

**О ТЕЧЕНИИ ГАЗА ПО СОПЛУ ПРИ ЯЧЕЙСТОЙ СТРУКТУРЕ
ВИХРЕВОГО ПОТОКА**

Ю. А. ГОСТИНЦЕВ, О. А. УСПЕНСКИЙ

(Москва)

Известно, что работа ракетных двигателей в ряде случаев сопровождается возникновением мощных вторичных вихревых движений в камере сгорания [1-3]. Наложение вторичных вихрей на основное течение приводит к образованию ячейистой структуры потока. При этом в каждой из ячеек имеет место трехмерное вихревое циркуляционное течение газа, которое вызывает изменение режима работы сопла.

В данной статье в пределах модели винтового движения [4] рассматривается влияние такой трехмерности адиабатического потока на расходные и тяговые характеристики сопла.

Система уравнений для винтового адиабатического движения газа имеет вид

$$(1) \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty}, \quad \frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma}$$

Здесь λ — скалярная функция, характеризующая распределение завихренности; p_∞, ρ_∞ — давление и плотность заторможенного потока; \mathbf{v} — вектор скорости.

Рассмотрим двухпараметрическое движение, не зависящее от одной из координат q_3 . Для такого движения (1) в обобщенных координатах сводится к виду

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{H_2}{\lambda H_1 H_3} \frac{\partial (H_3 v_3)}{\partial q_1} \right] + \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{H_1}{\lambda H_2 H_3} \frac{\partial (H_3 v_3)}{\partial q_2} \right] + H_1 H_2 \lambda v_3 = 0$$

$$\lambda H_2 H_3 v_1 = \frac{\partial (H_3 v_3)}{\partial q_2}, \quad \lambda H_1 H_3 v_2 = - \frac{\partial (H_3 v_3)}{\partial q_1}$$

$$2 \left(a_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2} v^2 \right) \frac{D(H_3 v_3, \ln \lambda)}{D(q_2, q_1)} - \frac{D(H_3 v_3, v^2)}{D(q_1, q_2)} = 0$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty}, \quad \frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma}$$

где q_i — криволинейные ортогональные координаты, H_i — коэффициенты Ляме, $D(\varphi, \psi)/D(q_1, q_2)$ — якобиан, a_∞ — скорость звука в заторможенном потоке (принято $\partial H_1/\partial q_3 = \partial H_2/\partial q_3 = 0$).

Граничными условиями к (2) будут

$$(3) \quad H_3 v_3|_L = H_3 v_w = \text{const}, \quad \lambda(q_1, q_2^*) = \varphi(q_1)$$

(Первое соотношение следует из требования обращения в нуль нормальной к контуру L области течения S составляющей скорости [5], q_2^* — некоторое фиксированное значение координаты q_2 .)

Воспользуемся полярной системой координат (r, θ) . При $\lambda=0$ из (2), (3) имеем однородный поступательный поток $v_3 = v_w = \text{const}$. Если на такой поток наложено возмущающее движение с малой интенсивностью завихренности ($\lambda R_* \ll 1$, R_* — характерный размер области), то решение (2), (3)

можно представить в виде ряда по степеням малого параметра ε , характеризующего величину завихренности

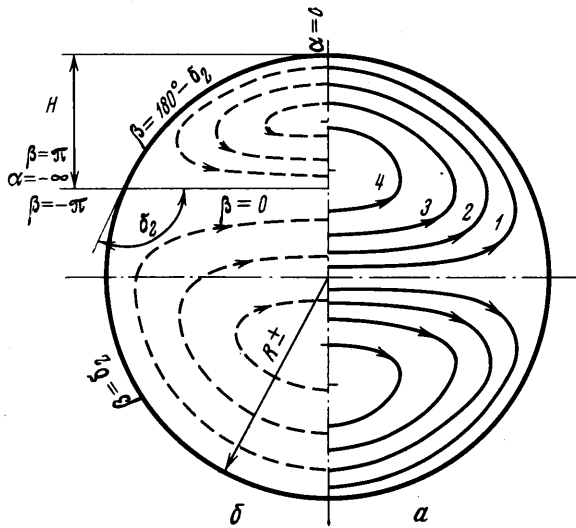
$$(4) \quad v_3 = v_w + \varepsilon^2 v_3^{(1)} + \varepsilon^4 v_3^{(2)} + \dots, \quad \lambda^{-1} = \varepsilon^{-1} f^{(1)} + \varepsilon f^{(2)} + \dots$$

Тогда для первого приближения $v_3^{(1)}$, $f^{(1)}$ получим

$$(5) \quad f^{(1)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r f^{(1)} \frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(f^{(1)} \frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \theta} \right) \right] = -v_w,$$

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial r} \frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial r} = 0$$

На основании (5) рассмотрим движение газа по цилиндрическому участку критического сечения сопла при ячейковой структуре потока, когда



Фиг. 1

границами вихревых областей являются диаметральные плоскости и поверхности сопла (см. фиг. 1, а).

Вводя безразмерные переменные $\xi = r/R_*$, $w_1 = v_3^{(1)}/v_w$,
 $f_1 = f^{(1)}/R_*$ (R_* — радиус сопла)

и ограничиваясь случаем, когда винтовой поток близок к однородному ($\lambda = \text{const}$), можно принять $f_1 = 1.0$ и свести (5) к одному уравнению относительно возмущения продольной скорости

$$(6) \quad \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} = -1$$

с граничным условием

$$(7) \quad w_1|_L = 0$$

Решение (6), (7) для сопла кольцевого сечения ($\xi_1, \xi_2 = 1.0$) представляется рядом Фурье

$$(8) \quad w_1 = \frac{2N}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(\xi_1^{-\nu} - \xi_1^2) \xi^{\nu} + (\xi_1^2 - \xi_1^{\nu}) \xi^{-\nu} + (\xi_1^{\nu} - \xi_1^{-\nu}) \xi^2] \sin \nu \theta}{\nu(\nu^2 - 4)(\xi_1^{\nu} - \xi_1^{-\nu})}$$

где $\nu = N(2k+1)/2$, а $N=1, 2, 3, \dots, n$ — число вихревых областей, предполагаемых одинаковыми.

Предельный переход $\xi_1 \rightarrow 0$ в (8) дает распределение w_1 по сечению кругового сопла

$$(9) \quad w_1 = \frac{2N}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi^2 - \xi^\nu) \sin \nu \theta}{\nu(\nu^2 - 4)}$$

В частных случаях двух- и четырехъячейковой структуры вихревого потока отсюда имеем

$$(10) \quad w_1(N=2) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi^2 - \xi^{2k+1}) \sin(2k+1)\theta}{(2k+1)(2k-1)(2k+3)}$$

$$(11) \quad w_1(N=4) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^2(1 - \xi^{4k}) \sin 2(2k+1)\theta}{k(k+1)(2k+1)}$$

Фиг. 1, а иллюстрирует картины линий тока для двух вихрей при $\varepsilon=0.6$ (кривые 1-4 соответствуют значениям $\psi_{N=2}=1.274 \cdot 10^{-2}$, $2.548 \cdot 10^{-2}$, $3.822 \cdot 10^{-2}$, $5.096 \cdot 10^{-2}$). В качестве возможного приложения формулы (9) интересно отметить случай течения закрученного потока газа в сопле кругового сечения с радиальной перегородкой ($N=1$) [5].

Для определения динамических характеристик сопла помимо поля скоростей необходимо знать распределение плотности в потоке. Из (2) в принятых безразмерных переменных в рассматриваемом приближении получим

$$(12) \quad \rho = \rho_\infty (1 + 1/2(\gamma-1)M_0^2)^{1/(\gamma-1)} [1 - \varepsilon^2 M_0^2 (1/2(u^2 + v^2) + w_1 - w_0)]$$

$$M_0 = v_0 / [a_\infty^2 - 1/2(\gamma-1)v_0^2]^{1/2}, \quad u = v_1^{(1)} / v_w, \quad v = v_2^{(1)} / v_w$$

(v_0 и w_0 — значения v_z и w_1 на оси вихря, где $v_1 = v_2 = 0$).

В дальнейшем удобно ввести параметр

$$(13) \quad \alpha_* = \frac{\Phi_0 N}{R_* a_\infty} \sqrt{(\gamma-1)/2}$$

характеризующий интенсивность завихренности в газе, где $\Phi_0 = \oint v dl / 2\pi$ — циркуляция скорости по контуру L одной ячейки. Связь α_* с (M_0) определяется теоремой Стокса и в данном приближении имеет вид

$$(14) \quad \alpha_* = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} M_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2\right)^{-1/2}$$

Воспользовавшись формулой Грина

$$-\iint_S w_1 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) dx dy =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \oint_L w_1 \frac{\partial w_1}{\partial n} dl$$

(x, y — декартовы координаты, n — внешняя нормаль к L), можно получить одно общее кинематическое свойство слабо завихренных винтовых потоков

газа

$$(15) \quad \iint_S w_1 dS = \iint_S (u^2 + v^2) dS, \quad dS = dx dy$$

с учетом которого для расхода и тяги сопла будем иметь

$$(16) \quad Q = \rho_\infty a_\infty S \frac{M_0}{[1 + 1/2(\gamma - 1)M_0^2]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}} \left\{ 1 - \frac{8}{\gamma-1} \frac{1 + 1/2(\gamma-1)M_0^2}{M_0^2} \times \right. \\ \left. \times \alpha_*^2 [w_0(1 - M_0^2) + 1/2K(3M_0^2 - 2)] \right\}$$

$$(17) \quad R = \rho_\infty a_\infty^2 S \frac{1}{[1 + 1/2(\gamma - 1)M_0^2]^{1/(\gamma-1)}} \left\{ (1/\gamma)(1 + \gamma M_0^2) - \frac{8}{\gamma-1} \times \right. \\ \left. \times \alpha_*^2 [1 + 1/2(\gamma - 1)M_0^2] [w_0(1 - M_0^2) + 1/2K(3M_0^2 - 1)] \right\},$$

$$K = \iint_S w_1 dS/S$$

(Рассматривается простейший случай истечения в вакуум из сопла без расширяющейся части.)

Применяя далее принцип реализации максимального расхода газа через сопло, найдем дополнительные зависимости между параметрами M_0 , ε , α_* в критическом сечении

$$(18) \quad M_0 = 1 + [(\gamma + 1)/(\gamma - 1)] [2(\gamma + 1)w_0 - (3\gamma + 1)K]$$

$$(19) \quad \varepsilon = 2\alpha_* (\gamma + 1)^{1/2} / (\gamma - 1)^{1/2}$$

Используя (18), (19), из (16) и (17) получим теперь

$$(20) \quad Q = \rho_\infty a_\infty S \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \left(1 - 2 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} K \alpha_*^2 + \dots \right)$$

$$(21) \quad R = \rho_\infty a_\infty^2 S \frac{2}{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/(\gamma-1)} \left(1 - 4 \frac{\gamma}{\gamma - 1} K \alpha_*^2 + \dots \right)$$

В случае сопла кольцевого сечения с N вихрями в потоке с учетом (8) имеем

$$(22) \quad K = \frac{N^2}{\pi^2} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{v^2(v^2 - 4)^2(1 - \xi_1^2)(\xi_1^v - \xi_1^{-v})} [4(v-2)\xi_1^{-v}(1 - \xi_1^{2+v})^2 + \\ + 4(v+2)\xi_1^v(1 - \xi_1^{2-v})^2 + (v^2 - 4)(\xi_1^v - \xi_1^{-v})(1 - \xi_1^v)]$$

Для сопла кругового сечения ($\xi_1 = 0$)

$$(23) \quad K = \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 [N(2k+1) + 4]^2} = \\ = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\pi}{2N} + \frac{1}{\pi} \left[\psi \left(\frac{2}{N} \right) - 2\psi \left(\frac{4}{N} \right) - C \right] + \right. \\ \left. + \frac{4}{\pi N} \left[\psi' \left(\frac{4}{N} \right) - \frac{1}{4} \psi' \left(\frac{2}{N} \right) \right] \right\}$$

Здесь $\psi(z)$ и $\psi'(z)$ — первая и вторая логарифмические производные гамма-функции, а $C = 0.5772$ — постоянная Эйлера. Ниже приведены точные

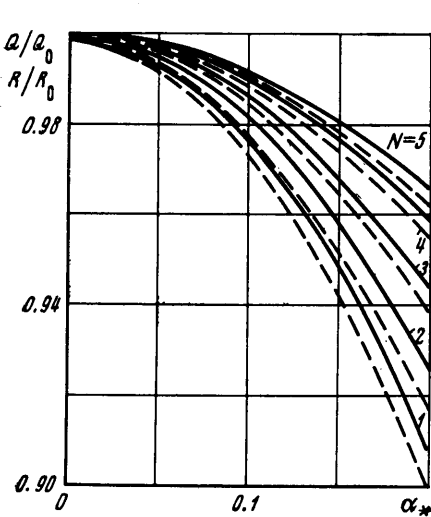
значения (23) для ряда случаев

$$(24) \quad K(N=1) = 1/4 - 16/9\pi^2, \quad K(N=2) = (\pi^2 - 8)/4\pi^2$$

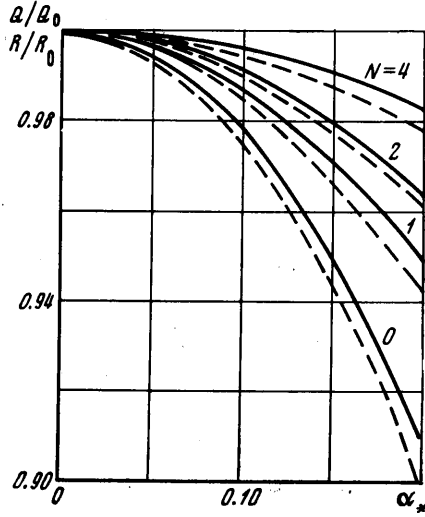
$$K(N=4) = \frac{\pi^2 - 12 \ln 2}{6\pi^2} \quad K(N=8) = \frac{3\pi^2 - 8\pi + 16\pi(\ln 2 - G)}{8\pi^2}$$

где $G=0.9160$ — постоянная Каталана.

Зависимости Q/Q_0 , R/R_0 от α_* , показывающие влияние интенсивности вторичных вихрей на расход (сплошные линии) и тягу (пунктирные линии) сопла, приведены на фиг. 2 (Q_0 и R_0 — расход и тяга сопла при одно-



Фиг. 2



Фиг. 3

мерном истечении газа, $\gamma=1.25$). На той же фигуре под индексом 0 даны кривые, соответствующие течению вращающегося потока в сопле кругового сечения [4]. Видно, что с ростом числа N вихревых ячеек влияние завихренности на расходные и тяговые характеристики сопла ослабевает.

Выше был рассмотрен случай течения, когда границы вихрей образовывались диаметрами и контурами сопла. В принципе, однако, возможно появление вихревого движения с иными конфигурациями областей. Рассмотрим, например, круговую область, разделенную хордой (фиг. 1, б). В bipolarных координатах (α, β) из (2), (4) имеем

$$(25) \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \beta^2} + \frac{\sin^2 \delta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} = 0$$

с граничными условиями

$$(26) \quad w_1|_{\beta_1=0} = w_1|_{\beta_2=\delta} = 0$$

Интегральное преобразование Фурье дает решение (25), (26) в виде

$$(27) \quad w_1(\alpha, \beta) = \frac{\sin \delta}{2} \left\{ \frac{\sin(\delta - \beta)}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} - \frac{\sin \delta}{2\pi^2} \operatorname{Re} \left\langle \zeta \left[2, \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta + i\alpha}{\pi} \right) \right] + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \zeta \left[2, \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\beta + i\alpha}{\pi} \right) \right] \right\rangle + 2 \sin \delta \int_0^{\infty} \frac{\omega \operatorname{cth} \omega \delta \operatorname{sh} \omega \delta}{\operatorname{sh} \omega \pi} \cos \omega \alpha d\omega \right\}$$

где $\zeta(z, q)$ — дзета-функция Римана.

Используя далее (27), имеем

$$(28) \quad K = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \frac{1}{12} [\sin 2\delta_1 (2 \sin^2 \delta_1 - 3) + \sin 2\delta_2 (2 \sin^2 \delta_2 - 3)] - \right. \\ \left. - 4\pi \int_0^{\infty} \omega^2 \operatorname{sh} \omega (\delta_1 + \delta_2) d\omega / (\operatorname{sh} \omega \delta_1 \operatorname{sh} \omega \delta_2 \operatorname{sh}^2 \omega \pi) \right\}$$

На фиг. 3 приведены зависимости Q/Q_0 , R/R_0 от α_* при $\gamma=1.25$ для различного расположения границы вихрей (кривые 1–5 соответствуют значениям $h=0, 1/8, 1/4, 3/8, 1/2$, $h=H/2R_*$, $\delta=2 \arcsin \sqrt{h}$, сплошные линии – расход, пунктирные – тяга). Видно, что среди приведенных случаев различной конфигурации двух ячеек наибольшие расход и тяга сопла кругового сечения реализуются при одинаковых вихревых областях $h=1/2$, $\delta=\pi/2$.

Аналогично разобраным выше примерам ячейкового вихревого течения по круговым соплам могут быть рассчитаны характеристики сопел с другими конфигурациями критического сечения. Ниже приводятся формулы для некоторых таких случаев при наличии в потоке только одного вихря.

Эллипс. $K=s^2/[4(1+s^2)]$, $s=b/a$ (b и a – полуоси эллипса). Сопла эллиптического сечения при равных S и α_* имеют тем меньше отношения Q/Q_0 , R/R_0 , чем меньше разность $\Delta=|1-s|$. Минимальными величинами отношений обладает сопло кругового сечения.

Прямоугольник.

$$K = \frac{1}{12} \left[1 - \frac{192a}{\pi^5 b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \pi b (2k+1) / (2a)}{(2k+1)^5} \right]$$

(b , a – стороны прямоугольника).

Наименьшие отношения Q/Q_0 , R/R_0 имеет квадрат. Разделяя его на две ячейки, можно показать, что наибольшие Q/Q_0 , R/R_0 имеет поток с внутренней границей вихревых областей, проходящей по диагонали квадрата.

Равносторонний треугольник. $K=1/80$ (характерный размер – сторона треугольника).

Равнобедренный прямоугольный треугольник.

$$K = \frac{1}{12} - \frac{16}{\pi^5} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \operatorname{ch} k\pi) / (k^5 \operatorname{sh} k\pi)$$

(характерный размер – половина гипотенузы).

Проводя исследование изопериметрической задачи о геометрической конфигурации вихревой ячейки в потоке, обеспечивающей экстремальные

значения интегралу $\iint_S w_1 dS/S$, можно указать два общих свойства рас-

считываемых течений:

1) из всех возможных конфигураций критического сечения сопла с одинаковой площадью наименьший расход и тягу для циркуляционного потока с одним вихрем имеет сопло кругового сечения;

2) сопло с любой конфигурацией критического сечения при движении по нему вихревого потока с заданным числом ячеек имеет максимальные расход и тягу в том случае, когда суммарный периметр всех существующих в потоке элементарных вихревых областей максимален.

В заключение заметим, что рассмотренное приближение не учитывает изменения интегральных характеристик, связанного с наличием конечного радиуса кривизны R_* профиля сопла в критическом сечении. Однако из анализа известных результатов по истечению незакрученного потока из круглого сопла [6] следует, что такое изменение имеет порядок $\alpha_*^2 R_*/R_k$ или R_*^2/R_k^2 . В связи с этим оценки приводят к выводу о применимости полученного в данной работе приближения при выполнении условия $R_*/R_k \leq \alpha_*$ ($\alpha_* \ll 1.0$).

Поступила 8 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Flandro G. A.* Roll torque and normal force generation in acoustically unstable rocket motors. *AIAA Journal*, 1964, vol. 2, No. 7.
2. *Илюхин В. С., Левичек М. И., Марголин А. Д., Похил П. Ф.* Исследование акустической неустойчивости горения порохов методом скоростной киносъемки. Сб. «Вибрационное горение». Изд-во Казанск. ун-та, 1970.
3. *Swithenbank J., Sotter G.* Vortex generation in solid propellant rockets. *AIAA Journal*, 1964, vol. 2, No. 7.
4. *Гостинцев Ю. А.* Расходные характеристики сопла при истечении винтового потока газа, *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1969, № 4.
5. *Гостинцев Ю. А., Успенский О. А., Похил П. Ф.* Винтовые потоки с многократной циркуляцией в каналах произвольной формы. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1973, № 2.
6. *Гудерлей К. Г.* Теория околосзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.