

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРОВ
ПРЕДЕЛЬНО-РАВНОВЕСНЫХ ЦЕЛИКОВ ПРИ ВЫТЕСНЕНИИ
ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ НЕФТИ ВОДОЙ

В. М. ЕНТОВ, М. Г. ОДИШАРИЯ

(Москва, Тбилиси)

В обзоре [1] сформулирована задача определения предельно-равновесной формы целиков при вытеснении вязкопластической жидкости (нефти) вязкой (водой). Возникающая задача для уравнения Лапласа в области с неизвестной границей ранее рассматривалась в несколько иной физической трактовке в работе [2]. В [2], а также в [3-5] приведен ряд решений задачи определения размеров целиков для простейших типичных схем расстановки источников и стоков. Полученные решения находят применение при анализе влияния предельного градиента давления на показатели разработки нефтяных месторождений с помощью заводнения.

Ниже рассмотрены некоторые новые течения того же класса, обладающие меньшей степенью симметрии и потому сводящиеся к более сложным краевым задачам.

1. В качестве основного случая будем рассматривать течение в элементе прямоугольной сетки скважин (прямоугольнике $A_1A'DD'$), вызванное наличием источника интенсивности q в вершине A_1 и стока интенсивности $-q$ в вершине D .

Задача определения целиков состоит в том, чтобы найти функцию p (давление), удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$(1.1) \quad \Delta p = 0$$

в некоторой подобласти S' заданного прямоугольника S , которая имеет особенности, отвечающие источнику и стоку в вершинах A_1 и D , удовлетворяющую условию непротекания на границе $\partial S'$ области S' , кроме точек A_1 и D

$$(1.2) \quad \partial p / \partial n = 0$$

и дополнительному условию предельного равновесия

$$(1.3) \quad |\partial p / \partial s| = G$$

на неизвестной границе, т. е. той части $\partial S'$, которая лежит внутри S . Неизвестная часть границы $\partial S'$ отделяет целики (области неподвижной нефти) от области течения воды. На фиг. 1 ей отвечают дуги BC и $B'C'$. Введем функцию тока ψ , напор $H = (k/\mu)p$ (k — проницаемость для воды, μ — вязкость воды), комплексный потенциал

$$(1.4) \quad W(z) = -H + i\psi \quad (z = x + iy)$$

и комплексную скорость

$$(1.5) \quad \xi(z) = dW/dz = we^{-i\theta} \quad (w = |\xi|, \theta = -\arg \xi(z))$$

Данная задача является одним из частных случаев более общей задачи, рассмотренной в работе [6]. Используя результаты этой работы, легко убедиться, что область течения $A_1BCDC'B'A_1$ отображается на двустороннюю риманову поверхность переменной годографа ζ , причем соответ-

ствующая область Δ состоит (фиг. 1, б) из двух идентичных кусков в форме четверти внешности единичного круга ($|\zeta| \geq 1$, $-1/2\pi \leq \arg \zeta \leq 0$), разрезанных и склеенных «наперекрест» вдоль некоторой линии, выходящей из точки ветвления $E(\zeta = k = k_1 - ik_2 = ae^{-i\pi\alpha})$. Положение точки E подлечит, вообще говоря, определению из условий физической задачи. Отмечая соответственные точки и решения на первом и втором листах римановой поверхности индексами I и II, видим, что комплексный потенциал $W(z)$ должен быть функцией, аналитической в Δ и удовлетворяющей краевым условиям

$$(1.6) \quad \text{Im } W = 0 \text{ на } A_1 B_1 C_1 D_1, \quad \text{Im } W = q \text{ на } A_{II} B_{II} C_{II} D_{II}$$

Будем рассматривать значения W на первом и втором листах поверхности Δ как две отдельные функции комплексного переменного ζ в области $A_1 BCD$. Легко убедиться, что функция

$$(1.7) \quad W_1 = W_I + W_{II}$$

аналитична в области $A_1 BCD$ и удовлетворяет краевым условиям $\text{Im } W_1 = q$ на BCD , откуда

$$(1.8) \quad W_I + W_{II} = iq + c$$

в $A_1 BCD$

Здесь c — вещественная постоянная, которую можно, не ограничивая общности, положить равной нулю.

Далее проведем разрез, вдоль которого перекрещиваются листы римановой поверхности, по лучу $\arg \zeta = -\alpha\lambda$ ($|\zeta| \geq a$). Из условия аналитического продолжения $W(\zeta)$ через разрез имеем, что $W_I^+ = W_{II}^-$, где плюс и минус отмечают предельные значения соответствующих функций при стремлении к разрезу сверху и снизу. Поэтому из (1.8) получаем на разрезе для функции W_I (индекс далее опускается)

$$(1.9) \quad W^+ + W^- = iq$$

Таким образом, вместо того чтобы решать полную задачу на двулистной римановой поверхности, достаточно найти функцию $W(\zeta)$ в области Δ'

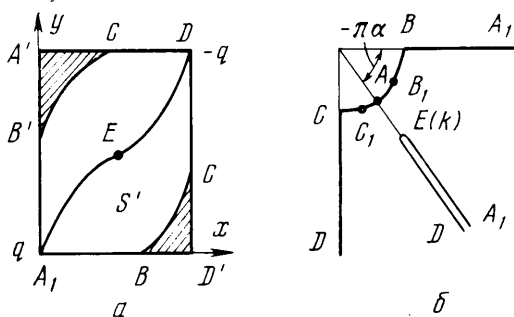
$$(1.10) \quad |\zeta| \geq 1, \quad -1/2\pi \leq \arg \zeta \leq 0$$

с разрезом вдоль луча $|\zeta| \geq a > 1$, $\arg \zeta = -\alpha\lambda$.

Прежде чем приступить к решению этой задачи, укажем, что к ней сводятся и некоторые другие задачи расчета целиков, в частности при течении в области, имеющей вид параллелограмма с произвольным углом $\lambda\alpha < \beta \leq \pi$ (фиг. 2), при обтекании препятствия в виде наклонной пластинки (см. [6]) и ряд других.

2. Перейдем теперь к решению сформулированной краевой задачи. Заметим, прежде всего, что по физическим соображениям $W(\zeta)$ возрастает при $\zeta \rightarrow \infty$ как $\ln \zeta$. Далее продолжим $W(\zeta)$ аналитически в область $|\zeta| < 1$ при помощи преобразования инверсии

$$(2.1) \quad W(\zeta) = \overline{W(1/\bar{\zeta})}, \quad |\zeta| < 1, \quad -1/2\pi \leq \arg \zeta \leq 0$$



Фиг. 1

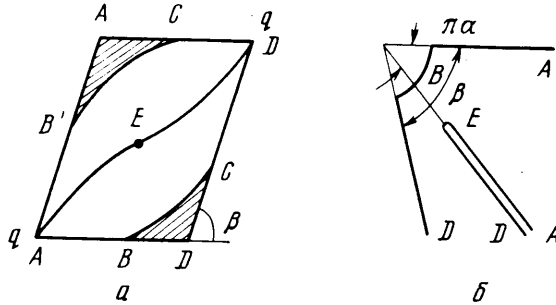
Тогда функция $W(\zeta)$ аналитична в области $-1/2\pi \leq \arg \zeta \leq 0$ с разрезами

$$\Gamma_2: \arg \zeta = -\alpha\pi, \quad 0 < |\zeta| \leq 1/a, \quad a \leq |\zeta| < \infty$$

причем

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \operatorname{Im} W &= 0 & (\arg \zeta = 0, \arg \zeta = -1/2\pi) \\ W^+ + W^- &= iq & (\arg \zeta = -\alpha\pi, |\zeta| \geq a) \\ W^+ + W^- &= -iq & (\arg \zeta = -\alpha\pi, 0 < |\zeta| \leq 1/a) \end{aligned}$$

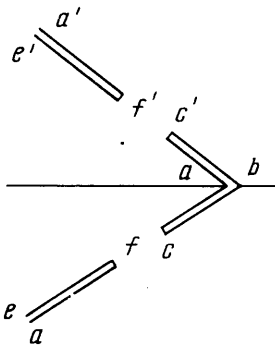
Совершая затем конформное преобразование $\kappa = \zeta^2$ плоскости ζ , получим для отыскания $W(\kappa)$ краевую задачу в нижней полуплоскости κ .



Фиг. 2

После этого доопределяя $W(\kappa)$ в верхней полуплоскости κ по симметрии¹

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \Phi(\kappa) &= \overline{W(\bar{\kappa})}, \quad \operatorname{Im} \kappa \geq 0; \\ \Phi(\kappa) &= W(\kappa), \quad \operatorname{Im} \kappa \leq 0 \end{aligned}$$



Фиг. 3

получим окончательно для $\Phi(\kappa)$ следующую краевую задачу: ищется функция $\Phi(\kappa)$, аналитическая слева и справа от ломаной aba' (фиг. 3), а на этой линии удовлетворяющая условиям сопряжения

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \Phi^+ &= \Phi^- \quad (1/a^2 \leq |\kappa| \leq a^2, \arg \kappa = \pm 2\pi\alpha) \\ \Phi^+ + \Phi^- &= g, \quad g(\kappa) = -iq \\ (0 \leq |\kappa| \leq 1/a^2, \arg \kappa &= -2\pi\alpha, \\ a^2 \leq |\kappa| < \infty, \arg \kappa &= 2\pi\alpha), \end{aligned}$$

$$g(\kappa) = iq \quad (0 \leq |\kappa| \leq a^{-2}, \arg \kappa = 2\pi\alpha, a^2 \leq |\kappa| < \infty, \arg \kappa = -2\pi\alpha)$$

Функция Φ ограничена всюду, за исключением точек $\kappa=0$ и $\kappa=\infty$. Решение задачи получается известными методами [7, 8] и имеет вид

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \Phi(\kappa) &= -\frac{q}{2\pi} \chi(\kappa) [I(\infty \exp(-2\pi i\alpha), j, \kappa) - I(c, b, \kappa) + \\ &+ I(b, c', \kappa) - I(f', \infty \exp(2\pi i\alpha), \kappa)] \end{aligned}$$

Здесь через $I(a, b, \kappa)$ обозначен интеграл от выражения $[\chi(\kappa')(\kappa' - \kappa)]^{-1}$ вдоль прямолинейного отрезка (a, b) в комплексной плоскости κ' ,

¹ Это преобразование было подсказано авторам Р. Н. Абдуллаевым.

а каноническое решение однородной задачи $\chi(\kappa)$ имеет вид

$$(2.6) \quad \chi(\kappa) = \sqrt{(\kappa-f)(\kappa-\bar{f})(\kappa-c)(\kappa-\bar{c})}$$

причем разрезы проведены вдоль линий $a'f'$, $c'bc$, fa (фиг. 3), а однозначная ветвь выделена условием $\arg \chi = 0$ при $\arg \kappa = 0$.

Возвращаясь к исходному независимому переменному ζ , получим для потенциала $W(\zeta)$

$$(2.7) \quad W(\zeta) = - (q/2\pi) \chi(\zeta^2) [I(\infty \exp(-2\pi i \alpha), a^2 \exp(-2\pi i \alpha), \zeta^2) - I(a^{-2} \exp(-2\pi i \alpha), 0, \zeta^2) + I(0, a^{-2} \exp(2\pi i \alpha), \zeta^2) - I(a^2 \exp(2\pi i \alpha), \infty \exp(2\pi i \alpha), \zeta^2)]$$

Выражение (2.7) может быть преобразовано к виду

$$(2.8) \quad W(\zeta) = -q(2\pi)^{-1} \chi(\zeta^2) [R(\zeta^2, A^2) - R(\zeta^2, \bar{A}^2)] \quad (A = \exp(-i\pi\alpha))$$

$$R(\xi, \eta) =$$

$$= \int_a^\infty \frac{(t\eta - \bar{\eta}) dt}{(t\eta - \xi)(\bar{\eta} - t\xi) \sqrt{(t-a^2)(t-a^{-2})(t\eta - a^2\bar{\eta})(t\eta - a^{-2}\bar{\eta})}}$$

Таким образом получено решение задачи в плоскости годографа скорости. Решение зависит от двух параметров (α и a), которые должны быть определены по геометрии исходной задачи (величинам h и l). Координаты точек физической плоскости определяются интегрированием уравнения

$$(2.9) \quad dz = \zeta^{-1} dW$$

3. При произвольных значениях параметра a восстановление координат по соотношениям (2.8) и (2.9) должно производиться численно. Однако в одном наиболее интересном с точки зрения приложений случае, а именно в случае малых интенсивностей потока, решение задачи может быть доведено до конца аналитическими методами. Будем рассматривать асимптотику решения при $a \rightarrow 1$, полагая $a^2 = 1 + \beta$, $\beta \ll 1$. Вне малой окрестности отрезка $(e^{-i\pi\alpha}, ae^{-i\pi\alpha})$ равномерно справедливо упрощенное асимптотическое представление для потенциала

$$(3.1) \quad W(\zeta) = \frac{q}{\pi} \ln \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \mp \frac{q}{\pi} \left[\ln \frac{(\zeta^2 - A^2)(\zeta^2 - \bar{A}^2)}{\zeta^2} - \ln 2 |\sin 2\pi\alpha| \right] \quad (a^2 - 1 = \beta \ll 1)$$

Здесь верхний знак берется при $\arg \zeta > -\pi\alpha$, а нижний — при $\arg \zeta < -\pi\alpha$.

Представление (3.1) может быть использовано для отыскания координат точек физической плоскости, образы которых на плоскости годографа лежат вне указанной малой окрестности отрезка $\exp(-i\pi\alpha)$, $a \exp(-i\pi\alpha)$. В частности, будем отыскивать границу целика (линию A_1BCD). Используя (2.9) и (3.1), получим

$$(3.2) \quad \begin{aligned} z_B - z_{A_1} &= -2\pi^{-1} q (1 - \cos \pi\alpha \ln \operatorname{ctg} (1/2\pi\alpha) - 1/2\pi \sin \pi\alpha) \\ z_D - z_C &= -2i\pi^{-1} q (1 - \sin \pi\alpha \ln \operatorname{ctg} (1/2\pi\alpha - 1/4\pi) + 1/2\pi \cos \pi\alpha) \end{aligned}$$

На дуге единичного круга BC выделим ε — окрестность точки A — дугу B_1C_1 ($\exp(-i\pi(\alpha-\varepsilon))$, $\exp(-i\pi(\alpha+\varepsilon))$) (фиг. 1, б); вне нее можно использовать (3.1) и (2.9), так что будем иметь

$$(3.3) \quad (z_{B_1}-z_B)+(z_C-z_{C_1})=-2\pi^{-1}q\{-1+\cos\pi\alpha\ln\operatorname{ctg}(1/2\pi\alpha)+ \\ +1/2\pi\sin\pi\alpha+2\cos\pi\alpha+\cos\pi\alpha\ln\operatorname{tg}\pi\alpha+ \\ +A^{-1}\ln(1/2\pi\varepsilon)-1/2i\pi A+i[-1+\sin\pi\alpha\ln\operatorname{ctg}(1/2\pi\alpha- \\ -1/4\pi)]-1/2\pi\cos\pi\alpha+2\sin\pi\alpha- \\ -\sin\pi\alpha\ln\operatorname{tg}\pi\alpha\}\} (\varepsilon\ll 1)$$

Чтобы определить взаимное расположение точек B_1 и C_1 в том же предельном случае $\beta\rightarrow 0$, необходимо рассмотреть поведение потенциала вблизи малого отрезка (A, Aa) , $A=\exp(-i\pi\alpha)$. При этом, считая $\beta\ll 1$, $\varepsilon\ll 1$, можно из (2.9) получить

$$(3.4) \quad z_{C_1}-z_{B_1}\approx\exp(i\pi\alpha)[W(\varepsilon\pi/\beta)-W(-\varepsilon\pi/\beta)]$$

При вычислении выражения (3.4) изменим масштаб в плоскости ζ , положив в представлении для потенциала $\tau=1+\beta+\beta t$, $0\leq t\leq\infty$, $\zeta=A\exp(-i\beta\xi)$. Упрощая затем выражение для потенциала с учетом малости β и ε , получим

$$(3.5) \quad z_{C_1}-z_{B_1}\approx 2\pi^{-1}q\exp(i\pi\alpha)\ln(4\varepsilon\pi/\beta)$$

В результате, складывая (3.2), (3.3) и (3.5) и полагая $\beta\ll\varepsilon\ll 1$, имеем

$$(3.6) \quad z_D-z_A=h+il=-\pi^{-1}q\{(-\pi\sin\pi\alpha+2\cos\pi\alpha\ln\operatorname{tg}\pi\alpha+ \\ +4\cos\pi\alpha+\cos\pi\alpha\ln(\beta/8))-i(\pi\cos\pi\alpha+ \\ +2\sin\pi\alpha\ln\operatorname{tg}\pi\alpha-4\sin\pi\alpha-2\sin\pi\alpha\ln(\beta/8))\}$$

Из (3.6) α и β могут быть выражены через h и l . Для α получаем уравнение

$$(3.7) \quad \sin\pi\alpha-(l/h)\cos\pi\alpha=(q/\pi h)(-\pi\cos 2\pi\alpha- \\ -2\sin 2\pi\alpha\ln\operatorname{tg}\pi\alpha)$$

l/q	h/q						
	1	2	4	8	16	32	64

 $\pi\alpha(l/q, h/q)$

1	0.78539	0.26324	0.04543	0.00192	0.00003	0.000005	0.000001
2	1.30753	0.78539	0.39459	0.17729	0.07882	0.036061	0.017008
4	1.52521	1.17620	0.78539	0.43304	0.21428	0.103179	0.049864
8	1.56727	1.39350	1.13774	0.78539	0.44914	0.230202	0.114089
16	1.56964	1.49196	1.35650	1.12168	0.78539	0.456574	0.237703
32	1.57014	1.53473	1.46761	1.34053	1.11422	0.785390	0.460150
64	1.57037	1.55378	1.52093	1.45670	1.33303	1.110640	0.785398

 $\ln\beta(l/q, h/q)$

1	-0.57120	-1.43971	-3.04753	-6.20300	-12.4869	-25.0533	-50.1860
2	-1.43971	-2.79264	-5.19661	-10.6801	-22.4690	-46.8398	-96.3649
4	-3.04749	-5.19660	-7.23552	-12.2671	-23.7747	-48.0243	-97.5006
8	-6.20240	-10.6860	-12.2671	-16.1212	-25.3334	-49.7298	-98.7628
16	-12.4864	-22.4684	-23.7746	-26.3334	-33.8928	-54.4399	-101.563
32	-25.0530	-46.8372	-48.0239	-49.7298	-54.4399	-69.4358	-110.641
64	-50.1859	-96.3490	-97.4930	-98.7629	-101.563	-110.641	-140.522

Если α — решение уравнения (3.7), то β выражается через него в явном виде

$$(3.8) \quad \ln(\beta/8) = -2 - \pi(h \sin \pi\alpha + l \cos \pi\alpha - q)(2q \sin 2\pi\alpha)^{-1}$$

Из (3.8) видно, что асимптотика $\beta \ll 1$ отвечает большим значениям параметра h/q (малым интенсивностям потока). При этом уравнение (3.7) можно решать методом последовательных приближений, считая $2q(\pi h)^{-1}$ малым параметром. В таблице представлены значения h/q и l/q в зависимости от α и $\ln \beta$. По найденным значениям параметров легко построить также границы целиков, используя найденные асимптотические выражения для потенциала.

Поступила 11 II 1973.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М., «Наука», 1969.
2. Алишаев М. Г., Вахитов Г. Г., Гехтман М. М., Глумов И. Ф. О некоторых особенностях фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
3. Алишаев М. Г. О стационарной фильтрации с начальным градиентом. В сб. «Теория и практика добычи нефти». М., «Недра», 1968.
4. Бернадинер М. Г. О предельной конфигурации застойных зон при вытеснении вязко-пластичной нефти водой. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.
5. Алишаев М. Г., Бернадинер М. Г., Енгов В. М. Влияние предельного градиента на потери нефти при вытеснении ее водой. В сб. «Вопросы нелинейной фильтрации и нефтегазоотдачи при разработке нефтяных и газовых месторождений». М., Изд. Ин-та геол. и разраб. горюч. ископ., 1972.
6. Енгов В. М. Решение задач фильтрации с предельным градиентом в случае неоднозначности отображения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.
7. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М., «Наука», 1968.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.