

боковой составляющей скорости, в том числе с образованием обратного бокового течения, при условии независимости параметров потока от боковой координаты.

Поступила 4 III 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецова Т. Д., Левитан Ю. С., Муравьев Е. В., Паневин И. Г. Ламинарный магнитогидродинамический пограничный слой на токопроводящей поверхности при наличии боковых составляющей скорости и объемной тормозящей силы. *Магнитная гидродинамика*, 1971, вып. 4, стр. 36–42.
2. Schlichting H. Three-dimensional boundary layer flow. DFL-Bericht, 1971, No. 195. (Рус. перев.: Трехмерные пограничные слои. Сб. «Механика», 1964, № 3 (85).)
3. Вагажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М., «Наука», 1970.
4. Бам-Зеликович Г. М. О необходимом условии отрыва трехмерного пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 195.
6. Little B. H., Wilbur S. W. Performance and boundary layer data from 12° and 23° conical diffusers of area ratio 2.0 at Mach numbers up to choking and Reynolds numbers up to 7,5·10<sup>6</sup>. NACA Rept No. 1201, 1954.

УДК 532.526.2

### ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ В СЛАБЫХ РАСТВОРАХ ПОЛИМЕРОВ

В. В. ДРОБЛЕНКОВ, Г. И. КАНЕВСКИЙ

(Ленинград)

В статье излагаются результаты исследования уравнений ламинарного пограничного слоя и его устойчивости в слабых растворах полимеров. В качестве математической модели, описывающей свойства течений растворов полимеров, используется реологическая модель, в которой учитывается временная связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций [1]. Анализ этих уравнений показывает, что релаксационные свойства жидкости в большей мере влияют на устойчивость течения. Проведенные расчеты показывают увеличение устойчивости профиля скорости в пограничном слое, а также изменение характера распределения реинольдсовых напряжений при учете релаксационных свойств жидкости.

С учетом релаксационных свойств уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в пренебрежении массовыми силами приобретают вид [1].

$$(1) \quad \frac{d\bar{V}}{dT} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } P + \nu \Delta \bar{V} + \frac{k}{\rho} \frac{d}{dT} (\Delta \bar{V}), \quad \text{div } \bar{V} = 0$$

Здесь  $T$  — время,  $k$  — релаксационная вязкость, остальные обозначения общеприняты.

Предположим, что при введении в жидкость малых добавок полимеров остаются справедливыми основные концепции теории пограничного слоя. Тогда величина толщины пограничного слоя  $\delta$  может быть оценена следующим образом:  $\delta \sim \sqrt{\nu}$  и  $\delta \ll L$ , где  $L$  — характерный линейный размер тела.

Произведем обычные оценки в уравнениях движения (1) для случая течения в плоском пограничном слое [2]. Отношение релаксационных членов к инерционным будет характеризовать число релаксации  $R_x = k/\rho L^2$ .

Проведенные оценки показывают, что величина членов, зависящих от релаксационных свойств жидкости, имеет в пограничном слое одинаковый порядок с инерционными членами и членами, зависящими от обычной вязкости, только при условии

$$(2) \quad k/\rho \infty \delta^2$$

В этом случае, в размерных переменных получаем следующую систему уравнений пограничного слоя:

$$(3) \quad \frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{k}{\rho} \frac{d}{dT} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right), \quad \frac{\partial P}{\partial Y} = 0$$

Если число релаксации  $R_x$  имеет порядок  $(\delta/L)^n$  при  $n > 2$ , то членами, учитывающими релаксационные свойства жидкости, можно пренебречь по сравнению с инерционными членами и членами, зависящими от обычной вязкости, и уравнения пограничного слоя принимают свой обычный вид. В случае, когда число релаксации имеет порядок  $(\delta/L)^n$  при  $n < 2$ , в уравнениях пограничного слоя можно пренебречь всеми членами, кроме члена, содержащего давление, и членов, учитывающих релаксационные свойства жидкости. В размерном виде уравнения пограничного слоя тогда записываются следующим образом:

$$(4) \quad - \frac{\partial P}{\partial X} + k \frac{d}{dT} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) = 0, \quad \frac{d}{dT} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) = 0$$

Вводя функцию тока основного течения  $\theta = \theta(Y)$  и функцию тока возмущающего движения  $\varphi(X, Y, T)$  в уравнения движения (1) и пользуясь обычными методами и допущениями линейной теории гидродинамической устойчивости [3], получим уравнение устойчивости с учетом релаксационных свойств жидкости

$$(5) \quad \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial T} + \frac{\partial\theta}{\partial Y} \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial X} - \frac{\partial\varphi}{\partial X} \frac{\partial^3\theta}{\partial Y^3} = \nu(\Delta\Delta\varphi) + \frac{k}{\rho} \left[ \frac{\partial(\Delta\Delta\varphi)}{\partial T} + \frac{\partial\theta}{\partial Y} \frac{\partial(\Delta\Delta\varphi)}{\partial X} - \frac{\partial\varphi}{\partial X} \frac{\partial^5\theta}{\partial Y^5} + \left( \frac{\partial^4\varphi}{\partial X^3 \partial Y} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial X \partial Y^3} \right) \frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial X \partial Y} \frac{\partial^4\theta}{\partial Y^4} \right]$$

Уравнение (5) линейно относительно функции  $\varphi(X, Y, T)$ , и его решение можно искать в виде

$$(6) \quad \varphi(X, Y, T) = \Phi(Y) \exp [i(aX - \beta T)]$$

Здесь  $\Phi(Y)$  – амплитуда функции тока возмущающего движения,  $a$  – вещественная величина, связанная с длиной волны возмущения  $\lambda$  соотношением  $\lambda = 2\pi/a$ ,  $\beta$  – комплексная величина,  $\beta = \beta_r + i\beta_i$ .

Обозначим  $\beta/a = C$  и перейдем к безразмерным величинам, выбирая в качестве характерной скорости скорость на границе пограничного слоя  $U_1$ , а в качестве характерного линейного размера –  $\delta$ . Запишем уравнение устойчивости в безразмерном виде

$$(7) \quad (u_1 - c) \left( \frac{d^2 f}{dy_1^2} - \alpha f \right) - \frac{d^2 u_1}{dy_1^2} f = - \frac{i}{\alpha R_1} \left( \frac{d^4 f}{dy_1^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 f}{dy_1^2} + \alpha^4 f \right) + \frac{k}{\rho \delta^2} \left[ (u_1 - c) \left( \frac{d^4 f}{dy_1^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 f}{dy_1^2} + \alpha^4 f \right) + \frac{du_1}{dy_1} \frac{d^3 f}{dy_1^3} - \left( \frac{d^3 u_1}{dy_1^3} + \alpha^2 \frac{du_1}{dy_1} \right) \frac{df}{dy_1} - \frac{d^4 u_1}{dy_1^4} f \right]$$

$$u_1 = U/U_1, \quad c = C/U_1, \quad y_1 = Y/\delta, \quad R_1 = U_1 \delta / \nu, \quad R_{x1} = k/\rho \delta^2$$

Здесь  $\alpha = a\delta$  – волновое число,  $f = \Phi/U_1 \delta$  – безразмерная амплитуда функции тока. Порядок членов, учитывающих релаксационные свойства жидкости, совпадает с порядком членов, учитывающих обычную вязкость, при

$$(8) \quad k/\rho \propto \delta^2 \delta / L$$

Сопоставление условий (2) и (8) показывает, что устойчивость движения жидкости оказывается более чувствительной к ее релаксационным свойствам. Проведенный анализ указывает на возможность исследования влияния на устойчивость ламинарного пограничного слоя малых добавок полимеров с использованием обычных профилей скорости основного движения.

Для интегрирования уравнения (7) с граничными условиями непротекания и прилипания на стенке ( $y_1 = 0$ ) и смыкания решения с «невязким» решением на внеш-

ней границе пограничного слоя ( $y_1=1$ )

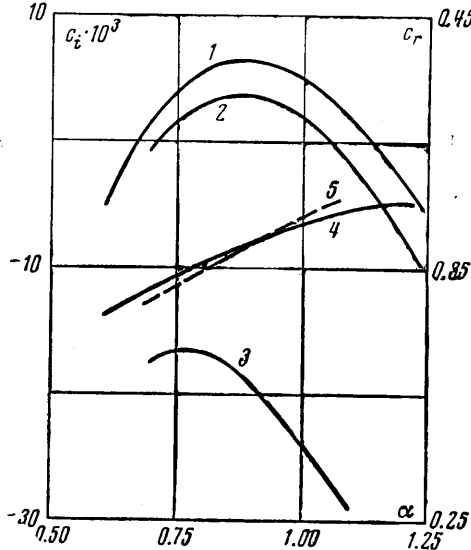
$$(9) \quad f = df/dy_1 = 0 \quad (y_1=0)$$

$$(10) \quad \alpha f + \frac{df}{dy_1} = 0, \quad \alpha \frac{df}{dy_1} + \frac{d^2f}{dy_1^2} = 0 \quad (y_1=1)$$

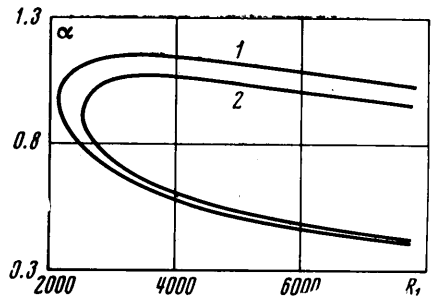
был использован метод прогонки [4].

Исследовалась устойчивость профиля скорости Блазиуса, аппроксимированного полиномом Польгаузена шестой степени, при  $Rx_1=0, 0.0001, 0.001$ .

Полученные в ходе расчетов вещественные и мнимые части собственных значений при числе Рейнольдса  $R_1=3100$  в зависимости от величины волнового числа представлены на фиг. 1. Кривые 1-3 представляют собой зависимости мнимой части собственных значений ( $c_i$ ) от волнового числа для  $Rx_1$ , равного 0, 0.0001 и 0.001 соот-



Фиг. 1



Фиг. 2

ветственно. Кривые 4 и 5 соответствуют вещественной части собственных чисел ( $c_r$ ) при  $Rx_1=0$  и  $Rx_1=0.001$ . Полученные результаты свидетельствуют о том, что релаксационные свойства жидкости незначительно влияют на скорость распространения возмущения ( $c_r$ ) в пограничном слое, но существенно уменьшают скорость нарастания возмущения ( $c_i$ ).

На фиг. 2 представлены кривые нейтральной устойчивости ( $c_i=0$ ), построенные по результатам расчетов для значений  $Rx_1=0$  (кривая 1) и  $Rx_1=0.0001$  (кривая 2). Критическое значение числа Рейнольдса, соответствующее точке потери устойчивости, при переходе от обычной вязкой жидкости к жидкости, обладающей релаксационными свойствами, увеличивается от  $R_1^*=2150$  до  $R_1^*=2520$  при величине  $Rx_1=0.0001$ . Подобное увеличение устойчивости качественно подтверждается существующими экспериментальными данными, свидетельствующими о затягивании перехода ламинарного режима течения в турбулентный в слабых растворах полимеров [5].

Выполненные расчеты показывают, что релаксационные свойства жидкости практически не оказывают влияния на распределение среднеквадратичных значений пульсационных скоростей поперек пограничного слоя, однако существенно изменяют величину рейнольдсовых напряжений.

Поступила 1 VI 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Павловский В. А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров. Докл. АН СССР, 1971, т. 200, № 4.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
3. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
4. Сапожников В. А., Штерн В. Н. Численный анализ устойчивости плоского течения Пуазейля. ПМТФ, 1969, № 4.
5. Уайт В. Д., Макэллигот Д. М. Переход к турбулентности в разбавленном водном растворе смеси полимеров. Теорет. основы инж. расчетов, 1970, № 3.