

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРОЦЕССА УСТАНОВЛЕНИЯ  
ПО ВРЕМЕНИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОГО  
ОБТЕКАНИЯ ГАЗОМ РЕШЕТОК ПРОФИЛЕЙ

А. Б. БОГОД, Б. С. ЗАМТФОРТ, М. Я. ИВАНОВ,  
А. Н. КРАЙКО

(Москва)

Рассматривается использование процесса установления по времени при решении задач стационарного обтекания решеток профилей идеальным (невязким и нелоппроводным) газом. Главное внимание уделяется роли условия Чаплыгина — Жуковского, использование которого, как известно [1, 2], необходимо при решении указанных задач как стационарных. Приведены результаты, полученные в процессе установления по времени с применением и без применения упомянутого условия. И в том и в другом случаях в процессе установления вырабатывались некоторые не зависящие от времени распределения параметров, удовлетворяющие уравнениям и условиям стационарной задачи (точнее их конечно-разностному аналогу). Сравнение полученных распределений показывает, что их различие лежит в пределах точности вычислений, причем результаты расчета достаточно хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

Проведенные расчеты и сравнение с экспериментом позволяют надеяться, что решение, вырабатывающееся в процессе установления в случае решеток профилей со слегка скругленными задними кромками, также близко к реализующемуся в действительности (речь идет о профилях и режимах обтекания, для которых отрыв потока локализуется в малой окрестности задней кромки). Отметим, кстати, что и при решении стационарной задачи положение точки схода потока на скругленной кромке задается достаточно произвольно. На самом деле в этом случае вблизи скругления обычно наблюдается отрыв пограничного слоя, что, строго говоря, делает необоснованным рассмотрение течения в окрестности задней кромки в рамках идеального газа. Сказанное следует иметь в виду и в других случаях: при расчете обтекания единичного профиля и при рассмотрении течения в лопаточном венце, которое носит пространственный характер.

Таким образом, в дополнение к известным упрощениям, связанным с переходом от стационарной задачи к нестационарной, процесс установления позволяет избавиться от необходимости использования условия Чаплыгина — Жуковского (или его аналогов в более сложных случаях). Указанные упрощения особенно существенны на режимах трансзвукового обтекания решеток, когда благодаря введению времени краевая задача для эллипτικο-гиперболической системы заменяется более простой задачей для системы гиперболического типа.

Известны примеры применения процесса установления к расчету течения газа в решетках [3-6]. В [3, 4] рассчитывалось обтекание достаточно произвольных плоских решеток равномерным потоком, а в [5, 6] — решеток симметричных профилей, обтекаемых под нулевым углом атаки неравномерным (неизэнтропическим или неизэнергетическим) потоком. В [5, 6] решетка и неравномерный набегающий поток были плоскими. Однако их взаимное расположение таково, что в [5] поток остается плоским всюду, а в [6] в области взаимодействия потока и решетки течение носит пространственный характер.

1. Пусть плоская решетка, составленная из одинаковых профилей, обтекается равномерным потоком идеального газа и ось  $x$  перпендикулярна фронту решетки. Ось  $y$  совместим с передним фронтом решетки и примем следующие обозначения:  $t$  — время;  $u$ ,  $v$  и  $q$  — проекции и модуль вектора скорости на оси  $x$  и  $y$ ;  $p$ ,  $\rho$ ,  $e$ ,  $i$  и  $s$  — соответственно давление, плотность, удельные внутренние энергия, энтальпия и энтропия газа.

Все величины безразмерные. Если  $\rho_*$  и  $q_*$  — размерные критические плотность и скорость, а  $l$  — характерная длина, в качестве которой будем брать ширину решетки

ки (расстояние между передним и задним фронтами), то приведение к безразмерному виду осуществляется отнесением времени к  $l/q_*$ , скорости — к  $q_*$ , плотности — к  $\rho_*$ , давления — к  $\rho_* q_*^2$ , внутренней энергии и энтальпии — к  $q_*^2$ .

Параметрам набегающего потока, которые в задачах обтекания решеток обычно считаются заданными, будем приписывать нижний индекс  $\infty$ . В рассматриваемом случае набегающий поток полностью определяется заданием энтропии  $s_\infty$ , полной энтальпии  $I_\infty = (i + q^2/2)_\infty$ , модуля скорости  $q_\infty$  и угла  $\theta_\infty$ , образуемого вектором скорости  $q_\infty$  с осью  $x$ . На режимах дозвукового обтекания решеток и на тех трансзвуковых режимах, когда не происходит полного запираания решетки, вместо  $q_\infty$  при  $x = -\infty$  можно задавать давление  $p_+$  в некотором сечении  $x = L_+ > 1$  справа от решетки. Последнее в этих случаях выбирается достаточно далеко от решетки. Если стационарное решение вырабатывается в процессе установления, когда при интегрировании уравнений нестационарного течения условия на границах рассчитываемой области (в плоскости  $xy$ ) должны ставиться с учетом свойств указанных уравнений, вторая постановка оказывается предпочтительной.

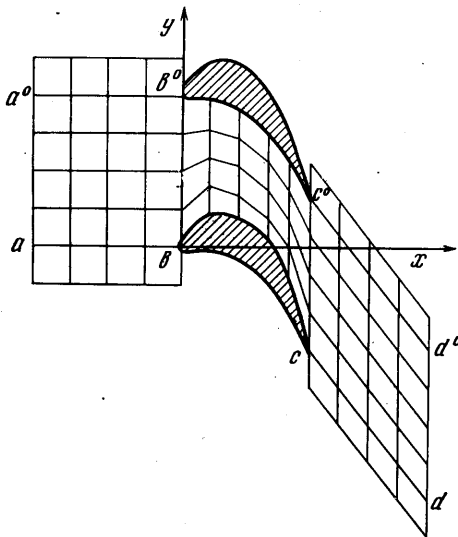
Остановимся на вопросе о постановке граничных условий в нестационарных задачах газовой динамики. Как показывает анализ, при определении количества и вида условий, которые требуется ставить на границе  $\Gamma$  исследуемой области  $\Omega$  плоскости  $xy$  (в трехмерном случае — пространства  $xyz$ ), можно руководствоваться следующим правилом. В окрестности бесконечно малого элемента границы  $\Gamma$  с внешней к  $\Omega$  нормалью  $n$  рассматривается одномерное нестационарное течение с плоскими волнами, параметры которого зависят только от  $t$  и от координаты  $n$ , отсчитываемой вдоль  $n$ . Если  $q_n$  — проекция вектора скорости на  $n$ , то произвольное слабозвучное течение указанного типа есть комбинация трех волн, распространяющихся со скоростями  $q_n$  и  $q_n \pm a$ , где  $a$  — скорость звука. Первая волна, скорость движения которой совпадает с проекцией скорости газа на  $n$ , полностью определяется распределением двух (трех в пространственном случае) величин — энтропии и касательной (касательных) к  $\Gamma$  компоненты (компонент) вектора  $q$ . Каждая из двух волн, распространяющихся относительно газа со скоростью звука, характеризуется распределением одного параметра, например давления или соответствующего инварианта Римана.

Число условий, выставляемых на рассматриваемом участке границы  $\Gamma$ , равно числу параметров (вернее их распределений), определяющих те одномерные плоские волны, которые распространяются от данного участка границы внутрь  $\Omega$ . Так, от непроницаемой стенки, на которой  $q_n = 0$ , внутрь  $\Omega$  может распространяться только одна волна, движущаяся со скоростью  $q_n - a = -a$ , и, следовательно, требуется одно граничное условие. Если  $q_n < 0$ , что в рассматриваемой задаче имеет место при  $x = -\infty$  или в некотором конечном сечении  $x = -L_-$ , куда при расчете переносятся условия из  $-\infty$ , то при  $|q_n| < a$  число граничных условий равно трем (четырем в пространственной задаче), а при  $|q_n| > a$ , т. е. при сверхзвуковой нормальной к фронту решетки составляющей скорости, — четырем (пяти). Аналогично на правой границе исследуемой области ( $x = L_+$ ) при  $a > q_n > 0$  ставится одно условие, а при  $q_n > a$  — ни одного. Кроме того, следует иметь в виду, что в число задаваемых величин не могут входить параметры, которые определяют волны, не приходящие в  $\Omega$ . Например, на непроницаемых стенках нельзя задавать энтропию, касательные к стенке компоненты вектора скорости и инвариант Римана, который характеризует волну, распространяющуюся в направлении  $n$ , а также любые функции перечисленных параметров.

Подчеркнем, что сказанное выше относится к заданию самих параметров, а не их производных. Дополнительные условия на производные могут ставиться в тех случаях, когда эти условия есть следствия уравнений и граничных условий полной нестационарной или предельной стационарной задачи. Так, для равномерного набегающего потока при  $x = -\infty$  обращаются в нуль все производные по пространственным переменным, и в частности по  $x$ . Вытекающие отсюда равенства (или равенство) в принципе можно использовать при построении разностного аналога соответствующей краевой задачи при  $x = -L_-$ , как это делается, например, в [7, 8]. Следует, однако, помнить, что в действительности для правильно сформулированной задачи все производные на  $\Gamma$  определяются из ее решения. Поэтому привлечение дополнительных условий на производные не является необходимым. Более того, в случаях, аналогичных рассмотренному выше, когда условия на производные ставятся не там, где они на самом деле имеют место (т. е. при  $x = -\infty$ ), а на конечном

расстоянии от решетки (при  $x = -L_-$ ); их использование вносит дополнительные погрешности в результаты счета (при  $L_- \rightarrow \infty$  указанные погрешности стремятся к нулю).

При расчете обтекания решетки область  $\Omega$  в плоскости  $xy$  бралась такой, как показано на фиг. 1. При этом граница  $\Gamma$  состояла из отрезков  $bc$  и  $b^{\circ}c^{\circ}$  верхней и нижней образующих двух соседних профилей, участков  $ab$  и  $a^{\circ}b^{\circ}$  параллельных прямых, приходящих в передние точки профилей ( $ab$  лежит на оси  $x$ ), отрезков  $cd$  и  $c^{\circ}d^{\circ}$  двух конгруэнтных линий, начинающихся в концевых точках профилей, и отрезков  $aa^{\circ}$  и  $dd^{\circ}$  вертикальных прямых  $x = -L_-$  и  $x = L_+$  соответственно. Если расчет велся без использования условия Чаплыгина — Жуковского, то отрезки  $cd$  и  $c^{\circ}d^{\circ}$  были отрезками прямых, проведенных под некоторым (достаточно произвольным) углом к оси  $x$ .



Фиг. 1

В противном случае указанные отрезки брались прямыми только в начале счета (при  $t=0$ ), а затем деформировались (при фиксированных точках  $c$  и  $c^{\circ}$ ).

Нормальная составляющая скорости смещения каждой отличной от  $c$  и  $c^{\circ}$  точки  $cd$  или  $c^{\circ}d^{\circ}$  полагалась пропорциональной величине  $q_n$  в той же точке рассматриваемых участков границ. В силу этого для решения, которое получалось в результате установления, отрезки  $cd$  и  $c^{\circ}d^{\circ}$  совпадали с отрезками ли-

ний тока, сходящих (в соответствии с принятым способом построения) с задних кромок, т. е. обеспечивалось выполнение условия Чаплыгина — Жуковского. Некоторые детали процедуры построения отрезков  $cd$  и  $c^{\circ}d^{\circ}$  приводятся ниже.

Благодаря периодичности течения по  $y$  параметры газа над  $a^{\circ}b^{\circ}$  не отличаются от параметров газа над  $ab$ . Поэтому отрезок  $a^{\circ}b^{\circ}$  и по аналогичной причине отрезки  $ab$ ,  $cd$  и  $c^{\circ}d^{\circ}$  по существу являются внутренними, что делает излишним постановку на них каких-либо граничных условий (при расчете к области  $\Omega$  присоединяются дополнительные ячейки, как это показано на фиг. 1; параметры газа в них полагаются равными параметрам газа в соответствующих ячейках области  $\Omega$ ). На остальных участках границы рассматриваемой области ставились следующие условия:

$$(1.1) \quad v/u = \operatorname{tg} \theta_{\infty}, I = i(p, \rho) + q^2/2 = I_{\infty}, s(p, \rho) = s_{\infty} \text{ на } aa^{\circ} \\ p = p_+ \text{ на } dd^{\circ}, q_n = 0 \text{ на } bc \text{ и } b^{\circ}c^{\circ} \quad (q = \sqrt{u^2 + v^2})$$

Здесь  $\theta_{\infty}$ ,  $I_{\infty}$ ,  $s_{\infty}$  и  $p_+$  — заданные константы, а  $i$  и  $s$  — известные функции своих аргументов, причем под  $s$  в (1.1) можно понимать любую функцию энтропии. Для совершенного газа с постоянными теплоемкостями и показателем адиабаты  $\kappa$  в качестве такой функции будем использовать отношение  $p/\rho^{\kappa}$ . Так как для совершенного газа

$$e = \frac{p}{(\kappa-1)\rho}, \quad i = e + \frac{p}{\rho} = \frac{\kappa p}{(\kappa-1)\rho}, \quad a = \left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2}$$

то второе и третье условия из (1.1) с учетом способа обезразмеривания заменяются на

$$\frac{\kappa p}{(\kappa-1)\rho} + \frac{q^2}{2} = \frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}, \quad \frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{1}{\kappa} \text{ на } aa^\circ$$

При равномерном набегающем потоке первое из этих равенств для стационарного течения, как известно, выполняется всюду, а второе — вне областей, которые заняты газом, проходящим через ударные волны. На трансзвуковых режимах течения, когда даже при наличии ударных волн возрастание энтропии в них невелико,  $p/\rho^\kappa \approx 1/\kappa$  также во всем потоке. Тем не менее расчеты, некоторые результаты которых приводятся ниже, основывались на интегрировании полной системы нестационарных уравнений газовой динамики без использования интегралов изэнтропичности и изоэнергетичности, а отличие полной энтальпии от константы (для стационарных распределений параметров) служило критерием при оценке точности вычислений.

Исходная система уравнений, описывающих нестационарное течение идеального газа, бралась в форме интегральных законов сохранения

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_{\omega(t)} \rho \, dx \, dy + \oint_{\gamma(t)} \rho [(u-D_x)dy - (v-D_y)dx] &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iint_{\omega(t)} \rho u \, dx \, dy + \oint_{\gamma(t)} \{ [p + \rho u(u-D_x)] dy - \rho u(v-D_y) dx \} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iint_{\omega(t)} \rho v \, dx \, dy + \oint_{\gamma(t)} \{ \rho v(u-D_x) dy - [p + \rho v(v-D_y)] dx \} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iint_{\omega(t)} \rho (2e + q^2) \, dx \, dy + \oint_{\gamma(t)} \{ [\rho (2e + q^2) (u-D_x) + 2pv] dy - \\ - [\rho (2e + q^2) (v-D_y) + 2pv] dx \} &= 0 \end{aligned}$$

из которых могут быть получены как дифференциальные уравнения течения, так и соотношения на сильных разрывах.

В (1.2)  $\omega(t)$  — произвольная площадка в плоскости  $xy$ ,  $\gamma(t)$  — ее граница, которая обходится в положительном направлении (против часовой стрелки), а через  $D_x$  и  $D_y$  обозначены соответствующие проекции нормальной скорости границы  $\gamma(t)$ .

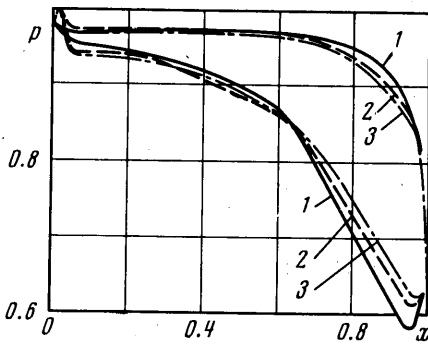
Интегрирование (1.2) велось при помощи разностной схемы С. К. Годунова [9, 10], причем в качестве  $\omega(t)$  бралась элементарные ячейки, получающиеся в результате разбиения области  $\Omega$  отрезками вертикальных прямых и продольных линий, принцип построения которых показан на фиг. 1. Если при проведении расчетов условие Чаплыгина — Жуковского не использовалось, то разбиение  $\Omega$  на элементарные ячейки было фиксированным (т. е.  $\omega$  и  $\gamma$  не зависели от времени и как следствие этого  $D_x = D_y = 0$ ). В противном случае продольные границы ячеек, лежащих справа от заднего фронта решетки (при  $1 \leq x \leq L_+$ ), в процессе счета перемещались в соответствии с деформацией  $cd$  и  $c^\circ d^\circ$ , все время оставаясь конгруэнтными друг другу. В силу последнего обстоятельства, площадь  $\omega(t)$  не зависит от времени и для таких ячеек.

Скорости перемещения продольных границ (в случае подвижной сетки) для каждого вертикального слоя, лежащего справа от решетки (при  $x > 1$ ), были одинаковыми и определялись по нормальной к соответствующему отрезку кривой  $cd$  (или  $c^\circ d^\circ$ ) составляющей вектора скорости газа. Последняя находилась так же, как и все параметры на границах ячеек в методе С. К. Годунова, т. е. полагалась равной скорости контактного разрыва, который возникает при распаде произвольного разрыва, соответствующего параметрам на предыдущем вертикальном слое в примыкающих к  $cd$  и  $c^\circ d^\circ$  ячейках разностной сетки. Полученное таким путем значение нормальной составляющей скорости газа принималось равным скорости перемещения правого конца рассматриваемого отрезка границы, а  $D_x$  и  $D_y$  определялись как полусуммы скоростей таких концевых точек (напомним, что точки  $s$  и  $s^\circ$  при этом оставались неподвижными).

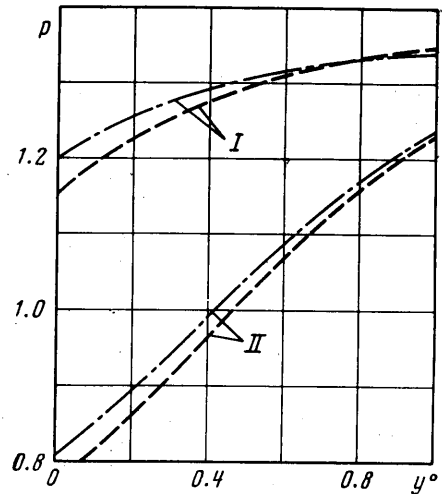
Как показали расчеты, сечения  $aa^\circ$  и  $dd^\circ$  можно было выбирать на расстояниях (от соответствующего фронта решетки) порядка расстояния между соседними профилями (шага решетки). Параметры на правой границе области  $\Omega$ , т. е. на  $dd^\circ$ , при  $\kappa < a$  вычислялись по  $p_+$  в соответствии с формулами, приведенными в [11], а на ее

левой границе (на  $aa^{\circ}$ ) — по условиям из (1.1), дополненным условием сохранения на каждом временном слое «левого» инварианта Римана. Последний для каждого отрезка границы, как и в [12], брался равным своему значению в прилегающей к  $aa^{\circ}$  справа ячейке разностной сетки. Прочие детали численного метода и разностной схемы достаточно подробно изложены в работах, цитированных выше.

2. С целью выяснения роли условия Чаплыгина — Жуковского при решении задач обтекания решеток с использованием процесса установления по времени был проведен расчет обтекания нескольких плоских решеток совершенным газом с  $\kappa=1.4$  и результаты расчета были сравнены с имеющимися экспериментальными данными.



Фиг. 2

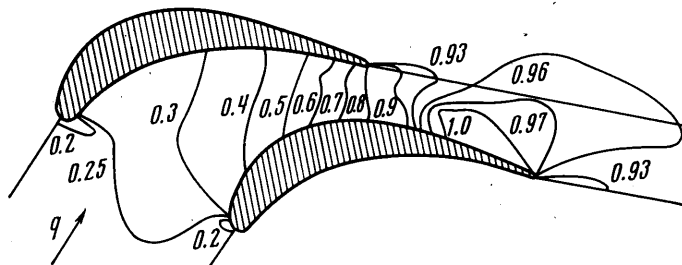


Фиг. 3

Следует отметить, что в соответствующих экспериментальных исследованиях профили, составляющие решетки, имели затупленные передние и задние кромки. В то же время при расчете образующие профилей аппроксимировались отрезками прямых, которые соединялись друг с другом в точках пересечения с вертикальными границами разностной сетки, в частности с фронтами решетки. При этом хотя с увеличением количества расчетных ячеек отличие действительных контуров от ломаных, аппроксимирующих их, уменьшается, при использованном количестве ячеек отличие по углу наклона образующей в непосредственной окрестности задней кромки было значительным. Тем не менее, как показало сопоставление результатов расчетов, выполненных при различном разбиении области течения, такое отличие не приводит к заметному возрастанию погрешностей вычислений вне сравнительно малых окрестностей задних кромок.

Некоторые результаты расчета обтекания решетки ЦКТИ ТН-2 представлены на фиг. 2—4. Шаг этой решетки равен 0.66, а условия обтекания согласно сказанному ранее определялись заданием  $\theta_{\infty}=0$  и  $p_{+}=0.75$ . На фиг. 2 нанесены распределения давления по  $x$  вдоль вогнутой и выпуклой стенок профиля решетки (верхние и нижние кривые соответственно). В соответствии со способом обезразмеривания  $M=1$  отвечает  $p=0.714$ . Линиями 1 на фигуре нанесены распределения, полученные экспериментально [13], линиями 2 — результаты расчетов, полученные с использованием условия Чаплыгина — Жуковского, т. е. с выделением линий схода и с применением подвижной сетки, а линиями 3 — без использования указанного условия.

Рассмотрение приведенных на фиг. 2 кривых показывает, что различие результатов лежит в пределах погрешностей вычислений. Внутри поля течения отличие результатов расчетов, приведенных с выделением и без выделения линий схода, оказывается того же порядка, как и на стенке. Это видно из рассмотрения фиг. 3, на которой даны полученные двумя способами распределения давления по межлопаточному каналу для двух сечений ( $x=0.48$  и  $0.86$ ). Соответствующие кривые, обозначенные так же, как на фиг. 2, отмечены римскими цифрами I и II. Под  $y^\circ$  на фиг. 3 понимается расстояние по  $y$  от выпуклой стенки нижнего профиля, отнесенное к высоте межлопаточного канала в рассматриваемом сечении.



Фиг. 4

На фиг. 4 в плоскости  $xu$  изображены два соседних профиля решетки и линии  $M=\text{const}$ , полученные в процессе установления с использованием условия Чаплыгина — Жуковского (цифры около кривых — значения чисел Маха). Аналогичные кривые, полученные без привлечения этого условия, как и в случае фиг. 2 и 3, оказались близкими к изображенным.

Представляет интерес выяснение причин, в силу которых в процессе установления реализуется решение, удовлетворяющее (во всяком случае, в пределах точности вычислений) условию схода с задней кромки. Не исключено, что определенную ясность для выяснения их природы могло бы внести исследование устойчивости соответствующего стационарного течения. При этом может оказаться, что такое исследование необходимо выполнять с учетом диссипативных механизмов, которые, отсутствуя в исходных уравнениях течения невязкого и нетеплопроводного газа, неизбежно появляются в их разностных аналогах.

О том, что указанные механизмы играют весьма важную роль, говорит независимость стационарных распределений параметров от начальных данных. Это показали специальные расчеты методом установления. Отметим, что для отбора требуемого решения, по-видимому, важен не конкретный вид «диссипативных» членов, появляющихся в разностных уравнениях и зависящих от выбранной разностной схемы, а само наличие механизма диссипации.

Как видно из фиг. 2, расчеты, выполненные в данной работе, не претендуют на особо высокую точность. Повышение точности может быть достигнуто как за счет применения более густой разностной сетки (в рассмотренных примерах расчет велся при 400–500 ячейках, а процесс установления требовал 3–4 час на ЭВМ М-220), так и за счет других мероприятий. В качестве последних укажем на использование интегралов Бернулли и изэнтропичности, а также на применение разностных сеток, которые в большей степени учитывают особенности исследуемого течения.

В заключение авторы благодарят С. И. Гинзбурга, Г. Ю. Степанова и Г. Г. Черного за участие в обсуждении работы.

Поступила 20 VI 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
3. Gopalakrishnan S., Bozzola R. A numerical technique for the calculation of transonic flows in turbomachinery cascades. Paper ASME, 1971, No. GT-42.

4. *McDonald P. W.* The computation of transonic flow through two-dimensional gas turbine cascades. Paper ASME, 1971, No. GT-89.
5. *Замтфорт Б. С., Иванов М. Я.* Обтекание решетки симметричных профилей околозвуковым неизэнтропическим потоком. Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 6.
6. *Oliver D. A., Sparis P.* A computational study of three-dimensional transonic shear flow in turbomachine cascades. AIAA paper, 1971, No. 83.
7. *Иванов М. Я., Крайко А. Н.* Численное решение прямой задачи о смешанном течении в соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
8. *Иванов М. Я., Крайко А. Н.* Расчет смешанного течения газа в соплах. Тр. Секции по численным методам в газовой динамике 2-го Международного коллоквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем, 1969, т. 2. М., ВЦ АН СССР, 1971.
9. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Матем. сб., 1959, т. 47 (89), № 3.
10. *Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П.* Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.
11. *Гринь В. Т., Иванов М. Я., Крайко А. Н.* Исследование динамики течения торможения идеального газа с замыкающим скачком уплотнения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 4.
12. *Крайко А. Н., Осипов А. А.* Исследование отражения возмущений от дозвуковой части сопла Лавалья. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 1.
13. *Лукасова Е. А., Жуковский М. И., Завадовский А. М., Зысина-Моложен Л. М., Скнарь Н. А., Тырышкин В. Г.* Аэродинамическое совершенствование лопаточных аппаратов паровых и газовых турбин. М.—Л., Госэнергоиздат, 1960.