

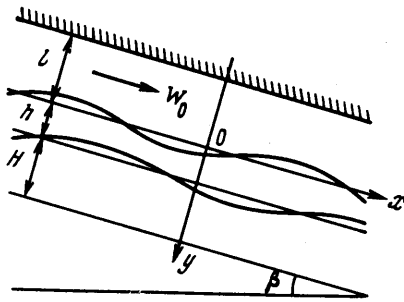
ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ  
В ГОРЯЧЕЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ГАЗОВОЙ СТРУЕ  
НА НАКЛОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Ю. П. ЛАДИКОВ, Г. А. ЧЕЧКО

(Киев)

Рассматривается устойчивость течения тяжелой вязкой жидкой пленки, стекающей по наклонной поверхности фазового перехода. В отличие от [1], где предполагалось, что на свободной поверхности поддерживается постоянная температура, здесь предполагается, что жидкая пленка граничит с газовой струей, обладающей конечной теплоемкостью и теплопроводностью. В связи с этим критерии устойчивости существенно отличаются от [1].

1. Постановка задачи. По наклонному плоскопараллельному каналу с углом наклона  $\beta$  движется поток несжимаемого невязкого газа со скоростью  $W_0$ . На верхней стенке канала поддерживается постоянная температура  $T_0$  (фиг. 1). В результате оплавления нижней стенки образуется тяжелая вязкая жидкая пленка, которая стекает по наклонной плоскости. Плоскость  $Y=h$  является границей фазового перехода. Область  $-l \leq Y \leq 0$  занята газообразной средой, область  $0 \leq Y \leq h$  — жидкой фазой. Твердая фаза соответствует области  $h \leq Y \leq \infty$ . Предполагается, что в невозмущенном состоянии все характерные величины задачи являются функциями только координаты  $Y$ . Из



Фиг. 1

уравнений Навье — Стокса для невозмущенного течения жидкой пленки

(1.1)  $\rho g \sin \beta + \mu d^2 V / dY^2 = 0, \quad dP / dY = \rho g \cos \beta$

Скорость течения  $V$  удовлетворяет граничным условиям

(1.2)  $dV / dY = 0 \quad (Y=0), \quad V=0 \quad (Y=h)$

Интегрируя, находим

(1.3)  $U(y) = 1 - y^2, \quad U = V / V_0, \quad y = Y / h, \quad V_0 = gh^2 (2\nu)^{-1} \sin \beta$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости,  $\nu = \mu / \rho$ ,  $V_0$  — наибольшая скорость течения жидкой пленки на границе контакта газ — жидкость. Из решения уравнения теплопроводности для невозмущенного состояния в жидкости и газе будем иметь следующие постоянные градиенты температур соответственно:

(1.4)  $dT / dY = -\kappa_* \kappa^{-1} (T_0 - T_w) / (l + \kappa_* \kappa^{-1} h),$   
 $dT_* / dY = -(T_0 - T_w) / (l + \kappa_* \kappa^{-1} h)$

Здесь величины без индекса соответствуют жидкой фазе, а звездочкой обозначены величины в газе,  $T_w$  — температура плавления,  $\kappa_*$  и  $\kappa$  — коэффициенты теплопроводности. В невозмущенном состоянии на границе фазового перехода при  $Y=h$  должно выполняться граничное условие

$$(1.5) \quad \kappa dT/dY - \kappa_1 dT_1/dY = 0$$

где индекс 1 соответствует твердой фазе.

Будем предполагать, что все характеристики течения испытывают малые возмущения вида

$$Q(x, y, \tau) = q(y) \exp ik(x - c\tau)$$

Здесь  $q$  — комплексная амплитуда,  $c = c_r + ic_i$  — комплексная скорость возмущений,  $k$  — волновое число,  $x = X/h$ ,  $\tau = tV_0/h$ .

Линеаризованные уравнения возмущенного течения и теплопроводности в газе, жидкой и твердой фазе в безразмерных переменных имеют соответственно следующий вид:

$$(1.6) \quad \Phi'' - k^2 \Phi = 0, \quad \vartheta'' - k^2 \vartheta = ikM[(U_* - c)\vartheta + \chi_0(1 + \gamma\chi_0)^{-1}\Phi]$$

$$(1.7) \quad \varphi^{IV} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi = ikR[(U - c)(\varphi'' - k^2\varphi) - U''\varphi]$$

$$\theta'' - k^2\theta = ikRPr[(U - c)\theta + \varphi/(1 + \gamma\chi_0)]$$

$$(1.8) \quad W'' - k^2W = -ikRP^*rcW, \quad R = \frac{V_0 h}{\nu}, \quad Pr = \frac{\mu c_v}{\kappa}$$

$$Pr^* = \frac{\mu c_{v1}}{\kappa_1}, \quad F = \frac{V_0}{\sqrt{gh}}$$

$$2F^2 = R \sin \beta, \quad M = V_0 \rho_* c_v h / \kappa_*, \quad \gamma = l/h, \quad U_* = W_0/V_0, \quad \chi_0 = \kappa \kappa_*^{-1}$$

Здесь  $\Phi(y)$  и  $\varphi(y)$  — комплексные амплитуды возмущений безразмерных функций тока в газе и жидкости соответственно,  $\vartheta(y)$ ,  $\theta(y)$ ,  $W(y)$  — комплексные амплитуды возмущений безразмерной температуры в газе, жидкости и твердой фазе,  $R$  — число Рейнольдса,  $Pr$ ,  $Pr^*$  — числа Прандтля,  $F$  — число Фруда.

Возмущенные величины должны удовлетворять следующим граничным условиям:

а) на твердой стенке канала  $y = -\gamma$  возмущения нормальной скорости и температуры равны нулю

$$(1.9) \quad \Phi(-\gamma) = 0, \quad \vartheta(-\gamma) = 0$$

б) на контактной поверхности газ — жидкая фаза при  $y = \xi \exp ik(x - c\tau)$  возмущения нормальной скорости для газообразной среды и касательного напряжения в жидкости равны нулю

$$(1.10) \quad \Phi(0) + U_* \xi = 0, \quad \varphi''(0) + k^2 \varphi(0) - 2\xi = 0$$

Возмущения нормальных напряжений и потоков тепла с обеих сторон от контактной поверхности также равны нулю

$$(1.11) \quad \varphi'''(0) + ikR[F^{-2} \xi \cos \beta + \sigma \varphi'(0)] - 3k^2 \varphi'(0) - ikR\sigma_* \Phi'(0) = 0$$

$$\vartheta'(0) - \chi_0 \theta'(0) = 0 \quad (\sigma = c - 1, \quad \sigma_* = c - U_*)$$

Кроме того, имеют место кинематическое условие и условие равенства возмущений температур в жидкости и газе

$$(1.12) \quad \varphi(0) = \sigma \xi, \quad \theta(0) - \vartheta(0) = \xi(1 - \chi_0)/(1 + \gamma\chi_0)$$

в) на поверхности фазового перехода при  $y=1+\eta \exp ik(x-\sigma t)$  возмущения касательной компоненты скорости в жидкости и возмущения температуры для жидкой и твердой фазы равны нулю

$$(1.13) \quad \varphi'(1)=2\eta, \quad \theta(1)-\eta/(1+\gamma\chi_0)=0, \quad W(1)-\kappa\kappa_1^{-1}\eta/(1+\gamma\chi_0)=0$$

Кроме того, имеют место условия непрерывности потока массы и потока тепла с обеих сторон поверхности фазового перехода

$$(1.14) \quad \varphi(1)=rc\eta, \quad \kappa_1\kappa^{-1}W'(1)-\theta'(1)=-ikc\eta R_\lambda$$

$$r=(\rho-\rho_1)/\rho, \quad R_\lambda=\rho\lambda V_0 h[\kappa(T_0-T_w)]^{-1}=\lambda R \operatorname{Pr}[c_v(T_w-T_w)]^{-1}$$

г) на бесконечности  $y=\infty$  возмущение температуры для твердой фазы равно нулю

$$(1.15) \quad W(\infty)=0$$

Здесь  $\lambda$  — удельная теплота плавления,  $c_v$  — теплоемкость жидкости при постоянном объеме,  $\xi$  — амплитуда смещения поверхности контакта газ — жидкость,  $\eta$  — амплитуда смещения границы жидкости — твердая фаза. В граничном условии (1.14) приток тепла за счет вязкости ввиду его малости не учитывался [2]. Вывод граничных условий проведен обычным методом [3].

2. Решение для длинных волн. Известно [3], что течение жидкой пленки на длинных волнах неустойчиво даже при очень малых числах Рейнольдса. Поэтому можно считать, что  $kR \ll 1$ . Это позволяет решать систему уравнений и граничных условий (1.6) — (1.15) методом разложений всех характерных параметров задачи в виде рядов по степеням  $k$

$$(2.1) \quad \Phi(y)=\Phi_0(y)+k\Phi_1(y)+\dots, \quad \vartheta(y)=\vartheta_0(y)+k\vartheta_1(y)+\dots$$

$$\varphi(y)=\varphi_0(y)+k\varphi_1(y)+\dots, \quad \theta(y)=\theta_0(y)+k\theta_1(y)+\dots$$

$$W(y)=W_0(y)+W_1(y)+\dots, \quad c=c_0+k c_1+\dots, \quad \xi=\xi_0+k\xi_1+\dots,$$

$$\eta=\eta_0+k\eta_1+\dots$$

Для нулевого приближения система уравнений и граничных условий примет вид

$$(2.2) \quad \Phi_0''(y)=0, \quad \vartheta_0''(y)=0, \quad \varphi_0''(y)=0, \quad \theta_0''(y)=0, \quad W_0''(y)=0$$

$$\Phi_0(-\gamma)=0, \quad \vartheta_0(-\gamma)=0, \quad \Phi_0(0)+U_*\xi_0=0, \quad \varphi_0''(0)=2\xi_0,$$

$$(2.3) \quad \varphi_0'''(0)=0, \quad \vartheta_0'(0)=\chi_0\theta_0'(0), \quad \varphi_0(0)=\sigma_0\xi_0,$$

$$\theta_0(0)-\vartheta_0(0)=\xi_0(1-\chi_0)/(1+\gamma\chi_0)$$

$$\varphi_0'(1)=2\eta_0, \quad \theta_0(1)=\eta/(1+\gamma\chi_0), \quad W_0(1)=\kappa\kappa_1^{-1}\eta_0/(1+\gamma\chi_0)$$

$$\kappa_1\kappa^{-1}W_0'(1)-\theta_0'(1)=-ikc_0\eta_0R_\lambda, \quad W_0(L)=0$$

Условие  $W_0(\infty)=0$  заменено условием  $W_0(L)=0$ , где  $L=1+\delta$ ,  $\delta$  — некоторое конечное число, соответствующее относительной глубине затухания температурных возмущений, которое определяется исходя из точного решения уравнения теплопроводности для твердой фазы. Известно [1], что  $\delta=(2/RPr^*)^{1/2}$ .

Предполагаем затем, что  $kR \ll 1$ ,  $kRPr \ll 1$ ,  $kRPr^* \ll 1$ ,  $kM \ll 1$ . Поскольку произведение  $kR_\lambda$  может быть величиной порядка единицы, сохраним в нулевом приближении в граничном условии непрерывности потока энергии член  $ikc_0\eta_0R_\lambda$  [1].

Решение системы уравнений (2.2) будем искать в форме

$$(2.4) \quad \Phi_0(y) = A_0 y + B_0, \quad \vartheta_0(y) = C_0 y + D_0, \quad \varphi_0(y) = a_0 y^3 + B_0 y^2 + g_0 y + f_0 \\ \theta_0(y) = m_0 y + n_0, \quad W_0(y) = M_0 y + N_0$$

Подставляя (2.4) в граничные условия (2.3), для определения неизвестных коэффициентов получаем систему линейных алгебраических уравнений, разрешая которую, имеем

$$(2.5) \quad \xi_0 = \frac{f_0}{\sigma_0}, \quad a_0 = 0, \quad B_0 = \frac{f_0}{\sigma_0}, \quad A_0 = -\frac{f_0 U^*}{\gamma \sigma_0}, \quad B_0 = -\frac{f_0 U^*}{\sigma_0} \\ C_0 = -\frac{f_0 \chi_0 (1 - \chi_0)}{\sigma_0 (1 + \gamma \chi_0) (1 + \delta + \gamma \chi_0)}, \quad D_0 = -\frac{f_0 \gamma \chi_0 (1 - \chi_0)}{\sigma_0 (1 + \gamma \chi_0) (1 + \delta + \gamma \chi_0)} \\ m_0 = -\frac{f_0 (1 - \chi_0)}{\sigma_0 (1 + \gamma \chi_0) (1 + \delta + \gamma \chi_0)}, \quad n_0 = \frac{f_0 (1 + \delta) (1 - \chi_0)}{\sigma_0 (1 + \gamma \chi_0) (1 + \delta + \gamma \chi_0)} \\ M_0 = -\frac{\kappa \kappa_1^{-1} f_0 (1 - \chi_0)}{\sigma_0 (1 + \gamma \chi_0) (1 + \delta + \gamma \chi_0)}, \quad N_0 = \frac{\kappa \kappa_1^{-1} f_0 (1 + \delta) (1 - \chi_0)}{\sigma_0 (1 + \gamma \chi_0) (1 + \delta + \gamma \chi_0)} \\ \eta_0 = \frac{\delta f_0 (1 - \chi_0)}{\sigma_0 (1 + \delta + \gamma \chi_0)}$$

Для определения собственного значения  $c_0$  получаем характеристическое уравнение

$$(2.6) \quad ik\delta R_\lambda (1 + \gamma \chi_0)^2 c_0^2 - [2ik\delta R_\lambda (1 + \gamma \chi_0)^2 + 1 + \delta + \gamma \chi_0 - \\ - r\delta (1 - \chi_0)] c_0 + 2[1 + (\gamma + \delta)\chi_0] = 0$$

В случае  $kR_\lambda \ll 1$  будем иметь только одно собственное значение

$$c_0 = 2[1 + (\gamma + \delta)\chi_0][1 + \delta + \gamma \chi_0 - r\delta (1 - \chi_0)]^{-1}$$

При  $kR_\lambda \rightarrow \infty$  одно из собственных значений стремится к нулю, другое — к двум, что соответствует чисто гидродинамическому случаю без учета тепловых процессов [3].

Рассмотрим теперь случай, когда произведение  $kR_\lambda$  имеет порядок единицы. Запишем уравнение (2.6) в виде

$$(2.7) \quad c_0^2 - (2 - iA_1^*)c_0 - iA_2^* = 0 \\ A_1^* = \frac{1 + \delta + \gamma \chi_0 - r\delta (1 - \chi_0)}{k\delta R_\lambda (1 + \gamma \chi_0)^2}, \quad A_2^* = \frac{2[1 + (\gamma + \delta)\chi_0]}{k\delta R_\lambda (1 + \gamma \chi_0)^2}$$

Разделяя в (2.7) мнимую и действительную части, уравнение (2.7) можно представить как систему двух квадратных уравнений относительно  $c_{r0}$  и  $c_{i0}$ , которая приводится к одному уравнению четвертой степени относительно  $c_{i0}$

$$(2.8) \quad 4c_{i0}^4 + 8A_1^* c_{i0}^3 + (5A_1^{*2} + 4)c_{i0}^2 + A_1^* (A_1^{*2} + 4)c_{i0} + \\ + A_2^* (2A_1^* - A_2^*) = 0$$

Так как величина  $r$  пренебрежимо мала, при  $\chi_0 > 1$  все коэффициенты уравнения (2.8), за исключением свободного члена, имеют положительное значение. Поскольку

$$2A_1^* - A_2^* = 2(kR_\lambda)^{-1} (1 - r) (1 - \chi_0) (1 + \gamma \chi_0)^{-2} < 0$$

уравнение (2.8) имеет один положительный корень. Следовательно,  $c_{i0} > 0$  и рассматриваемый процесс будет неустойчив в нулевом приближении.

При  $\chi_0 \ll 1$  уравнение (2.8) не имеет положительных решений и течение будет всегда устойчивым для тел с большой удельной теплотой плавления относительно малых возмущений с большой длиной волны.

Возвратимся теперь к случаю  $kR_\lambda \ll 1$ , когда переход из твердого в жидкое состояние не требует больших затрат тепла. При этом собственное значение  $c_0$  является действительным числом, и, чтобы выяснить характер поведения возмущений, следует рассмотреть следующее приближение. Поскольку собственные функции для нулевого приближения определяются с точностью до произвольного постоянного множителя  $f_0$ , положим для простоты  $f_0 = \sigma_0$ .

Система уравнений и граничных условий для первого приближения имеет следующий вид:

$$(2.9) \quad \Phi''(y) = 0, \quad \vartheta_1''(y) = iM \left[ (U_* - c_0) \vartheta_0 + \frac{\chi_0}{1 + \gamma \chi_0} \Phi_0 \right] = iAM(y + \gamma)$$

$$\varphi_0^{IV}(y) = iR[(U - c_0)\varphi_0'' - U''\varphi_0] = 2iRg_0y$$

$$\theta_1''(y) = iR \operatorname{Pr} \left[ (U - c_0)\theta_0 + \frac{\Phi_0}{1 + \gamma \chi_0} \right] = iR \operatorname{Pr}(ay^3 + by^2 + g_*y + f)$$

$$W_1''(y) = -iR \operatorname{Pr} * c_0 W_0 = -iR \operatorname{Pr} * c_0 M_0 [y - (1 + \delta)],$$

$$\Phi_1(0) + U_* \xi_1 = 0, \quad \varphi_1''(0) - 2\xi_1 = 0$$

$$\varphi_1'''(0) + iR[F^{-2}\xi_0 \cos \beta + \sigma_0 \varphi_0'(0)] - iR(c_0 - U_*)\Phi_0'(0) = 0$$

$$\varphi_1(0) = \xi_0 c_1 + \sigma_0 \xi_1, \quad \theta_1(0) - \vartheta_1(0) = \xi_1(1 - \chi_0)/(1 + \gamma \chi_0)$$

$$\vartheta_1'(0) = \chi_0 \vartheta_0'(0), \quad \Phi_1(-\gamma) = 0, \quad \vartheta_1(-\gamma) = 0, \quad \varphi_1'(1) = 2\eta_1$$

$$\theta_1(1) = \eta_1/(1 + \gamma \chi_0), \quad W_1(1) = \kappa \kappa_1^{-1} \eta_1/(1 + \gamma \chi_0),$$

$$\varphi_1(1) = r c_0 \eta_1 + r c_1 \eta_0$$

$$\kappa_1 \kappa^{-1} W_1'(1) - \theta_1'(1) = -i c_0 \eta_0 R_\lambda, \quad W_1(1 + \delta) = 0$$

$$A = -\frac{\chi_0 [U_* (1 + \gamma + \delta) + \gamma c_0 (\chi_0 - 1)]}{\gamma (1 + \gamma \chi_0) (1 + \delta + \gamma \chi_0)}, \quad g_0 = -\frac{2[1 + (\gamma + \delta)\chi_0]}{(1 + \gamma \chi_0) (1 + \delta + \gamma \chi_0)}$$

$$a = \frac{1 - \chi_0}{(1 + \gamma \chi_0) (1 + \delta + \gamma \chi_0)}, \quad B = \frac{\chi_0 (1 + \gamma + \delta)}{(1 + \gamma \chi_0) (1 + \delta + \gamma \chi_0)}$$

$$g_* = \frac{c_0 (1 - \chi_0) - (2\gamma + 2\delta - 1)\chi_0 - 3}{(1 + \gamma \chi_0) (1 + \delta + \gamma \chi_0)}, \quad f = B\sigma_0$$

Решение системы уравнений первого приближения будем разыскивать в форме

$$(2.10) \quad \Phi_1(y) = A_1 y + B_1, \quad \vartheta_1(y) = iAM \left( \frac{y^3}{6} + \frac{\gamma}{2} y^2 \right) + C_1 y + D_1$$

$$\varphi_1(y) = \frac{i}{60} R g_0 y^5 + a_1 y^3 + b_1 y^2 + g_1 y + f_1$$

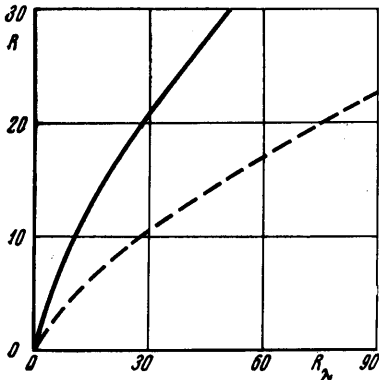
$$\theta_1(y) = iR \operatorname{Pr} \left( \frac{a}{20} y^5 + \frac{B}{12} y^4 + \frac{g_*}{6} y^3 + \frac{f}{2} y^2 \right) + m_1 y + n_1$$

$$W_1(y) = -\frac{i}{6} R \operatorname{Pr} * c_0 M_0 [y - (1 + \delta)]^3 + M_1 [y - (1 + \delta)]$$

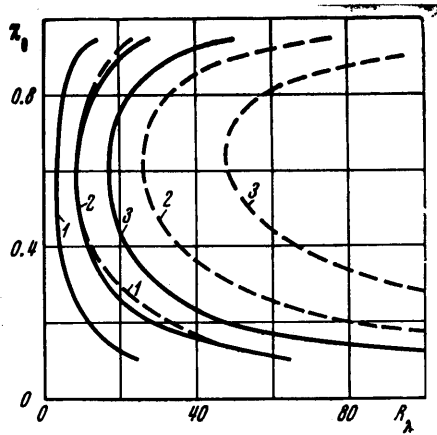
Постоянную  $f_1$  примем равной нулю, так как отличное от нуля значение  $f_1$  приведет только к уточнению коэффициента при собственной функции  $\phi_0$  [1]. Исключая с помощью граничных условий неизвестные коэффициенты в (2.10), находим выражение для  $c_1$

$$(2.11) \quad c_1 = i \left\langle \frac{\delta(2-rc_0)(1+\gamma\chi_0)}{(1+\delta+\gamma\chi_0)^2} \{ \delta c_0 R_\lambda (1-\chi_0) (1+\gamma\chi_0) (1+\delta+\gamma\chi_0) + \right. \\ \left. + (1+\gamma\chi_0) (1+\delta+\gamma\chi_0) R \operatorname{Pr} [q_1 / (1+\gamma\chi_0) - q_2] + \right. \\ \left. + 1/3 [\delta^2 R \operatorname{Pr}^* c_0 (1-\chi_0) - \gamma^2 M [U_* (1+\gamma+\delta) + \gamma c_0 (\chi_0 - 1)]] \right\rangle + \\ + \operatorname{ctg} \beta + \frac{R U_* (c_0 - U_*)}{3\gamma} + \frac{R(12-10c_0) [1 + (\gamma+\delta)\chi_0]}{15(1+\delta+\gamma\chi_0)} \times \\ \times \left[ \frac{\delta(2-rc_0)(1-\chi_0)}{\sigma_0(1+\delta+\gamma\chi_0)} + \frac{r\delta(1-\chi_0)}{1+\delta+\gamma\chi_0} - \frac{1}{\sigma_0} \right]^{-1} \\ q_1 = \frac{(10c_0-9) [1 + (2+3\gamma+3\delta)\chi_0] - 18 [1 + (\gamma+\delta)\chi_0]}{60(1+\gamma\chi_0)(1+\delta+\gamma\chi_0)} \\ q_2 = \frac{(6c_0-5) [1 + (1+2\gamma+2\delta)\chi_0] - 10 [1 + (\gamma+\delta)\chi_0]}{12(1+\gamma\chi_0)(1+\delta+\gamma\chi_0)}$$

Из выражения (2.11) видно, что когда отношение коэффициентов теплопроводности жидкости и газа  $\chi_0 = \kappa/\kappa_* > 1$ , собственное значение  $c_{11} > 0$ . Та-



Фиг. 2



Фиг. 3

ким образом, для кристаллических тел с небольшой удельной теплотой плавления течение всегда неустойчиво при малых волновых числах.

Как показали расчеты, при  $\chi_0 \leq 1$  рассматриваемый процесс может носить как устойчивый, так и неустойчивый характер в зависимости от значений характерных параметров задачи. Чтобы получить более общее представление о характере устойчивости, при расчетах были выбраны следующие характерные значения физических характеристик твердой, жидкой и газообразной сред:  $\gamma=20$ ,  $r=0.0838$ ,  $\operatorname{Pr}=0.028$ ,  $\operatorname{Pr}^*=0.0543$ . В результате расчетов были получены кривые нейтральной устойчивости, представленные на фиг. 2, 3. Зоны неустойчивости ( $c_i > 0$ ) располагаются слева от нейтральных кривых; с правой стороны находятся зоны устойчивости ( $c_i < 0$ ). Кривые, обозначенные цифрами 1, 2, 3, соответствуют числам Рейнольдса, равным  $R=5, 10, 15$  в порядке их следования. Сплошными линиями пока-

заны кривые, рассчитанные при  $U_* = 4$ , пунктирными — при  $U_* = 10$ . Значения углов даны в радианах.

Графики зависимостей  $R = R(R_\lambda)$  при  $\chi_0 = 0.5$ ,  $\beta = 0.56$  показаны на фиг. 2. Легко видеть, что с уменьшением числа Рейнольдса и скорости  $U_*$  зоны неустойчивых значений  $R_\lambda$  сужаются; при  $R = 0$  неустойчивость не наблюдается. На фиг. 3 приведены кривые нейтральной устойчивости  $\chi_0 = \chi_0(R_\lambda)$ , рассчитанные при угле наклона  $\beta = 0.56$ . Из анализа этих кривых можно заключить, что при некоторых ограничениях на величины  $R$ ,  $Pr$ ,  $Pr^*$ ,  $\gamma$ ,  $U_*$  всегда можно найти такое критическое значение параметра  $\chi_0$ , при котором область неустойчивых значений  $R_\lambda$  будет минимальной. Следует заметить, что в случае, когда движения жидкой пленки и газовой струи противоположны по направлению, скорость  $U_*$  стабилизирует течение; в противном случае она оказывает обратное действие. Это видно непосредственно из выражения (2.11).

Исследования зависимости  $\beta = \beta(R_\lambda)$  при  $\chi_0 = 0.4$ ,  $U_* = 4$  показали, что с уменьшением угла наклона  $\beta$  областей значений  $R_\lambda$ , при которых имеет место неустойчивость, сужается, однако существенное влияние угла  $\beta$  на устойчивость проявляется только при очень малых его значениях.

Полученные здесь выводы об устойчивости справедливы при условии, что число Рейнольдса и произведение  $R Pr^*$  не являются очень малыми величинами, поскольку при  $R Pr^* \ll 1$ ,  $\delta \gg 1$ , и при этом нельзя считать  $k$  малыми параметрами [1].

**3. Устойчивость при малых числах Рейнольдса.** Будем считать теперь число Рейнольдса малым, а волновое число  $k$  произвольным. Предполагаем также, что  $R Pr \ll 1$ ,  $R Pr^* \ll 1$ ,  $R_\lambda \sim 1$ ,  $M = Ri \ll 1$ , где  $I = \mu r^* c_{v*} / \rho \chi_*$ . Решения будем искать в виде рядов по малому параметру  $R$ . Система уравнений и граничные условия нулевого приближения примут вид

$$(3.1) \quad \vartheta_0'' - k^2 \vartheta_0 = 0, \quad \varphi_0^{IV} - 2k^2 \varphi_0'' + k^4 \varphi_0 = 0, \quad W_0'' - k^2 W_0 = 0, \quad \theta_0'' - k^2 \theta_0 = 0$$

$$\vartheta_0(-\gamma) = 0, \quad \varphi_0''(0) + k^2 \varphi_0(0) - 2\xi_0 = 0$$

$$\varphi_0'''(0) - 3k^2 \varphi_0'(0) + 3ik\xi_0 \operatorname{ctg} \beta = 0, \quad \vartheta_0'(0) = \chi_0 \theta_0'(0)$$

$$(3.2) \quad \varphi_0(0) = \sigma_0 \xi_0, \quad \theta_0(0) - \vartheta_0(0) = \xi_0(1 - \chi_0)/(1 + \gamma \chi_0), \quad \varphi_0(1) = r c_0 \eta_0$$

$$\varphi_0'(1) = 2\eta_0, \quad \theta_0(1) = \eta_0/(1 + \gamma \chi_0), \quad W_0(1) = \kappa \kappa_1^{-1} \eta_0/(1 + \gamma \chi_0)$$

$$\kappa_1 \kappa^{-1} W_0'(1) - \theta_0'(1) = -ik c_0 \eta_0 R_\lambda, \quad W_0(\infty) = 0$$

Решение системы уравнений (3.1) может быть записано в виде

$$\vartheta_0(y) = C_0 e^{ky} + D_0 e^{-ky}$$

$$(3.3) \quad \varphi_0(y) = a_0 e^{ky} + b_0 e^{-ky} + g_0 y e^{ky} + f_0 y e^{-ky}$$

$$\theta_0(y) = m_0 e^{ky} + n_0 e^{-ky}, \quad W_0(y) = M_0 e^{ky} + N_0 e^{-ky}$$

Так как собственные функции определяются с точностью до произвольного множителя, положим для простоты  $\xi_0 = 1$ . Исключая из граничных условий поочередно все неизвестные коэффициенты, для определения собственного значения  $c_0$  получаем уравнение

$$(3.4) \quad (1 + k^2 + \operatorname{ch}^2 k) - 3i(2k)^{-2} (\operatorname{sh} 2k - 2k) \operatorname{ctg} \beta - c_0(k^2 + \operatorname{ch}^2 k) = \\ = (1 - \chi_0) [2 \operatorname{ch} k - r c_0 (\operatorname{ch} k + k \operatorname{sh} k)] \{ (\operatorname{sh} k + \chi_0 \operatorname{ch} k \operatorname{th} k \gamma) \times \\ \times [1 - ic_0 R_\lambda (1 + \gamma \chi_0)] + (\operatorname{ch} k + \chi_0 \operatorname{sh} k \operatorname{th} k \gamma) \}^{-1}$$

При  $R_\lambda = \infty$  правая часть уравнения (3.4) обращается в нуль и для определения  $c_0$  получаем устойчивое решение

$$(3.5) \quad c_0 = [(1 + k^2 + \operatorname{ch}^2 k) - 3i(2k)^{-2} (\operatorname{sh} 2k - 2k) \operatorname{ctg} \beta] (k^2 + \operatorname{ch}^2 k)^{-1}$$

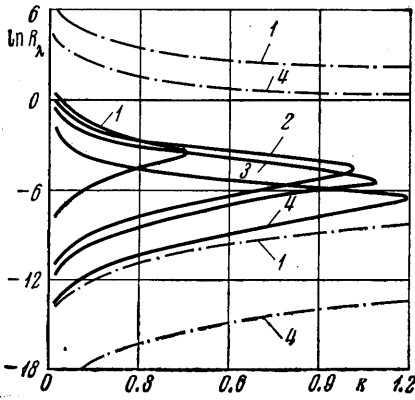
Для очень коротких волн при  $k \gg 1$  имеем также устойчивое решение  $c_0 = -2iR_\lambda^{-1} (1 + \gamma \chi_0)^{-1}$ .

Если  $k \ll 1$ , для  $c_0$  получаем уравнение (2.6), рассмотренное в п. 2 при  $\delta = \infty$ , которое имеет один неустойчивый корень при  $\chi_0 > 1$ .

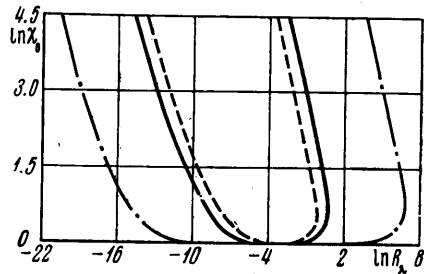
Перейдем к рассмотрению общего случая. Перепишем уравнение (3.4) в виде

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & iA_{11}c_0^2 - (B_{11} + iB_{12})c_0 - C_{11} - iC_{12} = 0 \\ & A_{11} = \gamma_0 \gamma_5 R_\lambda, \quad B_{11} = \gamma_0 \gamma_4 + \gamma_1 \gamma_5 R_\lambda - r \gamma_3 (1 - \chi_0), \quad B_{12} = \gamma_2 \gamma_5 R_\lambda \\ & C_{11} = 2 \operatorname{ch} k (1 - \chi_0) - \gamma_2 \gamma_4, \quad C_{12} = \gamma_1 \gamma_4, \quad \gamma_0 = k^2 + \operatorname{ch}^2 k \\ & \gamma_1 = 3(2k)^{-2} (\operatorname{sh} 2k - 2k) \operatorname{ctg} \beta, \quad \gamma_2 = 1 + k^2 + \operatorname{ch}^2 k \\ & \gamma_3 = k \operatorname{sh} k + \operatorname{ch} k, \quad \gamma_4 = (1 + \chi_0 \operatorname{th} k \gamma) (\operatorname{sh} k + \operatorname{ch} k) \\ & \gamma_5 = (1 + \gamma \chi_0) (\operatorname{sh} k + \chi_0 \operatorname{ch} k \operatorname{th} k \gamma) \end{aligned}$$

Легко видеть, что при  $\chi_0 > 1$  величины  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, A_{11}, B_{11}, B_{12}$  и  $C_{12}$  по-



Фиг. 4



Фиг. 5

ложительные. Представляя  $c_0$  в виде  $c_0 = c_{r0} + ic_{i0}$ , для мнимой части собственного значения получаем уравнение четвертой степени

$$(3.7) \quad \begin{aligned} & 4A_{11}^3 c_{0i}^4 + 8A_{11}^2 B_{11} c_{0i}^3 + (A_{11} B_{12}^2 + 5A_{11} B_{11}^2 + 4A_{11}^2 C_{12}^2) c_{0i}^2 + \\ & + (B_{11} B_{12}^2 + 4A_{11} B_{11} C_{12} + B_{11}^3) c_{0i} + (B_{11}^2 C_{12} - B_{11} B_{12} C_{11} - A_{11} C_{11}^2) = 0 \end{aligned}$$

Поскольку все коэффициенты уравнения (3.7), кроме свободного члена, имеют положительное значение, условием устойчивости является неотрицательность свободного члена

$$(3.8) \quad Q(k, R_\lambda, \gamma, \chi_0) = B_{11}^2 C_{12} - B_{11} B_{12} C_{11} - A_{11} C_{11}^2 \geq 0$$

Неравенство (3.8) можно переписать в виде

$$(3.9) \quad \begin{aligned} & Q(k, R_\lambda, \gamma, \chi_0) = GR_\lambda^2 - 2NR_\lambda + J \geq 0 \\ & G = \gamma_1 \gamma_5^2 [\gamma_1^2 \gamma_4 + \gamma_2^2 \gamma_4 - 2\gamma_2 (1 - \chi_0) \operatorname{ch} k] \\ & N = \gamma_0 \gamma_5 [2(1 - \chi_0)^2 \operatorname{ch}^2 k - \gamma_2 \gamma_4 (1 - \chi_0) \operatorname{ch} k - \gamma_1^2 \gamma_4^2], \quad J = \gamma_0^2 \gamma_1 \gamma_4^3 \end{aligned}$$

Легко видеть из (3.9), что при  $\beta = \pi/2$   $Q < 0$  и течение будет неустойчивым для всех значений  $k$  и  $R_\lambda$ .

Результаты вычислений, проведенных по формуле (3.9), представлены на фиг. 4, 5. Кривые с номерами 1-4 соответствуют значениям  $\chi_0 = 1.5, 6, 9, 45$ . Пунктирными линиями обозначены кривые, рассчитанные при угле наклона  $\beta = 0.942$ ; штрихпунктирами - при  $\beta = 1.57$ , т. е. почти на вертикальной стенке; сплошными - при  $\beta = 1.256$ . Зоны неустойчивости соответствуют внутренним областям, ограниченными кривыми 1-4.

На фиг. 4 приведены кривые нейтральной устойчивости  $R_\lambda = R_\lambda(k)$ , полученные при различных значениях параметра  $\chi_0$  для двух значений угла наклона:  $\beta = 1.256$



и  $\beta=1.57$ . Из фиг. 4 видно, что для каждого значения  $R_\lambda$ , т. е. для каждого материала, существует конечный диапазон длин волн, при которых имеет место неустойчивость. С уменьшением волнового числа  $k$  зоны неустойчивости расширяются. Для каждой фиксированной длины волны возмущений при заданном  $\chi_0$  имеется конечная область неустойчивых значений параметра  $R_\lambda$ . Зависимость  $\chi_0=\chi_0(R_\lambda)$  при  $k=0.02$  для различных углов наклона  $\beta$  показана на фиг. 5.

Увеличение угла наклона  $\beta$ , как видно из фиг. 5, приводит к значительному расширению зон неустойчивости. При увеличении отношения коэффициентов теплопроводности жидкости и газа  $\chi_0=\kappa/\kappa_*$  зоны неустойчивости смещаются в сторону уменьшения чисел  $R_\lambda$ .

В случае, когда  $\chi_0 \leq 1$ , все коэффициенты уравнения (3.7) положительные. Следовательно, уравнение (3.7) не может иметь положительных действительных корней и течение будет устойчивым при всех  $k$  и  $R_\lambda$ .

Поступила 22 XI 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ладиков Ю. П. Устойчивость тяжелой жидкости, стекающей по наклонной поверхности фазового перехода. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3, стр. 124–132.
2. Турский Г. А. Оплавление теплопроводящей стенки за движущимся скачком уплотнения. Докл. АН СССР, 1959, т. 129, № 5, стр. 989.
3. Yih Chia-shun. Stability of liquid flow down an inclined plane. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3. (Рус. перев.: Устойчивость течения жидкости, стекающей по наклонной плоскости. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1963, № 5, стр. 77.)