Теоретические значения γ для эллипсоидальной статистической модели (кривая 3 на фигуре) сопоставлены с экспериментальными данными [9], причем под экспериментальным числом Кнудсена понимается отношение среднего свободного пробега, рассчитанного для средних температур и давлений, к радиусу капилляра.

Расхождение экспериментальных данных для разных газов обусловлено различной степенью аккомодации тангенциального импульса молекул на поверхности. В связи с этим совпадение экспериментальных данных для легких газов с теоретическими является случайным. По-видимому, корректному теоретическому решению для капилляра с граничными условиями полностью диффузного отражения молекул стенками канала лучше будут соответствовать экспериментальные данные для тяжелых газов.

Тем не менее хорошее в целом согласие теоретических и экспериментальных данных указывает на слабую зависимость эффекта термомолекулярной разности давлений от конкретной геометрии канала.

Представляет также интерес сопоставить полученные результаты с данными работы [10], в которой приводится решение аналогичных задач для полного уравнения Больцмана (максвелловские молекулы) методом Монте-Карло. Хорошее согласие результатов, полученных в данной работе, с результатами работы [10] во всем диапазоне чисел Кнудсена позволяет сделать вывод о вполне удовлетворительной аппроксимации полного оператора соударений Больцмана его статистическими моделями. Это положение остается в силе по крайней мере при малых возмущениях в газе и для низших (имеющих физический смысл) моментов функции распределения.

Поступила 17 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
2. *Gross E. P., Jackson E. A.* Kinetic models and the linearized Boltzmann equation. Phys. Fluids, 1959, vol. 2, No. 4. (Рус. перев.: Кинетические модели и линеаризованное уравнение Больцмана. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1960, № 5.)
3. *Holway L. H.* New statistical models in kinetic theory: methods of construction. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 9. (Русск. перев.: Новые статистические модели для кинетической теории и методы их построения. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1967, № 6.)
4. *Шахов Е. М.* Метод аппроксимации кинетического уравнения Больцмана. В кн. «Численные методы в теории разреженных газов». М., ВЦ АН СССР, 1969.
5. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
6. *Cercignani C., Pagani C. D.* Variational approach to boundary – value problems in kinetic theory. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 6.
7. *Породнов Б. Т., Суетин П. Е., Борисов С. Ф.* Течение газов в плоской щели в широком диапазоне чисел Кнудсена. Ж. техн. физ., 1970, т. 40, № 11.
8. *Ивченко И. Н., Яламов Ю. И.* Тепловое скольжение неоднородно нагретого газа вдоль твердой плоской поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6.
9. *Podgurski H. H., Davies F. N.* Thermal transpiration at low pressure. J. Phys. Chem., 1961, vol. 65, No. 8.
10. *Горелов С. Л., Коган М. Н.* Течение разреженного газа между двумя параллельными пластинами. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 6.

УДК 536.24.01

РАДИАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ ПРИ ТЕПЛООБМЕНЕ В ПЛОСКОМ СЛОЕ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ И РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Л. А. ДОМБРОВСКИЙ

(Москва)

Исследовано радиационное равновесие в плоском слое поглощающей и анизотропно рассеивающей среды. Получено аналитическое решение задачи в первом приближении метода двойных сферических гармоник. Обсуждается точность полученного решения и роль анизотропии рассеяния при радиационном равновесии.

1. Рассматривается теплообмен излучением между двумя плоскими параллельными стенками с температурами T_{w1} и T_{w2}, разделенными поглощающей и рассеивающей средой. При отсутствии переноса энергии конвекцией и теплопроводностью в среде устанавливается радиационное равновесие и уравнение энергии принимает вид

$$dq/d\tau=0 \tag{1.1}$$

где q – полный поток теплового излучения, τ – оптическая координата.

Сформулируем задачу о радиационном равновесии в случае серой среды и серых изотропно излучающих стенок. Уравнение переноса излучения и граничные условия имеют вид

$$\mu\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\varphi=\frac{1-\alpha}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\psi'\int\limits_{-1}^{1}\varphi(\tau,\mu')G(\mu_0)\,d\mu'+\alpha\frac{\sigma}{\pi}T^4 \tag{1.2}$$

$$\mu=\cos\vartheta,\qquad \mu_0=\mu\mu'+\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\psi-\psi')$$

$$\varphi(0,\mu)=(1-\varepsilon_{w_1})\Phi^-(0)+\varepsilon_{w_1}\sigma/\pi T_{w_1}^4$$

$$\varphi(\tau_0,-\mu)=(1-\varepsilon_{w_2})\Phi^+(\tau_0)+\varepsilon_{w_2}\sigma/\pi T_{w_2}^4,\qquad 0<\mu<1 \tag{1.3}$$

где $\Phi^{\mp}=\varphi(\tau,\mp\mu)$ для зеркального отражения и $2\int\limits_0^{\mp1}\varphi(\tau,\mu)\mu\,d\mu$ для изотропного отражения. Здесь φ – интегральная интенсивность излучения, α – отношение коэффициента поглощения к коэффициенту ослабления, G – индикатриса рассеяния, ε_{w_1} и ε_{w_2} – излучательные способности стенок, τ_0 – оптическая толщина слоя. Поток излучения определяется соотношением

$$q=2\pi\int\limits_{-1}^{1}\varphi(\tau,\mu)\mu\,d\mu \tag{1.4}$$

В рассматриваемой постановке задача о радиационном равновесии не имеет аналитического решения.

2. В случае изотропного рассеяния уравнение переноса (1.2) существенно упрощается

$$\mu\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\varphi=\frac{1-\alpha}{2}\int\limits_{-1}^{1}\varphi\,d\mu+\alpha\frac{\sigma}{\pi}T^4 \tag{2.1}$$

Интегрируя (2.1) по μ с учетом (1.1) и (1.4), можно получить

$$\int\limits_{-1}^{1}\varphi\,d\mu=2\frac{\sigma}{\pi}T^4,\qquad \mu\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\varphi=\frac{\sigma}{\pi}T^4$$

Видно, что если среда рассеивает изотропно, решение не зависит от относительной величины рассеяния.

Задача о радиационном равновесии при изотропном рассеянии решалась в ряде работ [1–4] с использованием различных приближенных методов. В [5] решение для произвольной оптической толщины слоя сведено к табулированным функциям. Более сложная задача о радиационном равновесии в анизотропно рассеивающей среде, какой является, например, слой из крупных частиц [6], ранее не рассматривалась.

3. В данной работе задача о радиационном равновесии в анизотропно рассеивающей среде решается в первом приближении метода двойных сферических гармоник – DP_1-приближении [7]. В DP_1-приближении с учетом только первого момента индикатрисы рассеяния уравнение переноса (1.2) и граничные условия (1.3) заменяются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями

$$\begin{cases}\dfrac{d}{d\tau}\begin{Vmatrix}g_0\\ h_1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}3(1+\mu\bar\beta/2) & 3(1-\bar\mu\beta/2)\\ 3 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}g_1\\ h_0\end{Vmatrix}, & \beta=1-\alpha\\ \dfrac{d}{d\tau}\begin{Vmatrix}g_1\\ h_0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\alpha & 3\\ 3\alpha & 3\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}g_0\\ h_1\end{Vmatrix}-4\sigma T^4\alpha\begin{Vmatrix}1\\ 3\end{Vmatrix}, & q=(g_1-h_0)/2\end{cases} \tag{3.1}$$

$$\tau=0,\ A_1\begin{Vmatrix}g_0\\ h_1\end{Vmatrix}-B_1\begin{Vmatrix}g_1\\ h_1\end{Vmatrix}=4\varepsilon_{w1}\sigma T_{w1}^4\begin{Vmatrix}1\\ 0\end{Vmatrix}; \tag{3.2}$$

$$\tau=\tau_0,\quad t_2\begin{Vmatrix}g_0\\ h_1\end{Vmatrix}+B_2\begin{Vmatrix}g_1\\ h_0\end{Vmatrix}=4\varepsilon_{w2}\sigma T_{w2}^4\begin{Vmatrix}1\\ 0\end{Vmatrix}$$

$$(3.3)\qquad A_i=\varepsilon_{w1},\ B_i=(2-\varepsilon_{w2})\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}$$

$$(3.4)\qquad A_i=\begin{Vmatrix}\varepsilon_{wi} & \dfrac{1-\varepsilon_{wi}}{2}\\ 0 & 1\end{Vmatrix},\qquad B_i=\begin{Vmatrix}\dfrac{\varepsilon_{wi}-1}{2} & 2-\varepsilon_{wi}\\ 1 & 0\end{Vmatrix}$$

Здесь (3.3) соответствует зеркальному отражению, а (3.4) – изотропному. Заметим, что в [7] граничное условие на изотропно отражающей стенке сформулировано неверно; результаты расчетов в [7] практически совпадают со случаем зеркального отражения. Принимая во внимание условие радиационного равновесия (1.1), вместо (3.1) получаем

$$(3.5)\qquad g_0=4\sigma T^4,\qquad dh_1/d\tau=4g_1-2q$$

$$dg_0/d\tau=6g_1-6q(1-\bar{\mu}\beta/2),\qquad dg_1/d\tau=3h_1$$

В результате решения системы (3.5) с граничными условиями (3.2) получаются соотношения для потока излучения и профиля температуры

$$(3.6)\qquad \frac{q}{\sigma(T_{w_1}{}^4-T_{w_2}{}^4)}=\frac{Q}{1+a},\qquad \frac{T^4-T_{w_2}{}^4}{T_{w_1}{}^4-T_{w_2}{}^4}=\frac{\theta+b}{1+a}$$

$$Q^{-1}={}^3/_4(1-\bar{\mu}\beta)\tau_0+(1+3t\sqrt{3}/4)/(1+2t/\sqrt{3}),\qquad t=th\sqrt{3}\tau_0$$

$$\theta=1-Q\left[3(1-\bar{\mu}\beta)\tau+\frac{2+t\sqrt{3}}{1+2t/\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{sh}\sqrt{3}\tau\,\mathrm{ch}\sqrt{3}(\tau_0-\tau)}{(1+2t/\sqrt{3})\,\mathrm{ch}\sqrt{3}\tau_0}\right]\Big/4$$

Здесь $a(\tau_0,\varepsilon_{w_1},\varepsilon_{w_2})$ и $b(\tau_0,\varepsilon_{w_1},\varepsilon_{w_2})$ – функции, обращающиеся в нуль при $\varepsilon_{w_1}=\varepsilon_{w_2}=1$. В P_1-приближении, эквивалентном методу экспоненциального представления ядра, который использован в [2], универсальные функции Q и θ имеют вид

$$Q=[{}^3/_4(1-\bar{\mu}\beta)\tau_0+1]^{-1},\qquad \theta=1+Q[{}^3/_4(1-\bar{\mu}\beta)\tau+{}^1/_2]$$

При изотропном рассеянии результаты, полученные в P_1- и DP_1-приближениях, можно сравнить с точным решением. Сравнение величин Q в различных решениях показано ниже

τ_0	P_1	DP_1	Точное решение [5]
0.1	0.9302	0.9127	0.9157
0.2	0.8696	0.8441	0.8491
0.4	0.7692	0.7401	0.7458
0.6	0.6896	0.6626	0.6672
0.8	0.6250	0.6013	0.6046
1.0	0.5714	0.5510	0.5532
1.5	0.4706	0.4563	0.4572
2.0	0.4000	0.3896	0.3900
2.5	0.3478	0.3399	0.3401
3.0	0.3077	0.3015	0.3016
10.0	0.1176	0.1167	0.1167

Отсюда следует, что DP_1-приближение значительно точнее, чем P_1-приближение. Максимальное расхождение результатов DP_1 с точным решением не превышает 1%. Особенно высока точность DP_1-приближения при большой оптической толщине слоя При $\tau_0\gg1$ из (3.6) следует:

$$(3.7)\qquad Q\approx{}^4/_3[(1-\bar{\mu}\beta)\tau_0+1.4226]^{-1}$$

В то же время точное решение при $\tau_0 \gg 1$ и $\bar{\mu}=0$ [5] дает

$$Q \approx {}^4/_3 [\tau_0 + 1.4209]^{-1}$$

Из (3.7) видно, что в случае оптически толстого слоя анизотропное рассеяние можно учесть в транспортном приближении, т. е. вводя эффективную оптическую толщину

$$\tau^* = (1 - \bar{\mu}\beta)\tau_0 \tag{3.8}$$

Для оптически тонкого слоя ($\tau_0 \ll 1$) формулы (3.6) также упрощаются. Например, для величины Q получаем

$$Q \approx [(1 - {}^3/_4 \bar{\mu}\beta)\tau_0 + 1]^{-1} \approx 1 - (1 - {}^3/_4 \bar{\mu}\beta)\tau_0$$

Интересно отметить, что в DP_0-приближении [7] для произвольной оптической толщины слоя $Q^{-1} = 1 + (1 - {}^3/_4 \bar{\mu}\beta)\tau_0$, т. е. при $\tau_0 \ll 1$ DP_0-приближение оказывается более точным, чем P_1-приближение, тогда как при $\tau_0 \gtrsim 1$ предпочтительнее P_1-приближение. Как и следовало ожидать, анизотропия рассеяния не играет существенной роли для оптически тонких слоев.

4. Для иллюстрации роли анизотропного рассеяния при радиационном равновесии рассмотрим следующий идеализированный пример. Над плоской стенкой с температурой 2000° K находится оптически толстое плоскопараллельное облако из однородных сферических частиц. Снаружи на частицы падает серое излучение, соответствующее температуре 3500° K.

Частицы одинаковые; радиус частиц 1 *мкм*. Комплексный показатель преломления материала частиц не зависит от температуры и слабо зависит от длины волны; для оценки можно принять $m=4-4i$ (такая модель позволяет качественно описать свойства частиц вольфрама [8]). Рассматриваемые частицы являются крупными [6] в диапазоне длин волн, существенном для температур 2000–3500° K. Поэтому среда из таких частиц серая [6]. Расчеты по теории Ми дают $\bar{\mu} \approx 0.60$, $\beta \approx 0.75$. Подставляя эти величины в (3.8), получаем $\tau^* \approx 0.55\tau_0$, т. е. неучет анизотропии рассеяния приводит к ошибке порядка 80%.

5. Таким образом, DP_1-приближение позволяет получить аналитическое решение задачи о радиационном равновесии в плоском слое анизотропно рассеивающей среды. Точность полученного решения в частном случае изотропного рассеяния лежит в пределах 1%, что значительно выше точности P_1-приближения. В то же время P_1-приближение точнее, чем DP_0-приближение для оптических толщин больше 0.3. При наличии частиц с преимущественным рассеянием вперед или назад и при большой оптической толщине слоя для правильной оценки потока излучения необходимо учитывать анизотропное рассеяние. Учет анизотропии рассеяния может быть проведен в транспортном приближении.

Поступила 14 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Viskanta R., Grosh R. J.* Heat transfer in a thermal radiation absorbing and scattering medium. Proc. Internat. Heat Transfer. Conf., Boulder, Colorado, 1961.
2. *Lick W.* Energy transfer by radiation and conduction. Proc. 1963 Heat Transfer and Fluid Mech. Inst., Pasadena, Calif., 1963. Stauford, Calif. Univ. Press., 1963.
3. *Cess R. D., Sotak A. E.* Radiation heat transfer in an absorbing medium bounded by a specular reflector. ZAMP, 1964, Bd 15, Nr 6.
4. *Дрейслер.* Аппроксимация теплоизлучения в газах рассеянием со скачкообразными граничными условиями. Теплопередача, 1964, т. 86, № 2.
5. *Heaslet M. A., Warming R. F.* Radiative transport and wall temperature slip in an absorbing planar medium. Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1965, vol. 8, No. 7.
6. *Хюлст Г. ван де.* Рассеяние света малыми частицами. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
7. *Домбровский Л. А.* Расчет радиационного теплообмена в плоскопараллельном слое поглощающей и рассеивающей среды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4.
8. *Barnes B. T.* Optical constants of incandescent refractory metals. J. Opt. Soc. Amer., 1966, vol. 56, No.11.