**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1974**

УДК 533.9.01

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ПОЛЕМ

Ю. М. ЗУБАРЕВ, В. А. СМИРНОВ

(*Москва*)

Рассматриваются движения бесстолкновительной квазинейтральной плазмы, в которых все характеристики движения и силы зависят только от времени. Очевидно, что такие движения должны протекать одинаково во всех точках пространства и не могут быть стеснены какими-либо границами.

1. Поскольку все производные по координатам обращаются в нуль, то из уравнений Максвелла следует, что напряженность магнитного поля $\mathbf{B}$ остается постоянной во все время движения, а напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ обусловлена токами $\mathbf{j}$

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_0,\quad d\mathbf{E}/dt+4\pi\mathbf{j}=0 \tag{1.1}$$

Из уравнения сохранения заряда

$$\partial\rho/\partial t+\operatorname{div}\rho\mathbf{v}=0$$

следует, что если первоначально заряд отсутствовал, то он не появится в дальнейшем и всегда будет $\rho=0$.

Движение многокомпонентной плазмы, состоящей из электронов (масса $M_1=m$, заряд e, плотность n_1) и k_0-1 различных ионов (масса M_k, заряд Z_ke, плотность n_k, $k\geqslant2$), характеризуется функциями распределения $f_k(u, v, w, t)$ по скоростям $\mathbf{v}_k(u_k, v_k, w_k)$ для всех компонент. В рассматриваемом случае функции распределения не зависят от координат. Их изменение во времени определяется системой кинетических уравнений [1] с самосогласованным полем (1.1) и соответствующими начальными условиями

$$\frac{\partial f_k}{\partial t}+\left\{\left[\frac{Z_ke}{M_k}\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}_k}{c}\times\mathbf{B}_0\right)+\mathbf{F}_k\right]\nabla_v\right\}f_k=0 \tag{1.2}$$

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0,\quad f_k=f_k^\circ(u_0, v_0, w_0)\quad (t=0)$$

где $\mathbf{F}_k$ — внешняя сила неэлектрической природы и все функции f_k нормированы на единицу.

Удобно решать эту систему в две стадии. Для этого заметим, что ток определяется не функциями распределения, а их первыми моментами — средними скоростями $\mathbf{v}_k^*$ каждой из компонент

$$\mathbf{j}=\sum_{k=1}^{k_0}n_kZ_ke\mathbf{v}_k^*,\qquad \mathbf{v}_k^*=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{v}f_k\,du\,dv\,dw \tag{1.3}$$

Поэтому в первой стадии можно построить и решить замкнутую систему уравнений для напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ и средних скоростей $\mathbf{v}_k^*$. Тогда во второй стадии нужно решить в общем виде задачу о движении частиц в найденном электрическом и заданном магнитном полях. Тем самым определятся функции распределения $f_k(u, v, w, t)$, а также скорости, орбиты, частоты колебаний и другие характеристики движения частиц.

Уравнения для средних скоростей получаются из кинетических уравнений (1.2) умножением на соответствующую скорость и интегрированием по всему пространству скоростей. Они имеют вид

$$\frac{d\mathbf{v}_k^*}{dt}=\frac{Z_k e}{M_k}\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}_k^*\times\mathbf{B}_0}{c}\right)+\frac{\mathbf{F}_k}{M_k},\quad Z_1=-1,\ M_1=m,\ k=1,\ldots,k_0 \tag{1.4}$$

Уравнение (1.1) с учетом выражения (1.3) будет иметь вид

$$d\mathbf{E}/dt+4\pi\sum_{k=1}^{k_0}n_k Z_k e\mathbf{v}_k^*=0 \tag{1.5}$$

Вследствие независимости от координат уравнения (1.4), (1.5) для рассматриваемых однородных движений являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Вследствие постоянства напряженности магнитного поля $\mathbf{B}_0$ они линейны.

Уравнения движения частиц имеют тот же вид, что уравнения (1.4), но для них напряженность $\mathbf{E}$ — известная функция времени, найденная из решения системы (1.4), (1.5). В результате решения уравнений движения частиц их начальные скорости могут быть выражены через текущие (при определенных условиях разрешимости) в виде

$$u_{0k}=\varphi_k(u,v,w,t),\quad v_{0k}=\psi_k(u,v,w,t),\quad w_{0k}=\xi_k(u,v,w,t)$$

Тогда функции распределения получатся в виде

$$f_k(u,v,w,t)=f_k^\circ(\varphi_k,\psi_k,\xi_k) \tag{1.6}$$

Рассматриваемые однородные движения могут быть вызваны либо начальным возмущением (задаваемым начальными функциями распределения), либо действием переменного внешнего электрического поля и переменной внешней силы F_k.

Однородные движения заключают в себе дрейфовые движения [2] в однородных полях (гравитационный, электрический, поляризационный дрейфы). В рамках теории самосогласованного поля для этих дрейфов здесь получаются точные решения.

2. Рассмотрим движения, вызванные начальным возмущением. Для простоты ограничимся случаем двухкомпонентной плазмы, состоящей из электронов с постоянной плотностью n и однозарядных ионов с той же плотностью.

Начальное возмущение зададим в самом общем виде — в виде двух начальных функций распределения для электронов и ионов

$$f_e=f_e^\circ(u,v,w),\quad f_i=f_i^\circ(u,v,w) \tag{2.1}$$

В безразмерных переменных

$$\tau=\omega_e t,\ \mathbf{v}(u,v,w)=\frac{\mathbf{v}_1}{\vartheta_0},\ \mathbf{V}(U,V,W)=\frac{\mathbf{v}_2}{\vartheta_0},\ \mathbf{E}=\frac{\mathbf{E}c}{\vartheta_0 B_0},\ \mathbf{b}=\frac{\mathbf{B}_0}{B_0} \tag{2.2}$$

систему (1.4), (1.5) и начальные условия запишем в виде

$$\frac{d\mathbf{v}^*}{d\tau}=-\mathbf{E}-\mathbf{v}^*\times\mathbf{b},\quad \frac{d\mathbf{V}^*}{d\tau}=\gamma(\mathbf{E}+\mathbf{V}^*\times\mathbf{b}),\quad \frac{d\mathbf{E}}{d\tau}=\mu(\mathbf{v}^*-\mathbf{V}^*) \tag{2.3}$$

$$\mathbf{E}=0,\quad \mathbf{v}^*=\mathbf{v}_0^*,\quad \mathbf{V}=\mathbf{V}_0^*\quad (\tau=0) \tag{2.4}$$

$$\gamma=m/M,\quad \mu=4\pi nmc^2/B_0^2=\omega_p^2/\omega_e^2$$

где ω_p и ω_e — соответственно плазменная и циклотронная частоты электрона. Средние начальные скорости $\mathbf{v}_0^*$ и $\mathbf{V}_0^*$ определены формулой (1.3) по соответствующим начальным функциям распределения (2.1). Характерную скорость в (2.2) выберем равной скорости света c. Направив ось z вдоль магнитного поля, для составляющих E_z, w^*, W^* получим систему уравнений, независимых от остальных. Ее решение при условиях (2.4) определит продольное поле E_z, меняющееся с плазменной частотой $(\mu(1+\gamma))^{1/2}$. По найденному продольному полю E_z скорости частиц w и W с произвольными начальными значениями w_0 и W_0 определяются в виде

$$w_0-w=\frac{W-W_0}{\gamma}=\frac{w_0^*-W_0^*}{1+\gamma}(1-\cos\sqrt{\mu(1+\gamma)}\,\tau) \tag{2.5}$$

Для случая, когда движение ионов не учитывается, выражения для продольной скорости электронов (2.5) были получены в [3].

Для интегрирования системы (2.3) в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, используем преобразование Лапласа. Знаменатель изображений E_x и E_y равен $pL(p)$, где

$$\begin{gathered}L(p)=p^4+p^2(1+2\mu+2\mu\gamma+\gamma^2)+(\mu+\mu\gamma+\gamma)^2=\\=(p^2+\omega_1^2)(p_2+\omega_2^2)\quad \omega_1=(\omega+\Omega)^{1/2},\quad \omega_2=(\omega-\Omega)^{1/2},\\ \omega=\mu(1+\gamma)+{}^1/_2(1+\gamma^2),\qquad \Omega={}^1/_2(1-\gamma^2)\sqrt{1+4\mu/(1+\gamma)}\end{gathered} \tag{2.6}$$

Из формулы для изображений следует существование двух частот ω_1, ω_2. При $\mu\to 0$, т. е. в случае предельно разреженной плазмы, $\omega_1\to 1$, $\omega_2\to\gamma$, а соответствующие размерные частоты переходят в циклотронные частоты электрона и иона. С увеличением μ частоты ω_1 и ω_2 возрастают, сближаются и при $\mu\to\infty$ их размерные значения стремятся к величине электронной плазменной частоты.

Эти частоты впервые получены в [4] в виде дисперсионного соотношения для волн в бесстолкновительной плазме, в котором для рассматриваемого случая (бесконечно длинные волны) следует положить k=0. Укажем, что приближенные линеаризованные уравнения для волн в однородной плазме становятся точными для бесконечно длинных волн. Этим и обусловлено указанное пересечение рассматриваемого точного решения с линейным приближением.

Решение для составляющей E_x электрического поля равно действительной части выражения

$$\begin{gathered}E_x=-\mu(V_0^*+\gamma v_0^*)/(\omega_1\omega_2)+(Q-iP)\exp(i\omega_1\tau)+\\+(S-iR)\exp(i\omega_2\tau)\end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}P(\omega_1)=\mu(U_0^*(\mu+1+\mu\gamma-\omega_1^2)-u_0^*(\mu+\mu\gamma+\gamma^2-\omega_1^2))/(2\Omega\omega_1),\\ R=-P(\omega_2),\quad Q(\omega_1)=\mu(1-\gamma)(v_0^*(\omega_1+\gamma)-V_0^*(\omega_1-1))/(2\Omega\omega_1),\\ S=-Q(-\omega_2)\end{gathered} \tag{2.8}$$

Из соображений инвариантности составляющей электрического поля относительно поворота осей координат следует, что составляющая E_y получится заменой в формулах (2.7), (2.8) x на y, u на v и v на $-u$.

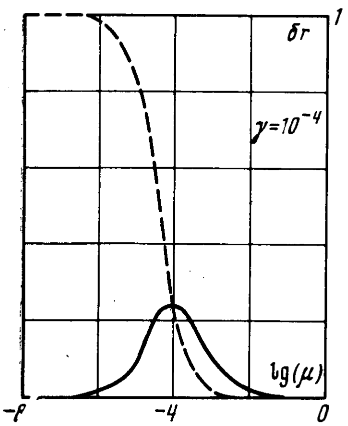
Для средних скоростей получаются формулы

$$\begin{gathered}u^*=\mu(U_0^*+\gamma u_0^*)/(\omega_1\omega_2)+Real[(b-ia)\exp(i\omega_1\tau)+\\+(d-ic)\exp(i\omega_2\tau)]\end{gathered} \tag{2.9}$$

и аналогично для U^* с заменой a, b, c, d на A, B, C, D соответственно

$$(2.10)\qquad \begin{aligned} a&=[v_0^*(\gamma^2+2\mu\gamma-\omega_1^2)+\mu(1-\gamma)V_a^*]/(2\Omega\omega_1),\\ b&=(1-\gamma)[u_0^*(\omega_1+\gamma+\mu)-\mu U_0^*]/(2\Omega\omega_1),\\ A&=\gamma[\mu(1-\gamma)v_0^*+V_0^*(1+2\mu-\omega_1^2)]/(2\Omega\omega_1),\\ B&=-\gamma(1-\gamma)[U_0^*(\omega_1-\mu-1)+\mu u_0^*]/(2\Omega\omega_1),\\ c&=-a(\omega_2),\quad d=-b(-\omega_2),\quad C=-A(\omega_2),\quad D=-B(-\omega_2) \end{aligned}$$

Составляющие средней скорости v^* и V^* получаются заменой в формулах (2.9), (2.10) u на v и v на $-u$. Расчет с помощью этих формул для случая, когда $u_0^*=U_0^*$ показывает, что характерный размер низкочастотной (ω_2) орбиты электронов в среднем движении при $\mu=\gamma$ превышает радиусы их циклотронных орбит в $1/4\gamma$ раз, а при $\mu>\gamma$ превышает размер орбиты ионов (фигура). На фигуре сплошная кривая соответствует орбите электрона и пунктирная соответствует орбите иона.



Скорости отдельных частиц легко определяются по найденным величинам (2.7) напряженности электрического поля. С учетом выражений (2.9) для средних скоростей скорости отдельных частиц могут быть представлены в виде

$$(2.11)\qquad \begin{aligned} u&=u^*+(u_0-u_0^*)\cos\tau-\\ &\quad-(v_0-v_0^*)\sin\tau,\\ v&=v^*+(v_0-v_0^*)\cos\tau+\\ &\quad+(u_0-u_0^*)\sin\tau \end{aligned}$$

и аналогично для U, V с заменой τ на $-\gamma\tau$.

Частицы, начальная скорость которых отличается от начальной средней, помимо среднего движения совершают еще вращения по круговым орбитам с собственной циклотронной частотой. Это дополнительное движение не дает вклада в ток. Из формул (2.5) и (2.11) начальные скорости частиц могут быть выражены через текущие скорости и время. Например, для u_0 получим

$$u_0=u_0^*+(u-u^*)\cos\tau+(v-v^*)\sin\tau$$

Тогда функции распределения $f_e(u, v, w, t)$, $f_i(u, v, w, t)$ получатся в виде (1.6).

Приведенное выше решение может быть обобщено на случай многокомпонентной плазмы и многозарядных ионов. При этом число частот ω_k в решении будет равно числу компонент плазмы.

3. Рассмотрим движения, вызванные внешними силами. Для простоты возьмем первоначально покоившуюся двухкомпонентную плазму в постоянном магнитном поле. Если к частицам плазмы приложена постоянная внешняя сила, пропорциональная массе частиц (сила тяжести) и направленная перпендикулярно магнитному полю, то движение, возникающее при предельном разрежении плазмы, будет гравитационным дрейфом. Если приложено постоянное внешнее электрическое поле, перпендикулярное магнитному, то в тех же условиях будет иметь место электрический дрейф. Когда внешнее электрическое поле переменно по величине, то вдоль направления этого поля будет существовать поляризационный дрейф [2].

В случае конечной плотности частиц учет полей, обусловленных их движением, оказывается существенным.

Для исследования гравитационного дрейфа в качестве характерной скорости ϑ_0 в (2.2) возьмем скорость гравитационного дрейфа без учета самосогласованного поля ($\vartheta_0=cmg/eB_0$).

Будем считать магнитное поле $\mathbf{B}_0$ направленным по оси z, а силу тяжести — по отрицательной оси y. Тогда в уравнения (1.4) должны быть подставлены силы $\mathbf{F}_1(0, -mg, 0)$ и $\mathbf{F}_2(0, -Mg, 0)$.

В безразмерных переменных (2.2) с начальными условиями

$$u=v=U=V=0,\quad E_x=E_y=0,\quad \tau=0$$

для составляющих напряженности электрического поля получим

$$\begin{gathered} E_x=q\tau-d[\omega_2^2\sin T_1+\omega_1^2\sin T_2] \\ E_y=2\Omega d+d[\omega_2^2\cos T_1-\omega_1^2\cos T_2] \\ T_1=\omega_1\tau,\quad T_2=\omega_2\tau,\quad q=\mu(1+\gamma)/(\omega_1\omega_2), \\ d=\mu(1-\gamma^2)/(2\Omega\omega_1^2\omega_2^2) \end{gathered} \tag{3.1}$$

Составляющая E_x имеет часть, возрастающую со временем, связанную как и в обычном гравитационном дрейфе с образованием постоянного тока вдоль оси x. Выражения для скоростей электронов и ионов имеют вид

$$\begin{gathered} u=u_g+\Phi(\omega_1)\cos T_1-\Phi(\omega_2)\cos T_2, \\ v=-q\tau-\Theta_1\sin T_1+\Theta_2\sin T_2 \\ U=U_g-\Psi(\omega_1)\cos T_1+\Psi(\omega_2)\cos T_2, \\ V=-q\tau+\chi_1\sin T_1-\chi_2\sin T_2 \\ u_g=\varkappa/(\omega_1^2\omega_2^2),\quad U_g=-\gamma\beta/(\omega_1^2\omega_2^2),\quad \Phi(\omega)=(\varkappa-\omega^2)/(2\Omega\omega^2) \\ \Psi(\omega)=\gamma(\beta-\omega^2)/(2\Omega\omega^2),\quad \Theta_1=(\omega_1-\gamma\omega_2)/(2\Omega\omega_1^2), \\ \Theta_2=(\omega_2-\gamma\omega_1)/(2\Omega\omega_2^2) \\ \chi_1=\gamma\Theta_2\omega_2^2\omega_1^{-2},\quad \chi_2=\gamma\Theta_1\omega_1^2\omega_2^{-2}, \varkappa=\gamma^2+\mu+\mu\gamma,\quad \beta=1+\mu+\mu\gamma \end{gathered} \tag{3.2}$$

При $\mu\to0$ полученное решение переходит в решение дрейфовой теории (без учета самосогласованного поля)

$$u=1-\cos\tau\quad v=-\sin\tau,\quad U=-\gamma^{-1}+\gamma^{-1}\cos\gamma\tau,\quad V=-\gamma^{-1}\sin\gamma\tau$$

С увеличением μ скорость дрейфа электронов вдоль оси x сначала резко возрастает до $u_g=1/4\gamma$ при $\mu=\gamma$, а затем монотонно уменьшается как μ^{-1} при больших μ. Скорость дрейфа ионов монотонно уменьшается. Как следует из решений (3.2), движения вдоль оси y помимо осцилляций содержат еще равноускоренное движение. Таким образом, учет самосогласованного поля возвращает силе тяжести способность ускорять частицы. Следует только заметить, что это ускорение частиц зависит теперь от степени разреженности среды μ.

Для исследования электрического дрейфа первоначально покоившейся плазмы нужно решить систему уравнений (2.3), но с другими начальными условиями. Считая внешнее электрическое поле направленным вдоль отрицательной оси y (магнитное поле — вдоль z), в качестве характерной скорости в (2.2) удобно выбрать величину $\vartheta_0=cE_0/B_0$, равную скорости электрического дрейфа изолированной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях. Тогда начальные условия для системы (2.3) примут вид

$$E_x=0,\quad E_y=-1,\quad u=v=U=V=0\quad (\tau=0)$$

Решение в этом случае имеет вид

$$E_x=\omega_1\omega_2 d[\omega_2\sin T_1-\omega_1\sin T_2] \tag{3.3}$$

$$E_y=u_d-\omega_1\omega_2 d[\omega_1\cos T_2+\omega_2\cos T_1]$$
$$u=u_d+\Theta_1\omega_1\cos T_1-\Theta_2\omega_2\cos T_2$$
$$v=\Phi(\omega_2)\omega_2\sin T_2-\Phi(\omega_1)\omega_1\sin T_1$$
$$U=U_d+\chi_2\omega_2\cos T_2-\chi_1\omega_1\cos T_1$$
$$V=\Psi(\omega_1)\omega_1\sin T_1-\Psi(\omega_2)\omega_2\sin T_2$$
$$u_d=U_d=-\gamma[\gamma+\mu+\mu\gamma]^{-1}$$

При $\mu\to0$ движение совпадает с электрическим дрейфом изолированной заряженной частицы. С увеличением μ скорость дрейфа u_d быстро уменьшается и стремится к нулю как $\gamma\mu^{-1}$ при больших μ. Уже при $\mu=\gamma$ скорость дрейфа уменьшится вдвое.

Для случая переменного внешнего электрического поля $E_0(\tau)$ общее решение для двухкомпонентной плазмы выражается через свертки функций $E_0(\tau)$ и $\exp(i\omega_1\tau)$ или $\exp(i\omega_2\tau)$. Скорости поляризационного дрейфа ионов U_p и электронов u_p выражаются через скорости поляризационного дрейфа изолированных частиц $U_p{}^\circ$ и $u_p{}^\circ$ в виде

$$u_p=(\gamma^2+\mu\gamma+\mu)\omega_1^{-2}\omega_2^{-2}u_p{}^\circ,\quad U_p=\gamma^2(1+\mu+\mu\gamma)\omega_1^{-2}\omega_2^{-2}U_p{}^\circ$$

При возрастании μ от нуля скорость дрейфа электронов сначала резко возрастает, при $\mu=\gamma$ сравнивается с дрейфовой скоростью ионов и при $\mu>\gamma$ ее превышает. При больших значениях μ обе эти скорости убывают как μ^{-1}.

Рассматриваемые движения нарушаются столкновениями частиц. Время существования этих движений есть время между столкновениями $t^\circ=(\vartheta n\sigma)^{-1}$. Выбирая для характерной скорости ϑ и сечения взаимодействия σ завышенные значения $\vartheta=10^{10}$ *см/сек*, $\sigma=10^{13}$ *см*^{2}, найдем $t^\circ=10^3/n$. Чтобы вообще можно было рассматривать плазму как бесстолкновительную, необходимо, чтобы частота соударений $\nu=1/t^\circ$ была меньше наименьшей из частот в рассматриваемом движении. Так, если потребовать, чтобы ν было меньше ионной циклотронной частоты ($\nu<\omega_i$), получим, что плотность частиц n ограничена условием $n<10^{10}\gamma B_0$, а значение параметра μ — требованием $\mu<10^5\gamma/B_0$. Эти ограничения оставляют определенную свободу для рассмотрения движений достаточно разреженной плазмы в нечрезмерно сильных магнитных полях.

Основной особенностью полученных решений является то, что они выясняют роль коллективных эффектов в движении разреженной плазмы в магнитном поле. Общий вывод состоит в том, что коллективные эффекты проявляются при значениях параметра μ порядка γ, т. е. уже при очень малых плотностях заряженных частиц. Так, в (2.9) постоянная часть скорости достигает максимального значения при $\mu\to\infty$. Но уже при $\mu=\gamma$ она равна половине этого предельного значения. В поле напряженностью $B_0=1$ *гс* при $\gamma=10^{-4}$ значению $\mu=\gamma$ соответствует $n=10$ частиц/*см*^{3}.

Авторы благодарны Л. И. Седову за ценные обсуждения и внимание к работе.

Поступила 16 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов А. А.* О вибрационных свойствах электронного газа. Усп. физ. н., 1967, т. 93, вып. 3.
2. *Альвен Г., Фельтхаммер К. Г.* Космическая электродинамика. М., «Мир», 1967.
3. *Davidson R. C.* Methods in nonlinear plasma theory. Acad. Press., New York — London, 1972.
4. *Шафранов В. Д.* Электромагнитные волны в плазме. Вопросы теории плазмы, 1963, вып. 3.