УДК 533.6.011.72

ОТРАЖЕНИЕ СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ И ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

В. Б. СОКОЛОВ

(*Москва*)

Рассматривается симметричное отражение сильной ударной волны от эллипсоида вращения или эллиптического цилиндра в окрестности критической точки. В исследуемой области найдены аналитические выражения для параметров газа. Сравнение полученных результатов с измерениями [1] зависимости давления в критической точке от времени показывает их удовлетворительное соответствие.

Следуя приближениям [2, 3], исходные уравнения непрерывности, количества движения и энергии, описывающие течение газа за отраженной ударной волной, и краевые условия в координатах

$$x=ar\cos\theta,\qquad y=br\sin\theta\quad (i=1)$$

$$x=br\sin\theta\cos\varphi,\qquad y=br\sin\theta\sin\varphi,\qquad z=ar\cos\theta\quad (i=2)$$

с учетом малости величины $\varepsilon=\sqrt{2}(\gamma-1)^{1/2}(3\gamma-1)^{-1/2}$ (для сильных ударных волн $\gamma\to1$) в окрестности критической точки $(ab^{-1}\theta\ll1)$ принимают соответственно вид

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}+i\frac{a}{b}v=0,\qquad a\frac{\partial v}{\partial\tau}+u\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{a}{b}v^2=0$$

(1)
$$a\frac{\partial u}{\partial\tau}+u\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{\gamma_3}\frac{\partial p}{\partial\xi}=0,\qquad a\frac{\partial h}{\partial\tau}+u\frac{\partial h}{\partial\xi}=0$$

(2)
$$p=2(ad\xi_2/d\tau-1),\qquad h=ad\xi_2/d\tau-1,\qquad v=ab^{-1}E$$

$$u=ad\xi_2/d\tau-1,\qquad E=\varepsilon\sqrt{2}(\gamma-1)^{-1/2}(3\gamma-1)^{-1/2}$$

(3)
$$u(\xi=0)=0$$

(4)
$$\xi_2=0,\quad p=0,\quad h=0,\quad u=0,\quad d\xi_2/d\tau=a^{-1}\quad \text{при } \tau=0$$

где $i=1$ для эллиптического цилиндра, $i=2$ для эллипсоида вращения; a и b – полуоси рассматриваемых тел (падающая ударная волна распространяется вдоль полуоси a)

$$r=1+\varepsilon^2\xi,\qquad t=\varepsilon\tau a_3^{-1},\qquad P/P_3=1+\varepsilon^2p+\theta^2p^\circ$$

$$H/H_3=1+\varepsilon^2h+\theta^2h^\circ,\qquad V_r/a_3=\varepsilon u+\theta^2u^\circ,\qquad V_\theta/a_3=\theta v\varepsilon^{-1}$$

ξ_2 – координата отраженной ударной волны; P, ρ, H – давление, плотность и энтальпия газа за отраженной ударной волной; t – время; $a_3{}^2=\gamma_3P_3\rho_3{}^{-1}$ (индексом 3 помечены параметры газа за ударной волной, отраженной от плоскости, параллельной ее фронту); γ – показатель адиабаты; V_r и V_θ – составляющие скорости газа за отраженной ударной волной. Величина p° определяется так же, как в [2].

Из первых двух уравнений (1) получим

(5)
$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi\,\partial\tau_1}+u\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}-\frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^2=0,\qquad \tau_1=\tau a^{-1}$$

Будем искать решение уравнения (5) в виде $u=\Phi(\tau_1)R(\xi)$. Тогда имеем

(6)
$$\Phi=(c_3-\lambda\tau_1)^{-1},\qquad dR/d\xi=i\lambda+(Rc_1)^{1/i}\quad (dR/d\xi\neq0)$$

В силу нелинейности уравнения (5) его решение представимо в виде суммы $\sum\limits_\lambda u_\lambda$ при условии

(7)
$$\sum_{\lambda,\ n\neq m}\frac{\lambda n}{c_{3n}}\frac{\lambda m}{c_{3m}}=0$$

которое получается из уравнения (5) с учетом (6) при $\xi=0$, $\tau_1=0$.

Учитывая число краевых условий, ограничимся случаем, когда набор λ состоит не более чем из двух величин. Из условия (7) следует, что одно из них должно быть равно нулю. Тогда при $i=1$

$$R=c_1^{-1}\exp[c_1(\xi-c_2)]-\lambda c_1^{-1} \tag{8}$$

(решение $dR/d\xi=i\lambda$ не удовлетворяет краевым условиям). Из условия (3) следует, что $\lambda=\exp(-c_1c_2)$, т. е. $\lambda\neq0$ и набор вырождается в одно значение.

Из первого уравнения (1) и из (2) следует:

$$\partial u/\partial\xi=-iEa^2b^{-2}\quad(\xi=\xi_2) \tag{9}$$

Подставляя в (9) значение Φ из (6) и R из (8) и учитывая, что $\xi_2=0$ при $\tau_1=0$, имеем

$$\exp(-c_1c_2)=-Ec_3a^2b^{-2}.$$

Используя условие

$$d\xi_2/d\tau_1=1\quad(\tau_1=0) \tag{10}$$

получим из (9), что $\lambda=-c_1c_3$. Тогда

$$u=[1-\exp(a^2b^{-2}E\xi)]\,[1+a^2b^{-2}E\tau_1]^{-1} \tag{11}$$

При $i=2$ из (6) получаем

$$R=(\xi-c_2)^2c_1/4\quad\text{при }\lambda=0,\quad R=2\lambda\xi+c_2\quad\text{при }c_1=0$$

где $c_2=0$, как следует из (3). Тогда

$$u=\xi^2c_{30}^{-1}c_1/4+2\xi\lambda\,(c_3-\lambda\tau_1)^{-1} \tag{12}$$

Из выражений (9), (10) и (12) так же, как при $i=1$, получим $\lambda=-c_3Ea^2b^{-2}$ и $4\lambda^2c_{30}=-c_1c_3^2$. Тогда

$$u=-a^4b^{-4}E^2\xi^2-2a^2b^{-2}E\xi(1+a^2b^{-2}E\tau_1)^{-1} \tag{13}$$

Выражения (11) и (13) удовлетворяют уравнению (5) и всем краевым условиям. Значит предположение о выборе λ, сделанное ранее, верно (при этом решения (11) и (13), возможно, не охватывают всю совокупность частных решений [4]).

Полученные решения (11) и (13) при $a=b=1$ совпадают с соответствующими решениями [2] при $\beta=0$ ($\beta\sim\varepsilon$).

Величина p находится из третьего уравнения (1)

$$\begin{gathered}p=\gamma_3(1+a^2b^{-2}E\tau_1)^{-2}[a^2b^{-2}E\xi-0.5\exp(2a^2b^{-2}E\xi)]+c(\tau_1)\\ c(\tau_1)=\gamma_3/2-2a^2b^{-2}E\tau_1(1+a^2b^{-2}E\tau_1)^{-1}-\\ -\gamma_3(1+a^2b^{-2}E\tau_1)^{-2}\ln(1+a^2b^{-2}E\tau_1)\quad\text{при }i=1\\ p=-\gamma_3[a^8b^{-8}E^4\xi^4/2+2a^6b^{-6}E^3\xi^3(1+a^2b^{-2}E\tau_1)^{-1}+\\ +3a^4b^{-4}E^2\xi^2(1+a^2b^{-2}E\tau_1)^{-2}]+c(\tau_1)\\ c(\tau_1)=2(1+a^2b^{-2}E\tau_1)^{-2}+\\ +2+\gamma_3a^4b^{-4}E^2\tau_1^2(1+a^2b^{-2}E\tau_1)^{-4}(a^4b^{-4}E^2\tau_1^2/2+2a^2b^{-2}E\tau_1+3)\quad\text{при }i=2\end{gathered} \tag{14}$$

где величины $c(\tau_1)$ находятся из (2).

Сравнение полученных результатов (14) с измерениями [1] во времени давления в критической точке показывает их удовлетворительное соответствие.

Величина h находится из четвертого уравнения системы (1) аналогично [2].

Поступила 25 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богословский К. Е.* Исследование нестационарного обтекания тел потоком, движущимся за ударной волной. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
2. *Киреев В. Т.* Об отражении сильной ударной волны от сферы и цилиндра. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
3. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.