

зовать вместо расчета по формулам (2) более точную методику, основанную на использовании (1). На практике форма исследуемого тела, как правило, достаточно сложна. Местный угол атаки и материал поверхности различны для разных участков тела. В этом случае оценку погрешности можно с достаточной степенью точности провести, используя приближенные сведения о доле поверхности, находящейся под определенным углом атаки и пользуясь номограммами, подобными проведенным на фиг. 1, 2. При этом выводы о применении той или иной методики расчета остаются справедливыми.

Поступила 17 XI 1972.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С. Об учете молекулярного состава воздуха при расчетах коэффициентов аэродинамических сил и температуры тела в свободномолекулярном потоке при больших сверхзвуковых скоростях. Инж. ж., 1961, т. 1, № 1, стр. 175, 176.
2. Goodman F. O. Three-dimensional hard spheres theory of scattering of gas atoms from a solid surface. 1. Limit of large incident speed. Surface Sci., 1967, vol. 7, No. 3, pp. 391-421.
3. CIRA 1965, COSPAR international reference atmosphere 1965. Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1965.

УДК 533.7

ТЕЧЕНИЕ ГАЗА И ТЕРМОМОЛЕКУЛЯРНАЯ РАЗНОСТЬ ДАВЛЕНИЙ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

С. Г. СКАКУН, П. Е. СУЕТИН, В. Г. ЧЕРНЯК

(Свердловск)

В подавляющем большинстве теоретических работ, посвященных движению разреженного газа в каналах при произвольных числах Кнудсена, анализ течения проводится на основе решения модельного уравнения Бхатнагара, Гросса и Крука (модель БГК). При переходе к сплошной среде эта модель дает неправильное число Прандтля, т. е. не пригодна для корректного описания явлений, обусловленных неоднородностью давления и температуры [1]. К последним относится эффект термомолекулярной разности давлений. Анализ этого эффекта может быть проведен на основе решения других модельных уравнений, процедуры построения которых предложены в [2-4].

В настоящей работе использованы модель БГК и простейшая из статистических моделей, обеспечивающих правильное значение числа Прандтля, — эллипсоидальная модель [3]. Следует отметить, что решения конкретных задач кинетической теории газов для различных моделей представляют интерес в аспекте исследования сходимости процедур построения этих моделей.

В соответствии с задачами статья состоит из трех частей. В первой части рассматривается изотермическое течение Пуазейля, во второй — изобарное течение под действием градиента температуры и в третьей — эффект термомолекулярной разности давлений при произвольных числах Кнудсена. Задачи решаются методом Бубнова — Галеркина [5] и путь решения достаточно подробно описан для эллипсоидальной модели. Для модели БГК приведены лишь окончательные результаты.

Теоретические результаты для изотермического течения и термомолекулярной разности давлений сопоставляются с экспериментальными данными в широком диапазоне чисел Кнудсена, а также с теоретическими результатами других авторов.

Газ, находящийся между бесконечными параллельными плоскостями $x = \pm 1/2$, возмущен малыми градиентами температуры и давления, направленными вдоль оси z . Тогда функцию распределения f молекул по скоростям можно представить в лиnearизованном виде

$$(0.1) \quad f = f_0(z) [1 + h(c, x)], \quad f_0 = n(z) \left[\frac{m}{2\pi kT(z)} \right]^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT(z)} \right)$$

где x, z и c_x, c_y, c_z — безразмерные координаты и компоненты молекулярной скорости, n, T — плотность и температура газа, m — масса молекул, k — постоянная Больцмана, h — функция возмущения.

Уравнение Больцмана запишется в виде

$$(0.2) \quad c_x \frac{\partial h}{\partial x} + c_z \left[v + \left(c^2 - \frac{5}{2} \right) \tau \right] = L(h), \quad v = \frac{1}{p} \frac{dp}{dz}, \quad \tau = \frac{1}{T} \frac{dT}{dz}$$

Здесь p — давление газа, $L(h)$ — линеаризованный оператор соударений.

Оператор соударений для модели БГК и эллипсоидальной модели соответственно имеет вид

$$(0.3) \quad L(h) = -\delta_1 (h - 2c_z \langle c_z \rangle), \quad \delta_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{d}{\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} K^{-1}$$

$$(0.4) \quad L(h) = -\delta (h - 2c_z \langle c_z \rangle + 2c_z c_x \langle c_z c_x \rangle), \quad \delta = {}^{1/3} \sqrt{\pi} K^{-1}$$

где K — число Кнудсена, отношение среднего свободного пробега молекул λ к расстоянию между плоскостями d , угловыми скобками обозначены макроскопические величины.

Функция распределения молекул по скоростям разрывна в пространстве скоростей при $c_x = 0$, и граничные условия полностью диффузного отражения запишутся в следующем виде

$$(0.5) \quad h = {}^{1/2} [h^+ (1 + \text{sign } c_x) + h^- (1 - \text{sign } c_x)], \quad h(-{}^{1/2} \text{sign } c_x, c) = 0$$

1. Полагая в исходном уравнении (0.2) $T = \text{const}$, используя определение макроскопических величин и граничные условия (0.5) для эллипсоидальной статистической модели (0.4), получаем систему интегральных уравнений

$$(1.1) \quad \begin{vmatrix} \Psi_{1p}(x) \\ \Psi_{2p}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Omega_{-1} & -\Omega_0 \\ \Omega_0 & -\Omega_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Psi_{1p}(y) \\ \Psi_{2p}(y) \end{vmatrix}$$

$$\Psi_{1p} = 1 - \frac{2\delta}{v} \langle c_z \rangle, \quad \Psi_{2p} = \frac{2\delta}{v} \langle c_z c_x \rangle$$

$$(1.2) \quad \Omega_n \Phi = \begin{cases} \frac{\delta}{\sqrt{\pi}} \int_{-1/2}^{+1/2} \varphi(y) I_n(\delta|x-y|) dy, & |n| = 2l + 1 \\ \frac{\delta}{\sqrt{\pi}} \int_{-1/2}^{+1/2} \varphi(y) \text{sign}(x-y) I_n(\delta|x-y|) dy, & n = 2l \end{cases}$$

$$I_n(s) = \int_0^{\infty} t^n \exp\left(-t^2 - \frac{s}{t}\right) dt$$

Выбирая пробные функции в виде

$$\Psi_{1p}'(x) = Ax^2 + B, \quad \Psi_{2p}'(x) = Cx$$

что согласуется с условиями симметрии задачи, и требуя ортогональность системы уравнений (1.1) к базовым функциям

$$(1.3) \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x^2 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 \\ x \end{vmatrix}$$

имеем систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных постоянных коэффициентов A, B, C

$$(1.4) \quad \begin{vmatrix} C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{11} & C_{12} & C_{31} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1/12 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$(1.5) \quad C_{11} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \delta} \left[\frac{1}{16} - \frac{\sqrt{\pi}}{12\delta} + \frac{8}{\delta^4} - \frac{1}{8} I_1(\delta) - \frac{1}{\delta} I_2(\delta) - \frac{4}{\delta^2} I_3(\delta) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{8}{\delta^3} I_4(\delta) - \frac{8}{\delta^4} I_5(\delta) \Big] \\
 C_{12} &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \delta} \left[\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\delta} + \frac{2}{\delta^2} - \frac{1}{2} I_1(\delta) - \frac{2}{\delta} I_2(\delta) - \frac{4}{\delta^2} I_3(\delta) \right], \\
 C_{22} &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \delta} [1 - 2I_1(\delta)] \\
 C_{31} &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \delta} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{48} - \frac{1}{4\delta} + \frac{4}{\delta^3} - \frac{1}{4} I_2(\delta) - \frac{3}{2\delta} I_3(\delta) - \frac{4}{\delta^2} I_4(\delta) - \frac{4}{\delta^3} I_5(\delta) \right] \\
 C_{32} &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \delta} \left[-\frac{\sqrt{\pi}}{4} + \frac{1}{\delta} - I_2(\delta) - \frac{2}{\delta} I_3(\delta) \right] \\
 C_{33} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{\sqrt{\pi} \delta} \left[-\frac{1}{4} + \frac{2}{\delta^2} - \frac{1}{2} I_3(\delta) - \frac{2}{\delta} I_4(\delta) - \frac{2}{\delta^2} I_5(\delta) \right]
 \end{aligned}$$

Тогда приведенный расход газа Q_p может быть представлен в следующем виде:

$$(1.6) \quad Q_p = -\frac{2}{v} \int_{-1/2}^{+1/2} \langle c_z \rangle dx = -\frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{1}{12} A - B \right)$$

Для модели БГК (0.3) метод Бубнова – Галеркина с использованием квадратичной пробной функции приводит к результатам, полностью совпадающим с решением, полученным вариационным методом для той же пробной функции [6].

На фигуре нанесены теоретические значения приведенного расхода газа для эллипсоидальной статистической модели (кривая 1) и модели БГК (кривая 2), а также экспериментальные данные, полученные на стеклянной щели высотой $d = 1.9 \cdot 10^{-3}$ см, длиной 0.805 см, шириной 3.346 см [7] (светлые точки – He, темные точки – H₂, квадраты – Ne, треугольники – Ar, крестики – Xe). Теоретические и экспериментальные данные хорошо согласуются при $K \leq 1$. При $K > 1$ количественное согласие отсутствует как между экспериментальными результатами для разных газов, так и между теоретическими для различных моделей и между теорией и экспериментом. Первое обстоятельство объясняется различной степенью accommodation тангенциального импульса для разных газов при больших числах Кнудсена, когда взаимодействие газа со стенкой сказывается особенно сильно.

Расхождение теоретических данных обусловлено различием в столкновительных параметрах δ и δ_1 для различных моделей. При $K \gg 1$ ограниченность геометрических размеров экспериментального канала приводит к расхождению теории и эксперимента. Тем не менее и при больших числах Кнудсена качественное согласие имеется, что указывает на правильную зависимость $Q_p(K)$.

2. При $p = \text{const}$ имеем следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & \begin{vmatrix} \Psi_{1T}(x) \\ \Psi_{2T}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/2\Omega_1 & 1+1/4 \\ -1/2\Omega_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Omega_{-1} & -\Omega_0 \\ \Omega_0 & -\Omega_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Psi_{1T}(y) \\ \Psi_{2T}(y) \end{vmatrix} \\
 & \Psi_{1T} = -1/4 + \delta \tau^{-1} \langle c_z \rangle, \quad \Psi_{2T} = \delta \tau^{-1} \langle c_z c_x \rangle
 \end{aligned}$$

Используя пробные функции вида

$$\Psi_{1T}'(x) = A_1 x^2 + B_1, \quad \Psi_{2T}'(x) = C_1 x$$

и требуя ортогональность системы уравнений (2.1) к базовым функциям (1.3) для коэффициентов A_1 , B_1 и C_1 , получаем систему алгебраических уравнений

$$(2.2) \quad \begin{vmatrix} C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{11} & C_{12} & C_{31} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -d_2 \\ -d_1 \\ -d_3 \end{vmatrix}$$

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \delta} \left[\frac{1}{8} - \frac{3\sqrt{\pi}}{8\delta} + \frac{2}{\delta^2} - \frac{1}{4} I_3(\delta) - \frac{1}{\delta} I_4(\delta) - \frac{2}{\delta^2} I_5(\delta) \right],$$

$$d_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \delta} \left[\frac{1}{2} - I_3(\delta) \right]$$

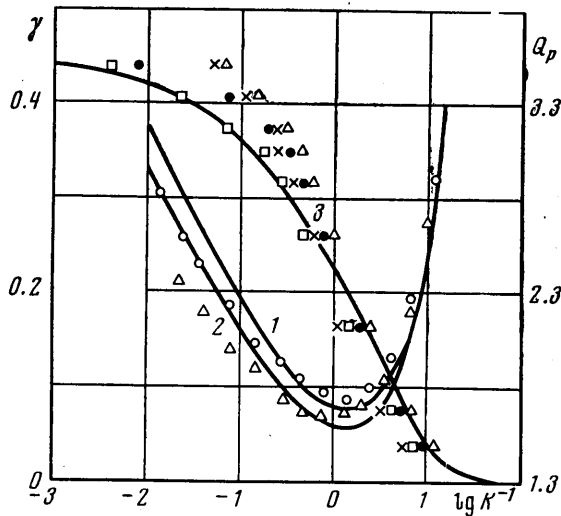
$$d_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \delta} \left[-\frac{3\sqrt{\pi}}{16} + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{2} I_4(\delta) - \frac{1}{\delta} I_5(\delta) \right]$$

Приведенный расход газа Q_T , обусловленный градиентом температуры, для эллипсоидальной модели и модели БГК соответственно имеет вид

$$Q_T = \frac{2}{\tau} \int_{-1/2}^{+1/2} \langle C_z \rangle dx = -\frac{1}{6\delta} (3 + A_1 + 12B_1)$$

$$Q_T = -\frac{1}{\delta_1} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \frac{d_1'}{C_{11}'} - \frac{C_{11}' d_2' - C_{12}' d_1'}{C_{11}' C_{12}' - C_{22}'^2} \left(2 - \frac{1}{6} \frac{C_{12}'}{C_{11}'} \right) \right]$$

Коэффициенты, помеченные штрихами, получаются из соответствующих нештрихованных коэффициентов (1.5), (2.2) заменой δ на δ_1 .



Используя обозначения работы [8], для скорости теплового скольжения u^* имеем при $K \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow \infty$)

$$u^* = a \frac{5\lambda}{16} \left(\frac{2\pi kT}{m} \right)^{1/2} \frac{d \ln T}{dz}$$

Коэффициент $a=1.194$ и 0.7639 для эллипсоидальной модели и для модели БГК соответственно. Первое значение хорошо согласуется с результатами, полученными для модели БГК при выборе столкновительного параметра δ_1 в виде $^{16}/_{15} \sqrt{\pi} K$ [8].

3. В стационарном состоянии полный среднечисловой поток газа через поперечное сечение канала отсутствует, что приводит к соотношению

$$d \ln P = \gamma d \ln T, \quad \gamma = Q_T / Q_p$$

В предельном случае сплошной среды согласно значениям изотермического и изобарного потоков $\gamma(K \rightarrow 0) \rightarrow bK^2$, где коэффициент $b=8.952$ и 5.730 соответственно для эллипсоидальной и БГК моделей.

При $K \gg 1$ для обеих моделей, сохраняя члены первого порядка малости, находим $\gamma(K \gg 1) = 1/2(1 - \ln^{-1} K)$ и в предельном случае свободномолекулярного режима $K \rightarrow \infty$ получается известная формула Кнудсена: $p_1/p_2 = (T_1/T_2)^{1/2}$.

Теоретические значения γ для эллипсоидальной статистической модели (кривая 3 на фигуре) сопоставлены с экспериментальными данными [9], причем под экспериментальным числом Кнудсена понимается отношение среднего свободного пробега, рассчитанного для средних температур и давлений, к радиусу капилляра.

Расхождение экспериментальных данных для разных газов обусловлено различной степенью аккомодации тангенциального импульса молекул на поверхности. В связи с этим совпадение экспериментальных данных для легких газов с теоретическими является случайным. По-видимому, корректному теоретическому решению для капилляра с граничными условиями полностью диффузного отражения молекул стенками канала лучше будут соответствовать экспериментальные данные для тяжелых газов.

Тем не менее хорошее в целом согласие теоретических и экспериментальных данных указывает на слабую зависимость эффекта термомолекулярной разности давлений от конкретной геометрии канала.

Представляет также интерес сопоставить полученные результаты с данными работы [10], в которой приводится решение аналогичных задач для полного уравнения Больцмана (максвелловские молекулы) методом Монте-Карло. Хорошее согласие результатов, полученных в данной работе, с результатами работы [10] во всем диапазоне чисел Кнудсена позволяет сделать вывод о вполне удовлетворительной аппроксимации полного оператора соударений Больцмана его статистическими моделями. Это положение остается в силе по крайней мере при малых возмущениях в газе и для низших (имеющих физический смысл) моментов функции распределения.

Поступила 17 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
2. Gross E. P., Jackson E. A. Kinetic models and the linearized Boltzmann equation. Phys. Fluids, 1959, vol. 2, No. 4. (Рус. перев.: Кинетические модели и линеаризованное уравнение Больцмана. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1960, № 5.)
3. Holway L. H. New statistical models in kinetic theory: methods of construction. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 9. (Русск. перев.: Новые статистические модели для кинетической теории и методы их построения. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1967, № 6.)
4. Шахов Е. М. Метод аппроксимации кинетического уравнения Больцмана. В кн. «Численные методы в теории разреженных газов». М., ВЦ АН СССР, 1969.
5. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
6. Cercignani C., Pagani C. D. Variational approach to boundary - value problems in kinetic theory. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 6.
7. Породнов Б. Т., Суетин П. Е., Борисов С. Ф. Течение газов в плоской щели в широком диапазоне чисел Кнудсена. Ж. техн. физ., 1970, т. 40, № 11.
8. Ивченко И. Н., Яламов Ю. И. Тепловое скольжение неоднородно нагретого газа вдоль твердой плоской поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6.
9. Podgurski H. H., Davies F. N. Thermal transpiration at low pressure. J. Phys. Chem., 1961, vol. 65, No. 8.
10. Горелов С. Л., Коган М. Н. Течение разреженного газа между двумя параллельными пластинами. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 6.

УДК 536.24.01

РАДИАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ ПРИ ТЕПЛОБМЕНЕ В ПЛОСКОМ СЛОЕ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ И РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Л. А. ДОМБРОВСКИЙ

(Москва)

Исследовано радиационное равновесие в плоском слое поглощающей и анизотропно рассеивающей среды. Получено аналитическое решение задачи в первом приближении метода двойных сферических гармоник. Обсуждается точность полученного решения и роль анизотропии рассеяния при радиационном равновесии.

1. Рассматривается теплообмен излучением между двумя плоскими параллельными стенками с температурами T_{w1} и T_{w2} , разделенными поглощающей и рассеивающей средой. При отсутствии переноса энергии конвекцией и теплопроводностью в среде устанавливается радиационное равновесие и уравнение энергии принимает вид