

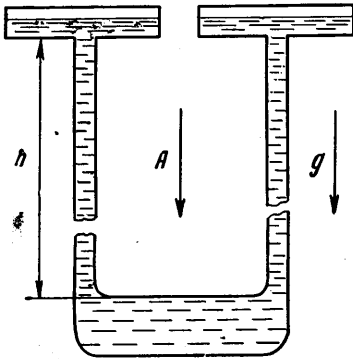
## КОНВЕКТИВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СООБЩАЮЩИХСЯ СОСУДАХ

А. Ф. ПШЕНИЧНИКОВ, Г. Ф. ШАЙДУРОВ

(Пермь)

Изучается колебательная неустойчивость неравномерно нагретой жидкости в сообщающихся сосудах. Исследуется влияние условий теплообмена и геометрических параметров на критическое число Рэлея и частоту установившихся колебаний. Проведено сравнение результатов теоретического исследования с экспериментом.

Конвективная устойчивость равновесия жидкости в длинных вертикальных каналах, соединенных на концах и образующих гидравлический контур, исследовалась экспериментально и теоретически [1-3]. Установлено, что при нагревании снизу и достаточно большом градиенте температуры в каналах равновесие становится неустойчивым относительно монотонных возмущений. Основному уровню неустойчивости соответствует замкнутое циркуляционное движение жидкости в контуре, при котором в одном канале жидкость поднимается с постоянной скоростью, в другом опускается. Колебательные возмущения при подогреве снизу отсутствуют [4].



Фиг. 1

Ситуация существенно меняется, если подогреваемый снизу контур не замкнут сверху и заполнен жидкостью не полностью (в каналах имеется свободная поверхность жидкости). В таких условиях по мере перетекания жидкости из одного канала в другой возникает разность уровней и, следовательно, разность гидростатических давлений. Этот перепад давлений и затухание температурных возмущений вследствие теплопроводности делают невозможным возникновение монотонных возмущений, отвечающих основному уровню неустойчивости, и приводят к появлению «возвращающей» квазиупругой силы и

колебательных возмущений. При определенных условиях колебательные возмущения срывают устойчивость равновесия жидкости и вызывают незатухающие конвективные колебания скоростей, разностей температур, давлений и уровней жидкости в каналах.

Для наблюдения и экспериментального изучения конвективных колебаний удобна установка, схематически изображенная на фиг. 1. Теоретическое исследование проблемы проводится применительно к этой схеме.

**1. Уравнение нейтральной кривой.** Конвективные возмущения скорости  $v$ , температуры  $\theta$  и давления  $p$  описываются, например, [4] системой уравнений

$$(1.1) \quad \partial v / \partial t = -\nabla p / \rho + \nu \Delta v - g \beta T$$

$$(1.2) \quad \partial \theta / \partial t - A v = \chi \Delta \theta, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad T = -A z + \theta$$

Здесь  $A$  — градиент температуры,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\nu$ ,  $\beta$ ,  $\chi$  — коэффициенты кинематической вязкости, теплового расширения и теплопроводности. Решение будем проводить в цилиндрических координатах с осью  $z$ , направленной вдоль оси одного из каналов, в предположении, что  $v_r = v_\theta = 0$ . Гидродинамическим сопротивлением горизонтального участка контура и концевыми эффектами пренебрегаем, полагая высоту контура  $h$  большой по сравнению с внутренним радиусом каналов  $a$  и расстоянием

между их осями. Интегрируя уравнение (1.1) по  $z$  от 0 до  $h$ , получим

$$(1.3) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{g}{h} \xi + \nu \Delta v + g\beta\theta$$

где  $\xi$  — полусумма возмущений уровней жидкости в каналах контура, которая связана со скоростью  $v$  уравнением

$$(1.4) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\pi(s_1+s_2)}{s_1s_2} \int_0^a v(r,t) r dr$$

Здесь  $s_1$  и  $s_2$  — площади свободной поверхности жидкости в кюветах, с которыми соединен контур (фиг. 1). Введя единицы измерения:  $a$  — длины,  $\nu/a$  — скорости,  $Aa$  — температуры,  $a^2/\nu$  — времени, перепишем уравнения (1.2) — (1.4) в безразмерной форме

$$(1.5) \quad \partial v / \partial t = -N\xi + \Delta v + G\theta$$

$$(1.6) \quad \partial \theta / \partial t - \nu = (1/P) \Delta \theta$$

$$(1.7) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{2L}{NP} \int_0^1 v(r,t) r dr$$

$$G = g\beta Aa^4/\nu^2, \quad P = \nu/\chi, \quad N = ga^4/\nu^2h, \quad L = \pi a^2 NP(s_1+s_2)/2s_1s_2$$

Сформулируем граничные условия. Для скорости запишем

$$(1.8) \quad v=0, \quad r=1$$

В связи с колебаниями температуры необходимо, вообще говоря, учитывать температурные волны в стенках каналов, что делает решение очень громоздким. Поэтому ограничимся случаем «низкочастотных» колебаний, период которых велик по сравнению с характерным временем прогрева стенок каналов, что справедливо при условии

$$F = \frac{\chi_1}{\omega(a_1-a)^2} \gg 1$$

где  $a_1$  — внешний радиус трубки,  $\omega$  — частота колебаний,  $\chi_1$  — температуропроводность стенок. Для тонкостенных металлических трубок это требование легко выполнимо. Так,  $F \gg 10^2$  при толщине металлических стенок  $\sim 0,1$  см, если  $2\pi/\omega \gg 10$  сек. При  $F \gg 1$  условие непрерывности тепловых потоков имеет вид

$$(1.9) \quad r=1, \quad -\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\mu P}{2} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{Bi} \theta, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2} \left( \frac{a_1^2}{a^2} - 1 \right)$$

Здесь  $\mu_1, \mu_2$  — объемные теплоемкости стенок и жидкости соответственно,  $\text{Bi} = \alpha a_1/\chi$ ,  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи на внешней поверхности трубок,  $\chi$  — коэффициент теплопроводности жидкости.

Решение системы уравнений (1.5) — (1.7)

$$(1.10) \quad v(r,t) = \left\{ \left[ J_0(kr) + 2W \frac{J_1(k)}{k} \right] d_1 + \left[ I_0(qr) + 2W \frac{I_1(q)}{q} \right] d_2 \right\} e^{\lambda t}$$

$$(1.11) \quad \vartheta(r, t) = \frac{1}{G} \left\{ \left[ (\lambda + k^2) J_0(kr) + \frac{2GW}{\lambda k} J_1(k) \right] d_1 + \right. \\ \left. + \left[ (\lambda - q^2) I_0(qr) + \frac{2GW}{\lambda q} I_1(q) \right] d_2 \right\} e^{\lambda t}$$

где  $d_1, d_2$  — постоянные интегрирования,  $W = L(R - \lambda^2 P - L)^{-1}$ ,  $R = GP$ ,  $I_m$  и  $J_m$  — функции Бесселя порядка  $m$ , модифицированные и первого рода соответственно, а параметры  $k, q$  являются корнями системы уравнений

$$(1.12) \quad k^2 q^2 = R - \lambda^2 P, \quad k^2 - q^2 = -\lambda(1 + P)$$

Эти параметры и декремент нормальных возмущений  $\lambda$ , являющийся собственным числом задачи, могут быть в общем случае комплексными числами. Подставив (1.10), (1.11) в условия (1.8), (1.9) и приравняв нулю определитель полученной системы, найдем уравнение для  $\lambda$ , которое удобно записать в виде

$$(1.13) \quad -\frac{2\lambda PW(k^2 + q^2)}{kq} J_1(k) I_1(q) + q(\lambda^2 - q^2) J_0(k) I_1(q) + \\ + k(\lambda + k^2) J_1(k) I_0(q) = \left( \text{Bi} + \frac{\lambda \mu P}{2} \right) \left\{ (k^2 + q^2) J_0(k) I_0(q) + \right. \\ \left. + 2W \left( \frac{G}{\lambda} - \lambda \right) \left[ \frac{J_1(k) I_0(q)}{k} - \frac{J_0(k) I_1(q)}{q} \right] + \right. \\ \left. + 2W \left[ q^2 \frac{J_1(k) I_0(q)}{k} + k^2 \frac{J_0(k) I_1(q)}{q} \right] \right\}$$

Задача имеет точное решение при  $|k|^2 \ll 1$ ,  $|q|^2 \ll 1$ . Из уравнений (1.12) следует, что эти условия формально выполняются при малых значениях  $R$  и  $\lambda$ , т. е. в случае медленного затухания температурных и гидродинамических возмущений (при малых  $\text{Bi}$  и  $L$ ). Раскладывая функции Бесселя в ряд по степеням  $k, q$  и ограничиваясь первыми двумя членами, получим

$$\lambda_0 = \frac{R - L(1 + \mu) - 16\text{Bi}}{8[\text{Bi}(1 + P) + 2P(1 + \mu)]},$$

$$\omega^2 = \frac{\text{Bi} L}{2P[\text{Bi}(1 + P) + 2P(1 + \mu)]} - \lambda_0^2$$

где  $\lambda_0 = \text{Re } \lambda$ ,  $\omega = \text{Im } \lambda$ . Таким образом, колебания нарастают, если

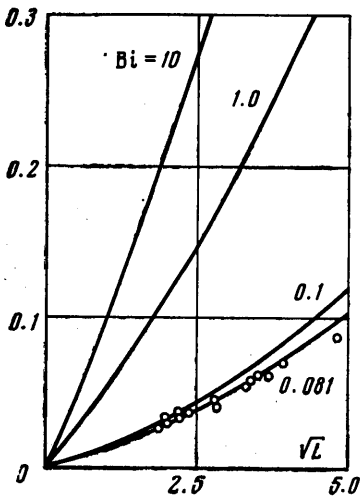
$$(1.14) \quad R > R_* = L(1 + \mu) + 16\text{Bi}$$

и затухают, если  $R < R_*$ . При  $R = R_*$  существуют стационарные колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{L \text{Bi}}{2P[\text{Bi}(1 + P) + 2P(1 + \mu)]}}$$

Следует подчеркнуть, что теплообмен между трубками контура и окружающей средой является необходимым условием существования конвективных колебаний.

В пределе при  $\text{Bi} \rightarrow 0$  колебательная неустойчивость переходит в монотонную ( $\omega \rightarrow 0$ ). Однако в отличие от замкнутого гидродинамического конту-



Фиг. 2

ра, в котором при  $Bi=0$  имеет место абсолютная конвективная неустойчивость [1], в разомкнутом контуре критическое число Рэлея принимает конечное значение:  $R_* = L(1+\mu)$ . При  $R=R_*$  состояние с одинаковыми уровнями жидкости в каналах становится неустойчивым; система переходит в новое равновесное состояние, в котором разности температур и уровней жидкости в трубках отличны от нуля и растут с  $R$ . В условиях теплообмена такого равновесного состояния не существует.

Уравнение для  $R_*$  в общем случае, без предположения о малости  $k$ ,  $q$  и, следовательно,  $R$ , получим из (1.13), полагая  $\lambda=i\omega$ . Пусть  $q=be^{i\varphi}$ , тогда из (1.12) получаем

$$k=be^{-i\varphi}, \quad b^4=R_*+\omega^2P, \quad \sin 2\varphi=\omega(1+P)/2\sqrt{R_*+\omega^2P}$$

Поскольку уравнение (1.13) не разрешимо относительно  $R_*$  и  $\omega$ , ограничимся случаем «низкочастотных» колебаний, когда  $\varphi \ll 1$ . Представляя функции Бесселя в виде рядов и выделяя действительную и мнимую части, получим

$$(1.15) \quad \{b[J_0(b)I_1(b)-J_1(b)I_0(b)]+2BiJ_0(b)I_0(b)\}b^4=$$

$$=L \left\{ b(1+\mu)[J_0(b)I_1(b)-J_1(b)I_0(b)]+ \right. \\ \left. +Bi(3+c) \left[ J_0(b)I_0(b) - \frac{J_0(b)I_1(b)-J_1(b)I_0(b)}{b} \right] \right\}$$

$$(1.16) \quad \sin^2 2\varphi \left\{ [2\mu+(1+c)(1-\mu W)]J_0(b)I_0(b)+ \right. \\ \left. +[(1-c)+\mu W(3+c)] \frac{J_0(b)I_1(b)+J_1(b)I_0(b)}{b} + \right. \\ \left. + \frac{8W}{b^2} J_1(b)I_1(b) \right\} = - \frac{Bi W(1+c)^2}{b^3} [J_0(b)I_1(b)-J_1(b)I_0(b)]$$

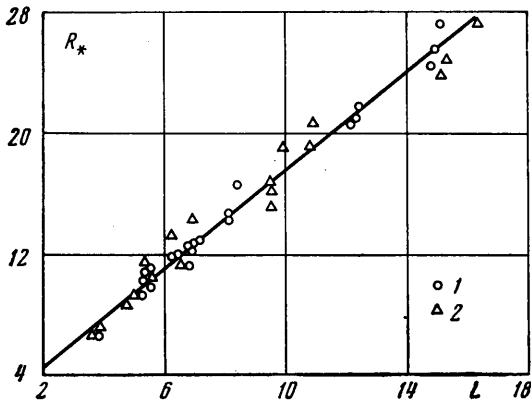
Здесь  $c=P^{-1}$ , а члены порядка  $\varphi^2$  отброшены. Заметим, что множитель при  $\sin^2 2\varphi$  в (1.16) обращается в нуль при  $b=3.2 \div 3.6$  (в зависимости от параметров  $\mu$  и  $c$ ). Поэтому неравенство  $\varphi \ll 1$  выполняется для  $b \lesssim 3$ , т. е. при  $R_* \sim 10$  и достаточно малых числах  $Bi$ .

Система уравнений (1.15), (1.16) решалась численно для  $\mu=0.624$ ,  $P=6.67$  и различных значений  $Bi$  и  $L$ . Величина  $\sin^2 2\varphi$  не превышала при вычислениях  $3 \cdot 10^{-2}$  для  $L \lesssim 30$ . Зависимость частоты конвективных колебаний от  $\sqrt{L}$  для четырех значений числа Био изображена на фиг. 2. Интересно отметить, что при  $Bi \ll 1$  критическое число Рэлея с точностью до нескольких процентов определяется выражением (1.14), по крайней мере до  $R_* \lesssim 50$ , хотя оно получено в предположении о малости  $R_*$ . Таким образом,  $R_*$  растет с увеличением  $L$  по линейному закону, если значения  $R_*$  не слишком велики. С увеличением числа Био угол наклона прямых  $R_*=f(L)$  к оси  $L$  уменьшается. Зависимость  $R_*$  от  $Bi$  сильно нелинейна и при  $L \rightarrow 0$  описывается трансцендентным уравнением

$$b[J_0(b)I_1(b)-J_1(b)I_0(b)]+2BiJ_0(b)I_0(b)=0$$

определяющим основной уровень монотонной конвективной неустойчивости в замкнутом гидравлическом контуре [1].

2. Эксперимент. Экспериментальная установка схематически изображена на фиг. 1. Две кюветы прямоугольного сечения  $250 \times 300 \text{ мм}^2$  и глубиной



Фиг. 3

60 мм, изготовленные из листовой латуни, соединены двумя латунными трубками внутренним диаметром 5.90 мм, толщиной стенок 1.01 мм и длиной 398 мм с горизонтальной толстостенной трубой из латуни внутренним диаметром 50 мм, поверх которой намотана нихромовая проволока электрического нагревателя. Охлаждение кювет осуществлялось с помощью змеевика из медных трубок, припаянных ко дну кювет, и водяного циркуляционного термостата. Кюветы и каналы заполнялись дистиллированной

водой. Площадь свободной поверхности воды в кюветах могла изменяться путем заполнения части объема кювет пластмассовыми пластинами.

Распределение температуры вдоль одной из вертикальных трубок модели измерялось четырьмя медно-константановыми термопарами, расположенными на образующей на расстоянии 90 мм одна от другой. Термопарами измерялись также разность температур между трубками в средней их части и температура жидкости в канале нагревателя. Показания термопар регистрировались самопишущим электронным потенциометром со шкалой на 540 мкв.

Обе вертикальные латунные трубки помещались соосно внутри медных труб диаметром 30 мм и толщиной стенок 3 мм, служивших в основном для создания постоянного вертикального градиента температуры  $A$  в воздухе, окружающем внутренние трубки (в опытах отклонения локальных значений градиента  $A$  от среднего по высоте значения не превышали 1%). Теплоотдача с внешней поверхности латунных трубок осуществлялась за счет конвекции воздуха в кольцевом зазоре между трубками. Для уменьшения влияния внешних условий экранирующие медные трубы, в свою очередь, помещались в блок из мелкопористого пенопласта с толщиной стенок 70 мм.

Эксперименты по измерению критического градиента температуры, при котором возникают конвективные колебания, проводились в квазистационарном режиме, т. е. при достаточно медленном изменении  $A$  вблизи критического значения. Так как время установления стационарного распределения температуры вдоль трубок составляло 30–50 мин, для получения квазистационарных условий длительность одного опыта приходилось увеличивать до 8–15 час. Частота колебаний измерялась в стационарном режиме при небольших амплитудах и надкритичностях. Конвективные параметры воды брались при температуре средней части каналов, усредненной за период. Параметр  $\mu$ , определяющий безразмерную теплоемкость трубки, вычислялся по табличным значениям теплоемкостей и формуле (1.9) и оказался равным  $0.624 \pm 0.005$ .

Результаты измерения частоты стационарных колебаний приведены на фиг. 2. Экспериментальные точки группируются около теоретической кри-

вой, построенной для числа Био 0.081, найденного методом регулярного теплового режима.

На фиг. 3 приведены результаты измерения критического числа Рэлея, определяющего возникновение колебательной неустойчивости. Сплошная линия проведена по формуле (1.14). Часть опытов была проведена с моделью без внешних экранирующих медных труб (точки 2 на фиг. 3). Так как при малых значениях  $Bi$  условия теплообмена слабо влияют на критическое число Рэлея, разброс экспериментальных точек в опытах с экранирующим устройством и без него примерно одинаков и обусловлен в основном нестационарностью процесса и трудностью определения момента возникновения колебаний.

Как видно из фиг. 2 и 3, результаты теории и эксперимента совпадают с точностью до случайных погрешностей опыта.

Поступила 29 IV 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Shaidurov G. F.* Convective liquid stability in closed circuits. *Internat. J. Heat and Mass Transfer*, 1968, vol. 11, No. 2.
2. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Шайдуров Г. Ф.* О конвективной неустойчивости жидкости в связанных вертикальных каналах. *ПММ*, 1966, т. 30, вып. 4.
3. *Богатырева Л. Г., Шайдуров Г. Ф.* Конвективная неустойчивость жидкости в гидродинамически связанных вертикальных каналах. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1972, № 4.
4. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.