняется соотношение $L/\varphi=\mathrm{const}$.

Поэтому, если функция $q_0(\varphi)$ такова, что для нее при больших значениях φ справедливо неравенство $L>m\varphi$, где m — некоторая постоянная, то величина $L(\varphi, \xi)$ не может уменьшаться с ростом ξ при $\varphi=\mathrm{const}$. При рассмотрении задачи с начальными данными будем всюду в дальнейшем предполагать, что это условие выполнено. Тогда можно указать такое значение φ^*, что при $\varphi>\varphi^*$ неравенство (2.6) будет выполняться при всех значениях ξ, а решение будет представлять собой возмущение, идущее к стенке, и описываться равенством (2.9) или при зависимости решения от ξ в виде $\exp(-i\omega\xi)$ первым слагаемым в правой части равенства (2.5).

Если $\beta>0$, то при $\operatorname{Im}\omega=0$, и в частности при $\omega=0$, первое слагаемое в правой части (2.5) растет с ростом φ и условие ограниченности решения при $\varphi\to\infty$ представляет собой нетривиальное условие, из которого следует, что $C_1=0$. Поэтому при $\beta>0$ решение автомодельной задачи для w определяется единственным образом условием ограниченности w при $\varphi\to\infty$ и условием $w=0$ при $\varphi=0$.

Если $\beta<0$, то при $\omega=0$ (и вообще при $\operatorname{Im}\omega=0$) оба слагаемых в правой части (2.5) стремятся к нулю при $\varphi\to\infty$. Поэтому условие ограниченности решения не накладывает каких-либо ограничений на асимптотическое поведение решения, задаваемое равенством (2.5). При любых значениях C_1 и C_2 величина q стремится к нулю, а $w\to1$ при $\varphi\to\infty$. Этим обусловлена неединственность автомодельных решений, так как оставшееся одно граничное условие $w=0$ при $\varphi=0$ не может выделить единственного решения. Однако поведение неавтомодельных решений при больших значениях φ и истолкование членов решения как волн с определенным направлением распространения позволяет провести анализ решений неавтомодельной задачи с начальными данными и выделить то автомодельное решение, к которому стремится неавтомодельное решение при $\xi\to\infty$.

Если при $\beta<0$ величина $w_0-1=q_0(\varphi)$ при $\varphi\to\infty$ стремится к нулю медленнее, чем $\varphi^{2\beta}$, то из (2.7), (2.8) следует, что возмущения, представляющие собой волну, приходящую к стенке, будут неограниченно расти при больших фиксированных значениях φ и $\xi\to\infty$ и решение не будет стремиться к автомодельному.

Если $q_0(\varphi)=\varphi^{2\beta}f(\varphi)$, причем функция $f(\varphi)$ не стремится ни к какому пределу при $\varphi\to\infty$, то возмущение, приходящее к стенке, будет согласно (2.7), (2.8) оставаться ограниченным, но не будет стремиться ни к какому пределу при $\xi\to\infty$.

Если $q_0=K\varphi^{2\beta}[1+\varepsilon(\varphi)]$, где $\varepsilon(\varphi)\to0$ при $\varphi\to\infty$, то возмущение, представляющее собой приходящую волну, будет стремиться при $\xi\to\infty$, $\varphi=\mathrm{const}$ к постоянному значению $K\varphi^{2\beta}$, и автомодельное решение, которое может установиться при $\xi \to \infty$, будет выделяться из множества автомодельных решений условием $C_1 = K$.

Если q_0 при $\varphi \to \infty$ стремится к нулю быстрее, чем $\varphi^{2\beta}$, то возмущение, задаваемое приходящей волной, будет стремиться к нулю при $\xi \to \infty$. В этом случае предельное автомодельное решение характеризуется условием $C_1 = 0$. Таким образом поведение функции $w_0(\varphi)$ при больших значениях φ определяет граничное условие при $\varphi = \infty$ для автомодельного решения, которое устанавливается при $\xi \to \infty$. Это граничное условие заключается в задании постоянной C_1 в асимтотике (2.5).

Интересно отметить, что рост величины q при $\beta < 0$ при увеличении ξ (неустойчивость решения уравнения (1.4)) не связан с действительным увеличением возмущений скорости, а вызывается тем, что возмущения скорости отнесены к скорости внешнего потока, которая при $\beta < 0$ уменьшается при увеличении ξ. Это заключение вытекает уже из того факта, что отмечавшийся рост возмущений описывается уравнениями идеальной жидкости, так что можно записать интеграл Бернулли, который в приближении пограничного слоя имеет вид $^1/_2 u^2 + p(x)/\rho = \text{const}$, откуда следует, что возмущения квадрата скорости остаются постоянными вдоль линий тока.

Поступила 31 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
2. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М., Гостехиздат, 1957.
3. *Falkner V. M., Skan S. W.* Some approximate solutions of the boundary layer equations. Aeronaut. Res. Committee, Repts and Mem., 1930, No. 1314.
4. *Hartree D. R.* On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer. Proc. Cambr. Philos. Soc., 1937, vol. 33, pt 1, 2.
5. *Готовцев А. В.* Отрывные автомодельные течения в ламинарном магнитогидродинамическом пограничном слое при вдуве и отсосе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.
6. *Хединг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов. (Метод ВКБ). М., «Мир», 1965.
7. *Куликовский А. Г.* Об устойчивости однородных состояний. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.