МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1974

УДК 533.6.011.5

ПРОИЗВОЛЬНОЕ ТЕЛО, БЛИЗКОЕ К КЛИНУ, В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

М. И. ФОЛЛЭ

(*Москва*)

Задача сверхзвукового обтекания тел, близких к клину, была впервые рассмотрена в двумерном случае в [1]. Ударная волна предполагалась присоединенной, течение за ней – сверхзвуковым; с учетом этого угол клина полагался произвольным. Поверхность тела тоже была произвольной, лишь бы она была близка к поверхности клина.

При решении трехмерной задачи вначале было рассмотрено обтекание двух несущих поверхностей с мало отличающимися углами атаки [2] и затем треугольного крыла [3, 4]. Во всех этих работах использовался метод Лайтхилла для решения краевой задачи Гильберта [5, 6].

Целый класс поверхностей тел с произвольными кромками в предположении, что поверхность тела цилиндрическая с образующими, направленными по линиям тока невозмущенного течения за косым скачком, был рассмотрен в [7]. В предлагаемой работе задача рассматривается для широкого класса поверхностей тел и используется новый метод, обобщающий результаты [8].

1. Направим ось x по невозмущенной линии тока за скачком, ось y — по кромке клина, z — по внешней нормали к клину.

Пусть поверхность Z_w и кромка крыла определяются формулами

$$z=\varepsilon Z_w(x, y), \quad x=\varepsilon X_b(y), \quad z=\varepsilon Z_w(0, y) \tag{1.1}$$

где ε — малый параметр.

Линеаризация уравнений и граничных условий производится аналогично [1, 7]

$$v_{2x}=v_0(1+\varepsilon v_x), \quad v_{2y}=v_0(\varepsilon v_y), \quad v_{2z}=v_0(\varepsilon v_z) \tag{1.2}$$

$$p_2=p_0(1+\varepsilon p), \quad \rho_2=\rho_0(1+\varepsilon \rho)$$

Здесь v_0, p_0, ρ_0 — скрость, давление и плотность невозмущенного потока за косым скачком, v_x, v_y, v_z, p, ρ — соответствующие возмущения, функции от x, y, z, индекс 2 характеризует течение за скачком.

Линеаризованную систему уравнений при $0\leqslant z\leqslant kx$ (1.3), граничные условия (1.5) на ударной волне (1.4) заимствуем из [7]

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{1}{\gamma M_0^2}\frac{\partial p}{\partial x}=0, \ \frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{1}{\gamma M_0^2}\frac{\partial p}{\partial y}=0, \ \frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{1}{\gamma M_0^2}\frac{\partial p}{\partial z}=0 \tag{1.3}$$

$$(1-M_0^2)\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial p}{\partial x}-\gamma\frac{\partial \rho}{\partial x}=0$$

$$z=kx+Z_s(x, y) \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial Z_s}{\partial x}(A-1)=v_xk[1+(\gamma-1)M_0^2]-v_z+kp, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial Z_s}{\partial x}B(A-1)+v_x=-\frac{p}{\gamma M_0^2}$$

$$v_y=B\frac{\partial Z_s}{\partial y},\quad kv_z-AB\frac{\partial Z_s}{\partial x}=\frac{p}{\gamma M_0^2},\quad v_x(\gamma-1)M_0^2+p-\rho=0,\quad (z=kx)$$

$$A=\frac{1}{1+k^2}\left(k^2+\frac{\rho_1}{\rho_0}\right),\quad B=\frac{k}{1+k^2}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho_1}\right),$$

$$\frac{\rho_0}{\rho_1}=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{2(1+k^2)}{(\gamma+1)M_0^2k^2},\qquad k=\operatorname{tg}\chi$$

где M_0 — число Маха за скачком, γ — показатель адиабаты, χ — угол между плоскостями клина и скачка.

Граничные условия на теле (крыле) и на кромке можно записать

(1.6) $\quad v_z=\partial Z_w(x,y)/\partial x\quad (z=0)$

(1.7) $\quad Z_s(0,y)=Z_w(0,y)-kX_b(y)\equiv f(y)$

2. Систему уравнений (1.3) можно проинтегрировать в общем виде [8]. Пять неизвестных функций (v_x, v_y, v_z, p, ρ) трех координат x, y, z выражаются через пять произвольных функций ($w(x, y)$, $s(x, y)$, $U(y, z)$, $\Omega(y, z)$, $\Theta(y, z)$) двух координат

(2.1) $$v_x(x,y,z)=\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}+U(y,z),\quad v_y(x,y,z)=\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial\Omega(y,z)}{\partial z}$$

$$v_z(x,y,z)=\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}-\frac{\partial\Omega(y,z)}{\partial y},\quad p(x,y,z)=-M_0^2\gamma\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}$$

$$\rho(x,y,z)=\frac{p(x,y,z)}{\gamma}+\Theta(y,z),$$

$$\varphi(x,y,z)=\iint\limits_{\Sigma_w}\frac{w(x',y')dx'dy'}{r_w}+\iint\limits_{\Sigma_s}\frac{s(x',y')dx'\,dy'}{r_s}$$

Выражение для $\varphi(x, y, z)$ получено в результате решения волнового уравнения, $w(x, y)$, $s(x, y)$ — плотности распределения источников соответственно на плоскостях клина и скачка, Σ_w и Σ_s — те области клина и скачка, возмущения из которых доходят до точки (x, y, z), $r=\{(x-x')^2-(M_0^2-1)[(y-y')^2+(z-z')^2]\}^{1/2}$.

Пять неизвестных функций двух аргументов, к которым добавится $Z_s(x, y)$, необходимо найти из пяти условий сохранения на ударной волне (1.5) и условия обтекания клина (1.6), используя одномерное условие (1.7). Из полученной системы уравнений можно исключить функции $\Theta(y, z)$, $U(y, z)$, которые входят в нее алгебраически, и $Z_s(x, y)$, $\Omega(y, z)$, которые входят в нее своими частными производными.

В результате получим интегродиференциальную систему двух уравнений для функций $w(x, y)$, $s(x, y)$ [8]. Окончательное уравнение, следующее из всех условий сохранения на скачке

(2.2) $$\varkappa_1\frac{\partial^2F_1(x,y)}{\partial y^2}+\varkappa_2\frac{\partial^2F_1(x,y)}{\partial x^2}+\varkappa_3\frac{\partial^2F_3(x,y)}{\partial x^2}+\varkappa_4\frac{\partial^2F_2(x,y)}{\partial x\,\partial y}=0$$

$$\varkappa_1=-kB(1-k^2k_0^2),\quad \varkappa_2=C+BAkk_0^2,\quad \varkappa_3=Ck+BA,\quad \varkappa_4=\varkappa_3k$$

$$k_0^2=M_0^2-1,\quad C=(A-1)\{1+Bk[1+(\gamma-1)M_0^2]\}$$

$$F_1(x,y)=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{z=kx},\quad F_2(x,y)=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{z=kx},\quad F_3(x,y)=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=kx}$$

Эта запись не есть введение новых неизвестных функций, а лишь удобное символическое обозначение для сложных интегродифференциальных конструкций от $w(x, y)$, $s(x, y)$. Следуя [8], нетрудно получить

$$(2.3)\qquad F_1(x,y)=\frac{\pi}{k_0}w(x(1-kk_0),y)+$$

$$+\frac{\pi}{k_0}\frac{1}{1+kk_0}s(x,y)+J_{1w}(x,y)+J_{1s}(x,y),\quad F_2(x,y)=J_{2w}(x,y)+J_{2s}(x,y)$$

$$F_3(x,y)=-\pi w(x(1-kk_0),y)+\frac{\pi}{1+kk_0}s(x,y)+J_{3w}(x,y)+J_{3s}(x,y)$$

В (2.3) $J_{iw}(x, y)$, $J_{is}(x, y)$, $i=1, 2, 3$ — вновь интегродифференциальные конструкции от $w(x, y)$ и от $s(x, y)$. Все они строятся однотипно: повторный интеграл, а под ним — частная производная от $w(x, y)$ или от $s(x, y)$ по второму аргументу. Поэтому приведем здесь только $J_{1w}(x, y)$ и $J_{1s}(x, y)$

$$(2.4)\qquad J_{1w}(x,y)=$$

$$=-\frac{1}{k_0}\int\limits_{x'=0}^{x'=x\beta}\int\limits_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left[\frac{\partial w(x',y')}{\partial y}\bigg|_{y'=R_w(x,x',y,\theta)}\right]\frac{(x-x')\cos\theta\, d\theta\, dx'}{k_0R_w(x,x')}$$

$$J_{1s}(x,y)=-\frac{1}{k_0}\int\limits_{x'=0}^{x'=x}\int\limits_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left[\frac{\partial s(x',y')}{\partial y'}\bigg|_{y'=R_s(x,x',y,\theta)}\right]\frac{\cos\theta\, d\theta\, dx'}{k_0R_s}$$

$$R_w(\theta,x,x',y)=y-\frac{1}{k_0}R_w(x,x')\cos\theta,$$

$$(2.5)\qquad R_w(x,x')=[(x-x')^2-k^2k_0^2x^2]^{1/2}$$

$$R_s(\theta,x,x',y)=y-\frac{1}{k_0}(x-x')R_s\cos\theta,\quad R_s=[1-k^2k_0^2]^{1/2},\quad \beta=1-kk_0$$

Уравнение обтекания клина (1.6) примет вид

$$(2.6)\qquad \int\limits_{x'=0}^{x'=x\delta}\int\limits_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left[\frac{\partial s(x',y')}{\partial y'}\bigg|_{y'=R(y,x,x',\theta)}\right]\frac{kx'\cos\theta\, d\theta\, dx'}{R(x,x')}+$$

$$+\pi\delta s(x\delta,y)-\pi w(x,y)-\Omega_y'(y,0)=\partial Z_w(x,y)/\partial x$$

$$R(y,x,x',\theta)=y-k_0^{-1}R(x,x')\cos\theta,\ R(x,x')=[(x-x')^2-$$

$$-k^2k_0^2x'^2]^{1/2},\ \delta=1/(1+kk_0)$$

Рассмотрим вспомогательную одномерную задачу на кромке крыла, где верны как уравнения (1.3), так и все граничные условия (1.5)—(1.7). Из решения этой задачи следует, что функцию $\Omega_y'(y, 0)$ можно задать произвольно.

Аналогично [8] граничные условия для системы (2.2), (2.6) можно записать

$$(2.7)\qquad \delta s(0,y)-\lambda w(0,y)=\Lambda\Omega_y'(y,0),\qquad \delta\frac{\partial s(x,y)}{\partial x}\bigg|_{x=0}-$$

$$-\lambda\frac{\partial w(x\beta,y)}{\partial y}\bigg|_{x=0}=\Lambda kBf''(y),\qquad \Lambda=\frac{(1+\lambda)}{2\pi}$$

Здесь λ — коэффициент отражения от ударной волны для возмущений давления [1].

Итак, задача сведена к интегродифференциальной функциональной системе (2.2), (2.6) с граничными условиями (2.7). Хотя уравнения и граничные условия линейны математическая задача представляется все еще очень сложной. Возникает необходимость в каком-то дополнительном предположении. Это предположение должно, с одной стороны, помочь решить задачу, а с другой — сохранить достаточно широкий класс поверхностей крыла и линий кромок, для которых ищется решение.

Предположим, что поверхность и кромка крыла заданы полиномами вида

$$\frac{\partial Z_w(x,y)}{\partial x}=\sum_{l=0}^{n} y^{2l}Z_{lw}'(x),\qquad kBf''(y)=\sum_{l=1}^{n} a_l y^{2(l-1)} \tag{2.8}$$

где $Z_{lw}'(x)$ — известные функции, а a_l — известные коэффициенты. Функции Z_{lw}' могут иметь интегрируемые особенности, в остальном они, как и коэффициенты a_l, произвольны. Естественно, что поскольку решается линейная задача, можно отдельно рассматривать симметричное крыло (2.8) и соответствующее антисимметричное крыло.

Полагаем по симметрии

$$w(x,y)=\sum_l y^{2l}w_l(x)\quad s(x,y)=\sum_l y^{2l}s_l(x),\quad \Omega_y'(y,0)=\sum_l A_l y^{2l} \tag{2.9}$$

где $w_l(x)$, $s_l(x)$—неизвестные функции, A_l—произвольные коэффициенты.

Перейдем к разложению в ряды по y^2 повторных интегралов из (2.2)—(2.4) и (2.6). Эти разложения делаются сходным образом. Для каждого члена ряда по y^2 повторный интеграл распадается на произведение двух интегралов: по x' и по θ, после чего интеграл по θ выражается через элементарные функции. Уравнение (2.6) теперь можно записать

$$\frac{k}{k_0}\sum_{l=1}^{\infty}2l\sum_{q=0}^{l-1}C_{2l-1}^{2q}Q(l-q)\frac{y^{2q}}{k_0^{2(l-q-1)}}\int_0^{x\delta}x'[R(x,x')]^{2(l-q-1)}s_l(x')\,dx'+ \tag{2.10}$$

$$+\left\{\delta\sum_{l=0}^{\infty}y^{2l}s_l(x\delta)-\sum_{l=0}^{\infty}y^{2l}w_l(x)\right\}-\frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}y^{2l}A_l=\frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{n}y^{2l}Z_{lw}'(x)$$

$$Q(m)=\frac{(2m-1)!!}{2^m m!}\quad(m\geqslant 1),\qquad Q(0)=1$$

где C_{2l-1}^{2q} — биномиальные коэффициенты.

Уравнение (2.10) распадается, таким образом, на бесконечную цепочку уравнений при $m=0, 1, \ldots$, где m — степень, в которую возводится y^2. Следующее замечание относится к произвольному уравнению бесконечной цепочки.

Правило индексов. У членов уравнения, выделенных фигурными скобками, степень m совпадает с индексами функций $w_l(x)$, $s_l(x)$, т. е. $m=l$. Напротив, при разложении повторного интеграла коэффициент при $(y^2)^m$ будет содержать $s_l(x)$ с заведомо большим, чем m, индексом ($m=q<l$); l принимает все значения подряд до бесконечности, но начиная с некоторого индекса, большего m. Назовем главной частью уравнения (2.10) при

каждом m те члены уравнения, для которых $l=m$, и дополнительной — те члены, для которых $l>m$.

Правило индексов оказывается справедливым и для уравнения (2.2). Используем вновь символическую запись

$$\varkappa_1 \frac{\pi}{k_0}\sum_{l=1}^{\infty} 2l(2l-1)y^{2l-1}[w_l(x\beta)+\delta s_l(x)]+\varkappa_1\frac{\partial^2}{\partial y^2}J_1(x,y)+ \tag{2.11}$$

$$+\left\{\varkappa_2\frac{\pi}{k_0}\sum_{l=0}^{\infty} y^{2l}[\beta^2 w_l''(x\beta)+\delta s_l''(x)]\right\}+\varkappa_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}J_1(x,y)-$$

$$-\left\{\varkappa_3\pi\sum y^{2l}[\beta^2 w_l''(x\beta)-\delta s_l''(x)]\right\}+\varkappa_3\frac{\partial^2}{\partial x^2}J_3(x,y)+$$

$$+\varkappa_4\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}J_2(x,y)=0$$

$$J_{iw}(x,y)+J_{is}(x,y)=J_i(x,y),\qquad i=1,2,3$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}J_1(x,y)=\frac{\pi}{k_0}\sum_{l=2}^{\infty}2l\sum_{q=1}^{l-1}C_{2l-1}^{2q}2q(2q-1)\frac{Q(l-q)}{k_0^{2(l-q)}}y^{2(q-1)}J_1(x,l,q)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}J_1(x,y)=\frac{\pi}{k_0}\sum_{l=1}^{\infty}2l\sum_{q=1}^{l-1}C_{2l-1}^{2q}\frac{Q(l-q)}{k_0^{2(l-q)}}y^{2q}\frac{d^2}{dx^2}J_1(x,l,q)$$

$$J_1(x,l,q)=\int_0^{x\beta}(x-x')[R_w(x,x')]^{2(l-q-1)}w_l(x')\,dx'+$$

$$+R_s^{2(l-q-1)}\int_0^{x}(x-x')^{2l-2q-1}s_l(x')\,dx'$$

Остальные разложения в (2.11) аналогичны. Граничные условия (2.7) также распадаются на бесконечные цепочки

$$\delta s_l(0)-\lambda w_l(0)=\Lambda A_l,\ \delta s_l'(0)-\lambda\beta w_l'(0)=\Lambda a_{l+1},\ m=l=0,1,\ldots \tag{2.12}$$

Переходим к решению системы уравнений (2.10), (2.11) с граничными условиями (2.12). Рассмотрим эти уравнения и условия при $m>n$. Положим $A_l=0$ при $l>n$. По правилу индексов в эти уравнения войдут только такие функции $w_l(x)$, $s_l(x)$, для которых $l>n$. С другой стороны, все эти уравнения и условия будут однородными, и, следовательно, для этой бесконечной подсистемы существует тривиальное решение ($w_l(x)\equiv s_l(x)\equiv 0$, $l>n$). Таким образом, разложения (2.9) не бесконечные ряды, а полиномы степени n, т. е. той же степени, что и известные функции $Z_{lw}(x)$ и коэффициенты a_l (2.8). Подчеркнем этот факт, добавим w_l и s_l, второй индекс — n. В силу однородного решения для всех отличных от нуля $w_{ln}(x)$ и $s_{ln}(x)$ $l\leqslant n$.

При $m=n$ по правилу индексов уравнения будут состоять только из главной части, дополнительная часть в силу однородного решения для подсистемы уравнений пропадает. После двойного интегрирования по x уравнения (2.11) и использования граничных условий (2.12) при $m=l=n$

получим

(2.13)
$$w_{n,n}(x)=\frac{1}{1+kk_0}s_{n,n}(x)-\frac{A_n}{\pi}-\frac{1}{\pi}Z_{nw}'(x),\quad \delta s_{n,n}(x)-\lambda w_{n,n}(x\beta)=\Lambda A_n$$

Система (2.13) легко сводится к одному функциональному уравнению

$$w_{m,n}(\zeta)-\lambda w_{m,n}(k_1\zeta)=f_{m,n}(\zeta),\ k_1=(1-kk_0)\,/\,(1+kk_0)=\beta\delta \tag{2.14}$$

Решение для функциональных уравнений такого типа найдено [1] в виде

$$w_{m,n}(\zeta)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i f_{m,n}(k_1{}^i\zeta) \tag{2.15}$$

Для системы (2.14) $m=n$, следовательно

$$f_{n,n}(\zeta)=-\frac{1}{\pi}Z_{nw}'(\zeta)-\frac{1-\lambda}{2\pi}A_n \tag{2.16}$$

При $n=0$, т. е. в плоском двумерном случае, получаем по формулам (2.15), (2.16) с учетом $A_0=0$ известное решение [1]

$$w_{00}(\zeta)=w(\zeta)=-\frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i Z_w'(k_1{}^i\zeta)$$

Перейдем к решению системы (2.10), (2.11) при $m=n-1$. По правилу индексов главная часть этих уравнений зависит только от $w_{n-1,n}(x)$, $s_{n-1,n}(x)$. Но теперь уравнения имеют и дополнительную часть. Однако по правилу индексов и в силу однородного решения для подсистемы уравнений эта дополнительная часть зависит только от уже известных функций $w_{n,n}(x)$, $s_{n,n}(x)$. Два раза интегрируем (2.11) и используем граничные уравнения (2.12) при $l=m=n-1$

(2.17)
$$w_{n-1,n}(x)=\delta s_{n-1,n}(x\delta)-\frac{A_{n-1}}{\pi}-\frac{1}{\pi}Z_{n-1,w}'(x)+(2n-1)nJ_{1n}(x)$$
$$\delta s_{n-1,n}(x)-\lambda w_{n-1,n}(x\beta)=\Lambda(a_nx+A_{n-1})-(2n-1)nT_{1n}{}^*(x)$$

Здесь $J_{1n}(x)$ и $T_{1n}{}^*(x)$ вместе с $\Lambda a_n x$ составляют известную дополнительную часть и определяются формулами

(2.18)
$$J_{1j}(x)=\frac{k}{k_0}\int_0^{x\delta}x's_j(x')\,dx',\qquad T_{1j}(x)=2\frac{\varkappa_1}{k_0}[w_j(x\beta)+\delta s_j(x)]+$$
$$+\frac{\varkappa_2}{k_0{}^2}[kk_0\beta^2xw_j'(x\beta)+(1-k^2k_0{}^2)w_j(x\beta)+s_j(x)]-$$
$$-\frac{\varkappa_3k}{k_0}[\beta^2xw_j'(x\beta)-3s_j(x)]$$

$$T_{ij}{}^*(x)=\frac{k_0}{\varkappa_2+\varkappa_3k_0}\int_{x'=0}^{x'=x}\int_{x''=0}^{x''=x'}T_{ij}(x'')\,dx''\,dx' \tag{2.19}$$

В (2.18), (2.19) второй индекс у функций $w_j(x)$ и $s_j(x)$ опущен.

Система (2.19) сводится к функциональному уравнению (2.14) при $m=n-1$

$$(2.20)\qquad f_{n-1,n}(\zeta)=-\frac{Z'_{n-1,w}(\zeta)}{\pi}-\frac{1-\lambda}{2\pi}A_{n-1}+\frac{1+\lambda}{2\pi}\frac{a_n\zeta}{1+kk_0}+$$

$$+(2n-1)n\left[J_{1n}(\zeta)-T_{1n}{}^*\left(\frac{\zeta}{1+kk_0}\right)\right]$$

или

$$f_{n-1,n}(\zeta)=f_{n-1,n-1}(\zeta)+\frac{1+\lambda}{2\pi}\frac{a_n\zeta}{1+kk_0}+(2n-1)n\left[J_{1n}(\zeta)-T_{1n}{}^*\left(\frac{\zeta}{1+kk_0}\right)\right]$$

Поясним последнюю формулу. Соотношения (2.8) можно рассматривать как n-е приближение известных функций $Z_w(x, y)$ и $X_b(y)$. При переходе от $n-1$ к n-му приближению в (2.9) не только появляются отличные от нуля $w_{n,n}(x)$ и $s_{n,n}(x)$, но и уточняются $w_{j,n}(x)$, $s_{j,n}(x)$ $(j=1,\ldots, n-1)$ по сравнению с $w_{j,n-1}(x)$, $s_{j,n-1}(x)$. Формула (2.20) поясняет, как уточняется $f_{n,n-1}(\zeta)$ по сравнению с $f_{n-1,n-1}(\zeta)$ и, следовательно, как уточняются $w_{n,n-1}(\zeta)$ и $s_{n,n-1}(\zeta)$ по сравнению с $w_{n-1,n-1}(\zeta)$, $s_{n-1,n-1}(\zeta)$.

Предположим теперь, что функции $w_{l,n}(x)$, $s_{l,n}(x)$ найдены при всех l от n до $n-j+1$ $(j\geqslant 2)$. Рассмотрим систему уравнений (2.10), (2.11) при $m=n-j$. Вновь воспользуемся правилом индексов. В главную часть войдут функции $w_{n-j,n}(x)$, $s_{n-j,n}(x)$, а в дополнительную — уже найденные функции $w_{l,n}(x)$, $s_{l,n}(x)$ при $l=n-j+\vartheta$, $\vartheta=1,\ldots, j$. Полученная система двух уравнений сводится к (2.14) при $m=n-j$ подобно системам (2.15) или (2.17)

$$f_{n-j,n}(\zeta)=-\frac{1}{\pi}Z'_{n-j,w}(\zeta)-\frac{1-\lambda}{2\pi}A_{n-j}+\frac{1+\lambda}{2\pi}\frac{a_{n-j+1}\zeta}{1+kk_0}+$$

$$+(2n-2j+1)(n-j+1)\left[J_{1,n-j+1}(\zeta)-T^*_{1,n-j+1}(\zeta/(1+kk_0))\right]+$$

$$+\sum_{\vartheta=2}^{j}\frac{[2(n-j+\vartheta)]!}{[2(n-j)]![2^{\vartheta-1}(\vartheta-1)!]^2\vartheta}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}J_{\vartheta,n-j+\vartheta}(\zeta)-(\vartheta-1)T^*_{\vartheta,n-j+\vartheta}\left(\frac{\zeta}{1+kk_0}\right)\right]$$

или

$$(2.21)\qquad f_{n-j,n}(\zeta)=f_{n-j,n-1}(\zeta)+\frac{2n!}{[2(n-j)]![2^{j-1}(j-1)!]^2j}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}J_{j,n}(\zeta)-(j-1)T^*_{j,n}\left(\frac{\zeta}{1+kk_0}\right)\right]\qquad (2\leqslant j\leqslant n)$$

В (2.21), обобщающие (2.16) и (2.20), входят $J_{\vartheta,n-j+\vartheta}(\zeta)$ и $T^*_{\vartheta,n-j+\vartheta}(\zeta)$. Как и в частном случае $\vartheta=j=1$ (2.18), второй индекс этих функций поясняет, от каких уже известных $w_l(\zeta)$, $s_l(\zeta)$ эти функции зависят, $l=n-j+\vartheta$. Первый индекс показывает, как именно эта зависимость осуществляется

$$(2.22)\qquad J_{\vartheta,n-j+\vartheta}(x)=\frac{k}{k_0^{2\vartheta-1}}\int_0^{x\delta}x'[(x-x')^2-k^2k_0^2x'^2]^{\vartheta-2}s_{n-j+\vartheta}(x')dx'$$

При $j=\vartheta=1$ получаем отсюда первую из формул (2.18)

$$T_{2,n-j+\vartheta}(x)=\frac{1}{k_0^3}\left[4\varkappa_1+\frac{\varkappa_2}{k_0^2}(1-k^2k_0^2)\right]\int\limits_0^{x\beta}(x-x')w_{n-j+\vartheta}(x')dx'+ \tag{2.23}$$

$$+\frac{1+k^2k_0^2}{k_0^3}\left[\frac{4\varkappa_1}{1-k^2k_0^2}+\frac{3\varkappa_2}{k_0^2}+7\varkappa_3k\right]\int\limits_0^{x}(x-x')s_{n-j+\vartheta}(x')dx'+$$

$$+\frac{1}{k_0^2}\left(\frac{\varkappa_2}{k_0^2}-\varkappa_2\right)[k^2(1-k^2k_0^2)x^2w_{n-j+\vartheta}[x(1-kk_0)]]+$$

$$+\frac{2}{k_0^3}\left[\frac{\varkappa_2}{k_0^2}+\varkappa_3k\right]\int\limits_0^{x\beta}[x(1-k^2k_0^2)-x']w_{n-j+\vartheta}(x')dx'-$$

$$-\frac{\varkappa_3k}{k_0^2}(1-k^2k_0^2)\int\limits_0^{x\beta}xw_{n-j+\vartheta}(x')dx'$$

$$3\leqslant\vartheta\leqslant j,\quad T_{\vartheta,n-j+\vartheta}(x)=\frac{1}{k_0^{2\vartheta+1}}\left\{\left[2\vartheta\varkappa_1+\frac{\varkappa_2}{k_0^2}(1-k^2k_0^2)\right]\times\right. \tag{2.24}$$

$$\times\int\limits_0^{x\beta}(x-x')[(x-x')^2-k^2k_0^2x^2]^{\vartheta-2}w_{n-j+\vartheta}(x')dx'+$$

$$+(1-k^2k_0^2)^{\vartheta-1}\left[\frac{2\vartheta\varkappa_1}{1-k^2k_0^2}+\frac{2\vartheta-1}{k_0^2}\varkappa_2+(4\vartheta-1)\varkappa_3k\right]\int\limits_0^{x}(x-x')^{2\vartheta-3}\times$$

$$\times s_{n-j+\vartheta}(x')dx'+2\frac{\varkappa_2}{k_0^2}(\vartheta-2)\int\limits_0^{x\beta}(x-x')[x(1-k^2k_0^2)-x']^2\times$$

$$\times[(x-x')^2-k^2k_0^2x^2]^{\vartheta-3}w_{n-j+\vartheta}(x')dx'+2\left[\frac{\varkappa_2}{k_0^2}+(\vartheta-1)\varkappa_3k\right]\times$$

$$\times\int\limits_0^{x\beta}[x(1-k^2k_0^2)-x'][(x-x')^2-k^2k_0^2x^2]^{\vartheta-2}w_{n-j+\vartheta}(x')dx'-$$

$$-\varkappa_3k\left[2(\vartheta-2)\int\limits_0^{x\beta}x[x(1-k^2k_0^2)-x']^2[(x-x')^2-k^2k_0^2x^2]^{\vartheta-3}\times\right.$$

$$\left.\left.\times w_{n-j+\vartheta}(x')dx'+(1-k^2k_0^2)\int\limits_0^{x\beta}x[(x-x')^2-k^2k_0^2x^2]^{\vartheta-2}w_{n-j+\vartheta}(x')dx'\right]\right\}$$

В (2.22), (2.24) второй индекс у функций $w_{n-j+\vartheta}(x)$, $s_{n-j+\vartheta}(x)$ опущен. Формула (2.24) не переходит в соответствующие $\vartheta=1$ и $\vartheta=2$ формулы (2.18) и (2.23). Это обстоятельство связано с наличием дополнительного дифференцирования при получении (2.2) по сравнению с (2.6); $T_{ij}^*(x)$ получаем из $T_{ij}(x)$ по (2.19).

Заметим, что решение для параболического крыла [8] можно получить с помощью изложенного здесь метода полиномов при $Z_w(x,\ y)=\beta_0y^2/2$, $X_b(y)=\sigma_0y^2/2$. В [8], показано, что решение в этом случае находится в конечном виде. Вообще следует отметить, что с бесконечными рядами в данной работе сталкиваемся лишь при решении функционального уравнения (2.15), но такие ряды часто можно просуммировать и, следовательно, найти решение в конечном виде. Метод Фурье – Неймана [7] позволяет найти решение для цилиндрических поверхностей крыла $Z_w(x, y)=Z_w(y)$ с произвольными кромками. Ясно, что метод полиномов сильно расширяет класс поверхностей, для которых теперь можно построить решение. Даже оставаясь в классе цилиндрических поверхностей, иногда лучше использовать метод полиномов, чтобы получить решение в конечном виде. Метод полиномов эффективен (n в (2.8) невелико), когда поверхность и кромка достаточно гладкие в направлении оси y. Если же поверхность или кромка имеют особенность в этом направлении, целесообразно такую особенность просчитать методом Фурье – Неймана, а остальное крыло считать методом полиномов, ограничиваясь небольшими показателями степени n. Таким образом, методы полиномов и Фурье – Неймана удачно дополняют друг друга.

Автор благодарит Г. Г. Черного за руководство работой.

Поступила 3 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
2. *Malmuth N. D.* Three-dimensional perturbations of hypersonic wedge flow. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 8.
3. *Malmuth N. D.* Hypersonic flow over a delta wing of moderate aspect ratio. AIAA Journal, 1966, vol. 4. No. 3.
4. *Тер-Минасянц С. М.* Задача о сверхзвуковом обтекании нижней поверхности треугольного крыла. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
5. *Lighthill M. J.* The diffraction of blast. 1. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A., 1949, vol. 198, No. 1055.
6. *Lighthill M. J.* The diffraction of blast. 2. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1950, vol. 200, No. 1063.
7. *Фоллэ М. И.* Линейная задача для треугольных и *V*-образных крыльев. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 2.
8. *Фоллэ М. И.* Параболическое крыло, близкое к клину, в сверхзвуковом потоке. Научн. тр. Ин-та механ. МГУ, 1974, № 32.