УДК 533.6.011.8

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СЛОЕ КНУДСЕНА С МЕДЛЕННОЙ КОНДЕНСАЦИЕЙ (ИСПАРЕНИЕМ) НА ПОВЕРХНОСТИ

О. А. КОРОВКИН, Ю. И. ХЛОПКОВ

(Москва)

Дано описание одного из методов Монте-Карло, разработанного в [1] для линейных задач молекулярной газовой динамики, и решается задача о вычислении скачка температуры в слое Кнудсена при наличии на стенке конденсации или испарения. Подобные задачи решались и ранее либо путем произвольного задания функции распределения [2], либо путем решения модельного уравнения [3]. Цель настоящей работы – развитие линейной кинетической теории конденсации и испарения при малых числах Кнудсена. При этом оригинальным методом, позволяющим экономить машинную память, решается линеаризованное уравнение Больцмана. Вдали от границы раздела фаз справедливы уравнения Навье – Стокса. Кинетическое описание пограничной зоны определяет, таким образом, условия физического сопряжения навье-стоксовской области с границей фазового перехода.

1. Описание метода. Метод применим для модели молекул, так называемых псевдомаксвелловских сфер, у которых эффективное сечение обратно пропорционально относительной скорости

$$\sigma=\sigma_0/g \qquad (\sigma_0=\text{const}, \quad g=|\xi-\xi_1|)$$

Разобьем поле течения на ячейки. Тогда для молекул, взаимодействующих как псевдомаксвелловские сферы, частота столкновения равна

$$N=\int f_1 g\sigma\, d\xi_1=\sigma_0 n$$

Здесь f_1 – функция распределения молекул внутри области течения, n – плотность молекул.

Пусть размер ячейки Δy, тогда вероятность столкновения в этой ячейке равна $\sigma_0 n\Delta t$, где $\Delta t=\Delta y/|\xi_y|$ – время пребывания пробной молекулы в этой ячейке. Вероятность того, что данная молекула влетит в ячейку со скоростью ξ, пропорциональна $|\xi_y|f(\xi)$. Тогда вероятность столкновения пробной молекулы в этой ячейке пропорциональна

$$|\xi_y|f(\xi)\sigma_0 n\Delta t=f(\xi)\sigma_0 n\Delta y\sim f(\xi)$$

А вероятность того, что частица, сталкивающаяся с пробной, имеет скорость ξ, также пропорциональна $f(\xi)$. Следовательно, счет можно вести таким образом: в ячейке, где происходит столкновение, запоминать скорость, с которой частица влетает в эту ячейку, а расчет столкновения производить со скоростью, которая запомнилась от предыдущего столкновения.

В линейном случае траектории пробной молекулы находятся как равновесные плюс малые добавки, квадратами которых можно пренебречь. Макропараметры $\langle\psi\rangle$ вычисляются как функционалы $\langle\psi\rangle=(f,\psi)$ от молекулярных признаков $\psi=1, \xi, \ldots$ Чтобы результат не портился статистическими ошибками, из переноса совершаемого на истинной функции распределения, вычитается перенос, совершаемый на равновесной функции распределения.

2. Постановка задачи. В системе координат x, y рассматривается установившаяся конденсация (испарение) на поверхности $y=0$. Движение газа к поверхности (или от нее) осуществляется с макроскопической скоростью u (движение газа вдоль поверхности отсутствует). Так как рассматривается процесс с малой степенью неравновесности, то процесс конденсации – испарения будет «медленным», т. е. $u/c_w=\bar{u}\ll 1$, где $c_w=(m/2kT_w)^{1/2}$ и, следовательно [4], в пределах слоя допустима линеаризация функции распределения и гидродинамических параметров

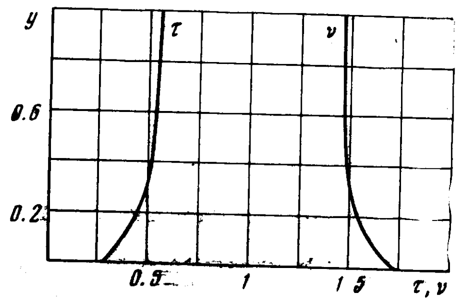
$$f=f_0(1+\varphi(y,\xi)), \qquad f_0=n_0\left(\frac{m}{2\pi kT_0}\right)^{3/2}\exp\left\{-\frac{m\xi^2}{2kT_0}\right\}$$

$$T=T_0(1+\tau(y)), \qquad n=n_0(1+\nu(y))$$

где f_0 – равновесная функция распределения, $T_w=T_0$ – температура поверхности и $n_w=n_0$ – соответствующая ей равновесная плотность, $\varphi(y,\xi)$, $\tau(y)$, $\nu(y)$ – малые добавки, квадратами которых можно пренебречь ($\varphi\ll 1$, $\tau\ll 1$, $\nu\ll 1$).

Будем предполагать, что молекулы газа взаимодействуют с поверхностью согласно следующей модели. Пусть на поверхность $y=0$ падают молекулы с интенсивностью J_-. Пусть часть a_w из падающих молекул «поглотится» стенкой, а часть $1-a_w$ отразится поверхностью диффузно с температурой поверхности T_w. Кроме этого, поверхность испаряет частицы газа с интенсивностью J_+, которая, как показывают многочисленные эксперименты, зависит лишь от свойств материала поверхности и ее температуры, также диффузно с температурой T_0. Коэффициент a_w определяется экспериментально. Для ряда материалов значение a_w можно найти в [5].

Рассмотрим вначале частный случай $a_w=1$, т. е. когда все падающие на поверхность молекулы поглощаются. В работе [3] предложен простой способ пересчета полученных таким образом результатов на общий случай. Такой подход позволяет сократить счет ввиду сокращения параметров задачи. На верхней границе слоя Кнудсена функция распределения принимает навье-стоксовский вид. Нетрудно показать, что в линейной постановке задача разделяется на две: на задачу о возмущении функции распределения за счет наличия скорости u и задачу о возмущении функции распределения потоком тепла q при наличии градиента $\partial T/\partial y$. Здесь рассматривается только задача о поперечной скорости $u=u_y$, задачу о потоке тепла см. в [6].



В граничные условия первой задачи градиенты макропараметров не входят.

3. Обсуждение результатов. Наиболее интересным вопросом задач такого сорта является определение скорости испарения (конденсации) nu и определение скачка температуры (граничные условия для внешнего течения).

На фигуре представлено распределение температуры τ и плотности ν поперек слоя Кнудсена. Величины скачков $\Delta\tau=\tau(y)|_{y=1}$ и $\Delta\nu=\nu(y)_{y=1}$. В настоящей работе $\Delta\tau=-0.54\,nu$, $\Delta\nu=-1.45\,nu$ (n, u обезразмерены на соответствующие равновесные величины). С учетом результатов работы [6] значение полного температурного скачка равно

$$\Delta\tau=-0.54\,nu+1.02\partial T/\partial y$$

Для сравнения приведем результаты работы [2], полученные для уравнения Больцмана моментным методом, $\Delta\tau=-0.46\,nu$ и скорость испарения $nu=-0.47\,p_{11}$. Здесь $p_{11}=(p_{yy}-p_w)/p_w$ (p_{yy} – тензор напряжений, p_w – давление газа у стенки). В данной работе $nu=-0.48\,p_{11}$. В работе [4] получена зависимость τ от nu в нелинейном случае решением модельного уравнения. Интерполяция этой зависимости в линейную область дает значение скачка $\Delta\tau\approx0.6\,nu$. В общем случае график зависимости τ от nu в линейной области будет ветвиться из-за градиента $\partial T/\partial y$.

Как указывалось, численный расчет приводился при $a_w=1$. Следуя процедуре, предложенной в [3], можно провести пересчет этих результатов на общий случай

$$n_r=n_e(1-a_w)\ (1-nu_y2\sqrt{\pi}/a_wn_ec_w)=n_e(1-a_w)\ (1-\mu)$$

где n_r – плотность отраженных молекул, n_e – испаренных

$$n_0=a_wn_e+n_r=n_e[1-\mu(1-a_w)],\qquad nu=\frac{nu_y}{n_0c_w}=\frac{\mu a_w}{2\sqrt{\pi}[1-\mu(1-a_w)]}$$

Кроме того, из решения известны зависимости для случая $a_w=1$: $n_\infty=\Phi_1(nu)$, $\tau_\infty=\Phi_2(nu)$ для слоя Кнудсена на испаряющей поверхности.

В заключение авторы выражают благодарность М. Н. Когану за руководство и Н. К. Макашеву за помощь и обсуждение результатов.

Поступила 30 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В. И., Хлопков Ю. И.* Вариант метода Монте-Карло для линейного решения задач динамики разреженного газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1973, № 4.
2. *Лабунцов Д. А., Муратова Т. М.* Кинематический анализ процессов испарения и конденсации. Теплофизика высоких температур, 1969, № 5.
3. *Коган М. Н., Макашев Н. К.* О роли слоя Кнудсена в теории гетерогенных реакций и в течениях с реакциями на поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 6.
4. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
5. *Paul B.* Compilation of evaporation coefficients. ARS Journal, 1962, vol. 32, No. 9.
6. *Горелов С. Л., Коган М. Н.* Решения задачи о скачке температуры (течение в слое Кнудсена) и линейной задачи о передаче тепла между двумя параллельными пластинами в разреженном газе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2.