УДК 536.244

СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛООБМЕНА С УЧЕТОМ ИЗЛУЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ

И. Л. ДУНИН, В. В. ИВАНОВ

(*Новосибирск*)

Дано дальнейшее развитие проведенных в [1] исследований процессов теплового переноса в пограничных слоях диатермичного газа на излучающих поверхностях.

Исследуемая физическая модель представляет собой излучающую пластину толщиной b, на которой формируется ламинарный пограничный слой прозрачного газа с постоянными в невозмущенном течении температурой T_∞ и скоростью U_∞. На поверхности пластины задан тепловой поток q_w, который может включать в себя падающее излучение, а также внутренние источники тепла. Далее принимается, что процесс теплообмена стационарен, температурный градиент поперек пластины и на ее передней кромке отсутствует, а изменение физических свойств среды подчиняется соотношению Чепмена и Рубезина

$$\frac{\mu}{\mu_\infty}=\left(\frac{T_w}{T_\infty}\right)^{1/2}\left(\frac{T_\infty+T_s}{T_w+T_s}\right)\frac{T}{T_\infty}=C\frac{T}{T_\infty};\qquad \mathrm{Pr},\ C_p=\mathrm{const}$$

При указанных допущениях задача о тепловом пограничном слое заключается в интегрировании системы уравнений

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}+\frac{1}{2}\mathrm{Pr}\,\varphi(\tau)\frac{\partial\theta}{\partial\tau}-\mathrm{Pr}\,\varphi'(\tau)x\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\mathrm{Pr}\frac{U_\infty^2}{C_pT_0}[\varphi''(\tau)]^2 \tag{1}$$

$$\lambda_\infty\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\left(\frac{\nu_\infty x}{CU_\infty}\right)^{1/2}\left[\varepsilon\sigma_0T_0^3(\theta^4-\theta_*^4)-b\lambda_w\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right],\qquad \tau=0 \tag{2}$$

$$\theta=\theta_\infty,\qquad \tau\to\infty;\qquad \partial\theta/\partial x=0,\qquad x=0 \tag{3}$$

$$\theta=\frac{T}{T_0},\qquad T_0=T_\infty+\frac{\sqrt{\mathrm{Pr}}\,U_\infty^2}{2C_p},\qquad \theta_*=\left(\frac{q_w}{\varepsilon\sigma_0T_0^4}\right)^{1/4}$$

$$\tau=Y\left(\frac{U_\infty}{\nu_\infty x}\right)^{1/2},\qquad Y=C^{-1/2}\int_0^y\frac{\rho}{\rho_\infty}dy$$

где $\varphi(\tau)$ – функция тока Блазиуса.

Решения сопряженных задач теплового переноса с краевым условием типа (2) были получены в [2, 3] путем сведения их к нелинейным интегродифференциальным уравнениям, где неизвестной функцией являлась температура поверхности. В [2] анализ ограничен случаем малых расстояний от кромки пластины, в [3] представлены асимптотические разложения, пригодные как для малых, так и для больших x. Основная сложность решения получающихся интегродифференциальных уравнений связана с их нелинейной формой. Обычно здесь используются численные методы с применением быстродействующих вычислительных машин. Однако даже для рассмотренных в [2, 3] случаев очень малых или очень больших значений координаты x такие численные решения приводят к значительным трудностям вычислительного характера и затрудняют параметрическое исследование процесса теплообмена.

В настоящей работе предлагается иной подход к решению задачи (1) – (3), основанный на использовании нелинейных интегральных преобразований [4]. Этот способ позволяет эффективно и без существенных погрешностей линеаризовать исходную систему уравнений и в сочетании с ЭВМ значительно быстрее получать вполне приемлемые по точности результаты.

Предварительно распределение температуры в пограничном слое представим в виде

$$\theta(x,\tau)=\vartheta(x,\tau)+{}^1/_2[\vartheta_*(\tau)-\vartheta_*(0)]U_\infty^2/(C_pT_0) \tag{4}$$

Здесь $\vartheta_*(\tau)$ – известное решение задачи о термометре [5], а $\vartheta(x,\tau)$ – интеграл уравнения энергии (1) без диссипативного члена с краевыми условиями (2) и (3), где $\vartheta_\infty=1$.

Применяем теперь к системе для температуры $\vartheta(x,\tau)$ нелинейное интегральное преобразование

$$W(x,\tau)=\exp\left\{-\frac{p}{2\theta_*^3}\left[\operatorname{Arcth}\frac{\vartheta(x,\tau)}{\theta_*}+\operatorname{arc\,tg}\frac{\vartheta(x,\tau)}{\theta_*}\right]\right\} \tag{5}$$

номограммированное в [6].

Находим первые и вторые производные по x и τ

$$\frac{\partial\vartheta/\partial x}{\vartheta^4-\theta_*^4}=\frac{1}{Wp}\frac{\partial W}{\partial x},\qquad \frac{\partial^2\vartheta/\partial x^2}{\vartheta^4-\theta_*^4}=\frac{1}{Wp}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial\vartheta/\partial x}{\vartheta^4-\theta_*^4}\right)^2(4\vartheta^3-p)$$

$$\frac{\partial\vartheta/\partial \tau}{\vartheta^4-\theta_*^4}=\frac{1}{Wp}\frac{\partial W}{\partial \tau},\qquad \frac{\partial^2\vartheta/\partial \tau^2}{\vartheta^4-\theta_*^4}=\frac{1}{Wp}\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}+\left(\frac{\partial\vartheta/\partial \tau}{\vartheta^4-\theta_*^4}\right)^2(4\vartheta^3-p)$$

Подставляя их значения в уравнение энергии и краевые условия, получаем преобразованную систему для новой переменной $W=W(x,\tau)$. При этом граничные условия запишутся как

$$\lambda_\infty\frac{\partial W}{\partial\tau}=\left(\frac{\nu_\infty x}{CU_\infty}\right)^{1/2}\left\{\varepsilon\sigma_0T_0^3pW-b\lambda_w\left[\frac{\partial^2W}{\partial x^2}+F_1(x,0)\right]\right\},\qquad \tau=0$$

$$F_1(x,0)=pW\left(\frac{\partial\vartheta/\partial x}{\vartheta^4-\theta_*^4}\right)^2(4\vartheta^3-p)$$

$$W=\exp\left[-\frac{p}{2\theta_*^3}\left(\operatorname{Arcth}\frac{1}{\theta_*}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\theta_*}\right)\right]=W_\infty,\qquad \tau\to\infty,$$

$$\frac{\partial W}{\partial x}=0,\qquad x=0$$

а в преобразованном уравнении энергии появится нелинейное слагаемое

$$F_2(x,\tau)=pW\left(\frac{\partial\vartheta/\partial\tau}{\vartheta^4-\theta_*^4}\right)^2(4\vartheta^3-p)$$

Структура полученных нелинейных комплексов F_1 и F_2 позволяет легко осуществить их минимизацию [1, 4]. Так как $1>\vartheta(x,\tau)>\theta_*$, а F_1, $F_2\to 0$, когда $p\to 4\vartheta^3$, корректирующий параметр следует выбирать по формуле $p=4[(1+\theta_*)/2]^3$. Чтобы получить еще большую точность, расчетный интервал $|1-\theta_*|$ можно разбить на несколько отрезков, принимая в каждом из них $p_i=4\vartheta_i^3$.

Для построения интегродифференциального уравнения, определяющего преобразованную температуру поверхности $W_w=W(x,0)$, используем линеаризованное (при $F_1=0$) граничное условие, в котором конвективный член представим в форме [7]

$$\lambda_\infty\frac{\partial W_w}{\partial\tau}=\left(\frac{\nu_\infty x}{U_\infty}\right)^{1/2}\left\{\int_0^x\alpha(x,\xi)\frac{dW(\xi)}{d\xi}d\xi+\alpha(x,0)[W_w(0)-W_\infty]\right\} \tag{6}$$

$$\alpha(x,\xi)=0.332(\lambda_\infty/x)\mathrm{Re}_x^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}[1-(\xi/x)^{3/4}]^{-1/3}$$

В этом случае будем иметь

$$\frac{\beta}{X^2}\frac{d^2W_w}{dX^2}-\frac{\beta}{X^3}\frac{dW_w}{dX}-pW_w-\frac{1}{X}[W_w(0)-W_\infty]- -\frac{1}{X^{1/2}}\int_0^X(X^{3/2}-\mathrm{E}^{3/2})^{-1/3}\frac{dW_w(\mathrm{E})}{d\mathrm{E}}d\mathrm{E}=0 \tag{7}$$

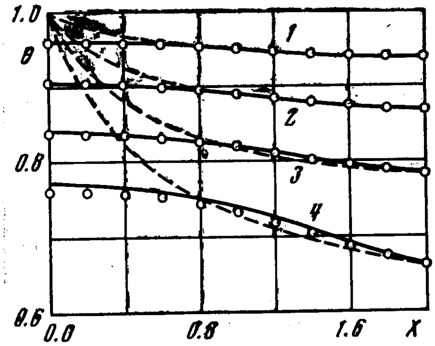
$$dW_w/dX=0,\quad X=0;\qquad W_w=0,\quad X\to\infty,\qquad X=Bx^{1/2},\qquad \mathrm{E}=B\xi^{1/2} \tag{8}$$

$$\beta=\frac{b\lambda_w}{4\varepsilon\sigma_0T_0^3}B^4,\qquad B=\frac{\varepsilon\sigma_0T_0^3}{0.332\lambda_\infty\mathrm{Pr}^{1/3}}\left(\frac{\nu_\infty}{CU_\infty}\right)^{1/2}$$

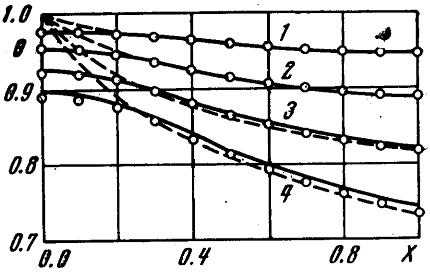
Для не слишком больших значений обобщенной переменной решение задачи (7), (8) можно записать в виде ряда

$$W_w(X)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nX^n \tag{9}$$

Благодаря линейной форме интегродифференциального уравнения (7) и крае-



Фиг. 1



Фиг. 2

вым условиям (8) удается получить рекуррентные формулы для коэффициентов ряда (9)

$$A_1=A_2=0,\qquad A_3=\frac{A_0-W_\infty}{3\beta},\qquad A_n=\frac{A_{n-3}D_{n-3}+pA_{n-4}}{n(n-2)\beta}$$

$$D_n=\frac{\Gamma(^2/_3n+1)\,\Gamma(^2/_3)}{\Gamma[^2/_3(n+1)]},\qquad n=4,5,6,\ldots$$

где Г – гамма-функция.

Коэффициент $A_0=W_w(0)$ находился при помощи ЭВМ путем сращивания в подходящей точке X решения (9) и решения для нетеплопроводной ($\beta=0$) пластины, аналогично тому, как это сделано в [2, 3].

При $\beta=0$ постановка задачи вместе с решением имеют вид

$$pW_w+\frac{1}{X^{1/2}}\int_0^X(X^{3/2}-\mathrm{E}^{3/2})^{-1/3}\frac{dW_w(\mathrm{E})}{d\mathrm{E}}\,d\mathrm{E}=0 \tag{10}$$

$$W_w(0)=W_\infty,\qquad W_w(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_np^nX^n$$

а значения величин γ_n определены в [8].

Искомая температура вычислялась затем по формулам (9), (5) и (4).

На фиг. 1, 2 приведены характерные кривые, показывающие изменения температуры вдоль излучающей пластины. Точки – расчет по предлагаемой методике, сплошные линии – «точные» численные решения исходного нелинейного интегродифференциального уравнения, построенного на основе (2). При этом конвективный член, стоящий в левой части выражения (2), определялся по уравнению (6) с заменой W_w на ϑ. Основными параметрами задачи являлись $Q_w=(q_w/\varepsilon\sigma_0T_0^4)=0.75$, 0.50, 0.25, 0.00 (кривые *1–4* соответственно) и $\beta=1.00$ (фиг. 1), $\beta=0.01$ (фиг. 2). В расчетах процесса переноса, когда $Q_w=0$, использовалось линеаризующее преобразование

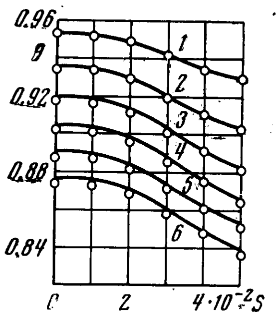
$$W(x,\tau)=\exp\left[-{}^1/_3p\vartheta^{-3}(x,\tau)\right]$$

а температура на внешней границе пограничного слоя и нелинейные комплексы для этого предельного случая получались равными

$$W=\exp(-p/3)=W_\infty,\qquad \tau\to\infty$$

$$F_1=\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\vartheta^{-4}(4\vartheta^3-p),\qquad F_2=\frac{\partial W}{\partial\tau}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\vartheta^{-4}(4\vartheta^3-p)$$

При Q_w=0.75, 0.50, 0.25 вычисления производились без деления области изменения температуры $|1-\theta_*|$ на отрезки, а при Q_w=0.00 этот диапазон делился на два одинаковых интервала: 1–0.5 и 0.5–0. Поскольку расчеты поверхностных температур ограничены областью небольших X, оказывалось достаточным использовать лишь первый интервал, для которого корректирующий параметр выбирался по формуле $p=4[(1+0.5]/2]^3$. Пунктирные линии фиг. 1 построены на основе уравнения (10), сшивание решений (9) и (10) проводилось в точках X=1, когда β=0.01, и X=2, когда β=1.00. Как видно из графика, разность между точным численным решением и значениями поверхностных температур, найденными по формулам (9), (5) и (4), нигде не превышет 1.5%.



Фиг. 3

На фиг. 3 сопоставлены значения температур, вычисленные по предлагаемому способу (точки), с данными [2] (сплошные линии), относящиеся к области очень малых x. Для возможности сравнения все параметры процесса теплопереноса отнесены к температуре торможения

$$T_{00}=T_\infty+{}^1/_2U_\infty{}^2/C_p$$

а постоянная Чепмена и Рубезина C принята равной единице. Абсцисса графика – обобщенная переменная

$$S\equiv\frac{SK_x}{\mathrm{Re}_x{}^{1/2}}=\frac{\varepsilon\sigma_0T_{00}{}^3}{\lambda_\infty}\left(\frac{\nu_\infty x}{U_\infty}\right)^{1/2}$$

Расчеты проведены для значений Q_w=0.4096, 0.2401, 0.1296, 0.0625, 0.0256, 0.0081 (кривые *1–6* соответственно), β=0.00023, Pr=0.738. Диапазон изменения температур на интервалы не разбивался. Можно видеть, что результаты обоих методов практически совпадают.

В заключение следует отметить, что приведенный выше способ расчета может быть распространен и на другие задачи теплообмена с излучением. В частности, аналогичный подход был использован для анализа процессов переноса в турбулентном пограничном слое. Благодаря же предварительной линеаризации исходной задачи, этот метод обеспечивает заметную экономию машинного времени.

Поступила 30 XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов В. В., Дунин И. Л., Медведев Г. Г.* Расчет пограничного слоя прозрачного газа на излучающей поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.
2. *Соколова И. Н.* Температура пластинки в сверхзвуковом потоке с учетом излучения. Сб. теорет. работ по аэродинамике. М., Оборонгиз, 1957.
3. *Кумар И. Дж., Бартман А. Б.* Сопряженная задача теплопереноса в ламинарном пограничном слое сжимаемого газа с излучением. Тепло- и массоперенос, т. 9. Минск, «Наука и техника», 1968, т. 9.
4. *Иванов В. В.* Исследование переноса тепла в условиях нелинейной теплопроводности. Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1966, № 4.
5. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
6. *Иванов В. В., Дунин И. Л.* Температура поверхности при аэродинамическом нагреве. Теплофизика высоких температур, 1971, т. 9, № 6.
7. *Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М.* Теория тепло- и массообмена. М., Госэнергоиздат, 1961.
8. *Акривос А., Шамбре П.* Ламинарный пограничный слой с реакциями на поверхности. Сб. «Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций». М., Изд-во иностр. лит., 1962.