МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1974

УДК 532.529

ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД

Р. А. ТКАЛЕНКО

(Москва)

В работе на основе теории групп находятся одномерные нестационарные и двумерные стационарные автомодельные решения уравнений движения двухфазной среды, записанных с учетом двух релаксационных процессов (динамического скольжения и температурного отставания) и объема твердой или жидкой фазы. Показано, что автомодельные решения, соответствующие группе преобразования растяжения, существуют только при определенной зависимости показателей степени законов трения и теплообмена между фазами. В случае стоксовского закона сопротивления эти решения соответствуют разлету смеси или движению к центру, оси или плоскости симметрии. Группа переноса определяет автомодельное движение в зоне релаксации за ударной волной, распространяющейся в покоящемся газе с постоянной скоростью.

Нахождение двумерных стационарных автомодельных движений, соответствующих группе переноса, сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая в частном случае одного релаксационного процесса описывает волну с частичной или полной дисперсией. Этим случаям соответствует сверхзвуковое обтекание клинообразного тела с присоединенным скачком уплотнения постоянной интенсивности и околозвуковое (скорость набегающего потока меньше замороженной, но больше равновесной скорости звука) течение около вогнутой стенки.

1. Рассмотрим движение двухфазной среды, в которой могут протекать два релаксационных процесса: динамическое скольжение и температурное отставание. Пусть t — время, x, y — декартовы координаты, $\mathbf{V}$ — скорость газа с проекциями u, v на оси координат, ρ — плотность, p — давление, T — температура, h — энтальпия газа. Параметрам жидкой или твердой фазы припишем индекс s. Истинные плотности фаз обозначим через $\rho_b=\text{const}$ и ρ° (для газа). Пренебрежем подводом тепла и массы от внешних источников. Вязкость и теплопроводность будем учитывать только при взаимодействии фаз. Основные уравнения запишем в виде [1]

$$(1.1)\qquad \frac{d\mathbf{V}}{dt}+\frac{1}{\varkappa\rho}\nabla p+\frac{\rho_s}{\rho}\frac{d\mathbf{V}_s}{dt_s}=0,\qquad \frac{\rho}{\rho^\circ}+\frac{\rho_s}{\rho_b}=1$$

$$\frac{dh}{dt}-\frac{1}{\rho^\circ}\frac{dp}{dt}+\varkappa\frac{\rho_s}{\rho}(\mathbf{V}_s-\mathbf{V})\frac{d\mathbf{V}_s}{dt_s}+\frac{\rho_s}{\rho}\frac{dT_s}{dt_s}+$$

$$+\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho^\circ}\right)(\mathbf{V}_s-\mathbf{V})\nabla p=0$$

$$\frac{\partial\rho y^\nu}{\partial t}+\nabla(\rho\mathbf{V}y^\nu)=0,\qquad \frac{\partial\rho_s y^\nu}{\partial t}+\nabla(\rho_s\mathbf{V}_s y^\nu)=0$$

$$\frac{d\mathbf{V}_s}{dt_s}+\frac{1}{\rho_b}\nabla p=\frac{\mathbf{V}-\mathbf{V}_s}{\Lambda_1}|\mathbf{V}-\mathbf{V}_s|^{n-1},\qquad \frac{dT_s}{dt_s}=\frac{(T-T_s)^k}{\Lambda_2}$$

$$h=\varkappa T/(\varkappa-1),\qquad p=\rho^\circ T$$

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y},\qquad \frac{d}{dt_s}=\frac{\partial}{\partial t}+u_s\frac{\partial}{\partial x}+v_s\frac{\partial}{\partial y}$$

Здесь $\varkappa$ — показатель адиабаты газа, Λ_1, Λ_2 — времена релаксации неравновесных процессов. Все переменные в (1.1) приведены к беразмерному виду отнесением пространственных координат к характерному размеру задачи l, плотностей — к ρ_∞°, давления — к p_∞, скоростей — к $c_\infty = (\varkappa p_\infty / \rho_\infty^\circ)^{1/2}$ и т. д.

Рассмотрим одномерное нестационарное движение (переменные t, y, v) и введем переменные Лагранжа ψ и ψ_s

$$d\psi = \rho y^\nu (dy - u dt), \qquad d\psi_s = \rho_s y^\nu (dy - u_s dt)$$

Вместо уравнений неразрывности получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho y^\nu, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\rho y^\nu u, \qquad \frac{\partial \psi_s}{\partial y} = \rho_s y^\nu, \qquad \frac{\partial \psi_s}{\partial t} = -\rho_s y^\nu u_s \tag{1.2}$$

где $\nu=0$, 1, 2 для течений с плоской, цилиндрической и сферической симметрией соответственно.

Исследуем групповые свойства системы (1.1). Следуя [2], можно показать, что алгебра Ли основной группы системы (1.1), (1.2) состоит из инфинитезимальных операторов

$$X_1 = (1-n) t \frac{\partial}{\partial t} + (2-n) y \frac{\partial}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial u} + u_s \frac{\partial}{\partial u_s} + 2p \frac{\partial}{\partial p} +$$

$$+ 2T \frac{\partial}{\partial T} + 2T_s \frac{\partial}{\partial T_s} + (\nu+1)(2-n)\left(\psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \psi_s \frac{\partial}{\partial \psi_s}\right),$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_3 = \frac{\partial}{\partial \psi}, \qquad X_4 = \frac{\partial}{\partial \psi_s}$$

Оператор X_1 входит в алгебру Ли только при условии $n+1=2k$, а также при любых n и k, если один релаксационный процесс заморожен или протекает равновесно. Например, при наличии только температурного отставания вместо n в выражение для X_1 следует подставить $2k-1$. Если оба процесса заморожены или протекают равновесно, то система уравнений (1.1) описывает движение совершенного газа и ее алгебра Ли найдена в [3].

Если объемом, занимаемым частицами, можно пренебречь ($\rho_b \to \infty$), то алгебра Ли системы (1.1) содержит еще один оператор

$$X_5 = p \frac{\partial}{\partial p} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \rho_s \frac{\partial}{\partial \rho_s} + \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \psi_s \frac{\partial}{\partial \psi_s}$$

При $\nu=0$ имеем еще два оператора

$$X_6 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_7 = t \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_s}$$

Операторам X_1 и X_5 соответствуют группы растяжений, операторам X_2, X_3, X_4 и X_6 — группы переноса, а оператор X_7 определяет группу галилеева переноса.

Из всех автомодельных решений системы (1.1), которые определяются приведенной алгеброй Ли, ниже будут рассмотрены только некоторые движения, имеющие физический смысл и решения для которых можно получить в замкнутом или легко обозримом виде.

2. Рассмотрим подгруппу основной группы Ли, порождаемую оператором

$$X = X_1 - \omega X_5 \tag{2.1}$$

где ω — некоторая постоянная. Хотя оператор X_5 входит в алгебру Ли только при $\rho_b\to\infty$, все последующие выкладки применимы при конечных значениях ρ_b, если положить $\omega=0$. После нахождения инвариантов этой подгруппы введем следующие переменные:

$$\begin{aligned}
&\xi=ty^{(n-1)\mu}, && u=y^\mu U(\xi), && u_s=y^\mu U_s(\xi)\\
&p=y^{(2-\omega)\mu}P(\xi), && \rho=y^{-\omega\mu}/R(\xi), && \rho_s=y^{-\omega\mu}/R_s(\xi)\\
&T=y^{2\mu}\Theta(\xi), && T_s=y^{2\mu}\Theta_s(\xi), && \rho^\circ=y^{-\omega\mu}/R^\circ(\xi)\\
&\psi=y^{\mu i}\Psi(\xi), && \psi_s=y^{\mu i}\Psi_s(\xi), && i=(\nu+1)(2-n)-\omega\\
&\mu=(2-n)^{-1}
\end{aligned}\tag{2.2}$$

Такие преобразования справедливы при всех положительных значениях n, кроме $n=2$ $(k=3/2)$.

Подставляя (2.2) в (1.1) и (1.2), получим (далее штрих означает дифференцирование по ξ)

$$\begin{aligned}
&U'L(U)+U^2+R[(2-\omega)P-(1-n)\xi P']+\\
&+RR_s^{-1}[U_s'L(U_s)+U_s^2]=0\\
&\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\Theta'-R^\circ P'\right)L(U)+\left(\frac{2}{\varkappa-1}+\omega\right)\Theta U+RR_s^{-1}(U_s-U)\times\\
&\times[U_s'L(U_s)+U_s^2]+RR_s^{-1}[\Theta_s'L(U_s)+2\Theta_sU_s]+\\
&+(R-R^\circ)(U_s-U)[(2-\omega)P-(1-n)\xi P']=0\\
&U_s'L(U_s)+U_s^2=(2-n)\Lambda_1^{-1}(U-U_s)\,|U-U_s|^{n-1}-\\
&-[(2-\omega)P-(1-n)\xi P']\varepsilon\rho_b^{-1}=0\\
&\Theta_s'L(U_s)+2\Theta_sU_s=(2-n)\Lambda_2^{-1}(\Theta-\Theta_s)^k,\qquad \Theta=PR^\circ\\
&(1-n)\xi\Psi'-i\Psi=(n-2)R^{-1},\qquad \Psi'=-UR^{-1}\\
&(1-n)\xi\Psi_s'-i\Psi_s=(n-2)R_s^{-1},\qquad \Psi_s'=-U_sR_s^{-1}
\end{aligned}\tag{2.3}$$

Величина ε, входящая во второй член правой части третьего уравнения, равна единице при $\omega=0$ и нулю при $\omega\neq0$.

Для более компактной записи использовалось обозначение $L(\Omega)=2-n-(1-n)\xi\Omega$, где Ω — произвольный параметр. Система (2.3) определяет автомодельные движения, соответствующие оператору (2.1).

В случае стоксовского закона сопротивления $(n=k=1)$ из (2.2) находим

$$\xi=t,\qquad u=yU(t)$$

Этому классу движений соответствуют нестационарные движения газа, представляющие собой разлет газа от центра или движение к центру симметрии. Для совершенного газа в случаях плоской, цилиндрической и сферической симметрий они изучены Л. И. Седовым [4].

Рассмотрим класс движений, соответствующий $\omega=2$, $\rho_b\to\infty$. Введем обозначения

$$U=[\ln g(t)]',\qquad U_s=[\ln g_s(t)]'$$

Из первого и третьего уравнений системы (2.3) при $n=1$, $\omega=2$ получим

$$g''g^{-\nu}+g_s''g_s^{-\nu}=0,\qquad \Lambda_1g_s''g_s^{-1}=g'g^{-1}-g_s'g_s^{-1}$$

Ограничимся решением этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющим предельным условиям: при $\Lambda_1=0$ и

$\Lambda_1 \to \infty$ решение должно совпадать с известным автомодельным решением для случая совершенного газа. Это решение имеет вид: $g=at$, $g_s=bt$, где a и b — константы, которые, не нарушая общности, можно считать равными. Таким образом, при любом Λ_1

$$U=U_s=t^{-1} \tag{2.4}$$

Из (2.3) с использованием (2.4) находим

$$\Psi_s\Psi^{-1}=RR_s^{-1}=(1-m)m^{-1}, \quad R=A^{-1}t^{\nu-1}, \quad \Psi=At^{1-\nu} \tag{2.5}$$

Здесь m — массовая концентрация газа в смеси, A — произвольная постоянная.

Рассмотрим теперь второе и четвертое уравнения (2.3). Представим их в виде

$$zY''+(\sigma+2-z)Y'-(\sigma_\Sigma+1)Y=0, \quad zZ''+(\sigma-z)Z'-\sigma_\Sigma Z=0$$

$$Y(z)=t\theta(t), \quad Z(z)=t^2\theta_s(t), \quad t=-\Lambda_2 z$$

$$\sigma=(\varkappa-1)(\nu+1), \quad \sigma_\Sigma=(\varkappa_\Sigma-1)(\nu+1), \quad \sigma_0=(\varkappa-\varkappa_\Sigma)(\nu+1)$$

$$\varkappa_\Sigma(\varkappa_\Sigma-1)^{-1}=\varkappa(\varkappa-1)^{-1}+(1-m)m^{-1}$$

Решение первого из них, удовлетворяющее условиям

$$Y=a_f t^{-\sigma-1}, \quad \Lambda_2\to\infty; \quad Y=a_e t^{-\sigma_\Sigma-1}, \quad \Lambda_2=0$$

имеет вид

$$Y(z)=\frac{\Gamma(1+\sigma_0)}{\Gamma(2+\sigma)}\frac{a_e}{t^{1+\sigma_\Sigma}}\Phi\left(\sigma_\Sigma+1,\sigma+2;\frac{\Lambda_2}{\Lambda}z\right)+ \tag{2.6}$$

$$+\frac{a_f}{t^{1+\sigma}}\Phi\left(-\sigma_0,-\sigma;\frac{\Lambda_2}{\Lambda}z\right)$$

где Φ — конфлюэнтная гипергеометрическая функция, Γ — гамма-функция [5], $\Lambda=(\varkappa_\Sigma-1)(\varkappa-1)^{-1}\Lambda_2$. Аналогично определяется решение для $Z(z)$.

Пусть η — лагранжева координата ($\eta=t$ при $y=1$), тогда из (2.2) и (2.5) находим $\eta=yt^{-1}$. Теперь общее решение задачи можно записать в виде

$$u=u_s=\eta, \quad p=At^{-\nu}Y(-t\Lambda_2^{-1}), \quad \rho=A\eta^{-2}t^{-\nu-1}$$

$$T=\eta^2tY(-t\Lambda_2^{-1}), \quad T_s=\eta^2Z(-t\Lambda_2^{-1}), \quad m\rho_s=(1-m)\rho$$

Из анализа асимптотического поведения функций Y и Z следует, что полученное автомодельное движение описывает разлет смеси газа и инородных частиц, концентрирующихся в начальный момент времени на плоскости, оси или в центре симметрии. Давление постоянно во всем пространстве и уменьшается с течением времени. Обе фазы движутся с одинаковой постоянной скоростью вдоль общей линии тока. Температура газа уменьшается от бесконечности при $t=0$ до нуля при $t\to\infty$. Температура инородных частиц возрастает от постоянного значения при $t=0$, проходит через максимум и уменьшается до нуля на больших расстояниях от центра. При $t\approx0$ имеет место течение, близкое к замороженному, при $t^{-1}\approx0$ — близкое к равновесному.

Преобразования (2.2) применимы только при $n\neq2$. В случае квадратичного закона сопротивления и закона теплообмена степени $^3/_2$ необходимо использовать преобразования

$$\xi=y, \quad u=t^{-1}U(y), \quad \rho=t^\omega/R(y)\ldots$$

3. Рассмотрим подгруппу группы Ли, порождаемую оператором

$$X=X_2+\alpha X_3+\gamma X_4+\delta X_6$$

Будем изучать течения с плоской симметрией ($\nu=0$, $\delta\neq0$). Введем новые переменные

$$\zeta=\alpha t-\psi,\quad y=\delta\alpha^{-1}\psi+W(\zeta),\quad \psi_s=\gamma\alpha^{-1}\psi+\Psi(\zeta),\quad \Omega=\Omega(\zeta) \tag{3.1}$$

где Ω — произвольный параметр, кроме ψ, ψ_s, t и y. Обозначив штрихом производные по ζ, проведем замену переменных в уравнениях (1.1) по формулам (3.1)

$$\begin{gathered}\alpha u'+\varkappa^{-1}p'+\rho_s\rho^{-1}[\alpha-\rho(u_s-u)]u_s'=0\\
\frac{\varkappa\alpha}{\varkappa-1}T'-\frac{\alpha}{\rho^\circ}p'+\frac{\rho_s}{\rho}[\alpha-\rho(u_s-u)][\varkappa(u_s-u)u_s'-T_s']-\\
-\left(1-\frac{\rho}{\rho^\circ}\right)(u_s-u)p'=0\\
[\alpha-\rho(u_s-u)]u_s'-\varkappa^{-1}\rho\rho_b^{-1}p'=\Lambda_1^{-1}(u-u_s)|u-u_s|^{n-1}\\
[\alpha-\rho(u_s-u)]T_s'=\Lambda_2^{-1}(T-T_s),\qquad \rho\rho_b=\rho^\circ\rho_b-\rho^\circ\rho_s\\
\alpha W'=u,\quad \delta\alpha^{-1}-W'=\rho^{-1},\quad p=\rho^\circ T\\
\rho_s\rho^{-1}=\gamma\alpha^{-1}-\Psi',\qquad \rho_s u_s=-\alpha\Psi'+\rho u(\gamma\alpha^{-1}-\Psi')\end{gathered} \tag{3.2}$$

Покажем, что системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3.2) могут соответствовать автомодельные движения с ударными волнами, отделяющими невозмущенное и возмущенное течения. Обозначим через M скорость распространения ударной волны, отнесенную к замороженной скорости звука (по обоим релаксационным процессам) невозмущенного течения. Пусть индекс 1 соответствует состоянию непосредственно за ударной волной. Соотношения на разрыве примут вид [1]

$$\begin{gathered}\rho_1(M-u_1)=M\beta^{-1},\qquad \rho_{s1}(M-u_{s1})=(1-m)m^{-1}M\beta^{-1}\\
p_1=1+\varkappa M\beta^{-1}[u_1+(1-m)m^{-1}u_{s1}],\qquad (M-u_{s1})^2-M^2=\\
=2\varkappa^{-1}\rho_b^{-1}(1-p_1)\\
(M-u_1)^2-M^2=2(\varkappa-1)^{-1}(1-T_1),\qquad p_1=\rho_1^\circ T_1,\\
\beta=1+(1-m)m^{-1}\rho_b^{-1},\qquad T_{s1}=1\end{gathered} \tag{3.3}$$

где m — массовая концентрация газа перед ударной волной.

Из последних четырех уравнений системы (3.2) можно получить два первых интеграла

$$\rho(\delta-u)=\alpha,\qquad \rho_s(\delta-u_s)=\gamma$$

Используя в качестве граничных условий соотношения (3.3) на разрыве, получим

$$\alpha=M\beta^{-1},\qquad \delta=M,\qquad \gamma=(1-m)m^{-1}M\beta^{-1}$$

Таким образом, система (3.2) допускает решение, соответствующее распространению ударной волны с постоянной скоростью M. Выберем переменную Лагранжа так, чтобы $\zeta=0$ соответствовало ударной волне. В зоне релаксации

$$\rho(M-u)=M\beta^{-1},\qquad \rho_s(M-u_s)=(1-m)m^{-1}M\beta^{-1} \tag{3.4}$$

Из первого уравнения (3.2) с учетом условий (3.3) и соотношений (3.4) получим еще один первый интеграл

$$p=1+\varkappa M\beta^{-1}[u+(1-m)m^{-1}u_s] \tag{3.5}$$

Второе уравнение (3.2) также интегрируется. Можно получить

$$\frac{\varkappa}{\varkappa-1}T+\frac{1-m}{m}T_s+\frac{\varkappa}{2}u(u-2M)+\frac{1-m}{m}\frac{\varkappa}{2}u_s(u_s-2M)+ \tag{3.6}$$

$$+\frac{1-m}{m}\frac{p}{\rho_b}=\frac{\varkappa}{\varkappa-1}+\frac{1-m}{m}+\beta-1$$

С учетом (3.4) и (3.5) третье и четвертое уравнения (3.2) можно записать в виде

$$\text{(3.7)}\qquad \begin{gathered} M\beta^{-1}(M-u_s)u_s'-M\beta^{-1}\varkappa^{-1}\rho_b^{-1}p'=\Lambda_1^{-1}(M-u)(u-u_s)|u-u_s|^{n-1}\\ M\beta^{-1}(M-u_s)T_s'=\Lambda_2^{-1}(M-u)(T-T_s)^k \end{gathered}$$

Полученное автомодельное движение представляет собой течение, обусловленное движением поршня, за ударной волной, распространяющейся с постоянной скоростью в покоящейся среде. При $t=0$ поршень внезапно выводится из состояния равновесия. Скорости фаз u_1 и u_{s1} в начальный момент времени однозначно определяются из условий на разрыве (3.3) при заданном значении M. Для определения течения в зоне релаксации за ударной волной необходимо решить систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными (3.7). Из (3.4)—(3.6) можно найти скорость движения поршня u_e при $t\to\infty$. Так как в этом случае $u_s\to u$ и $T_s\to T$, после несложных выкладок получим

$$\text{(3.8)}\qquad u_e=\frac{2M}{\beta M_e^2}\frac{M_e^2-1}{\varkappa_\Sigma+1},\qquad M_e^2=\frac{\varkappa M^2}{m\varkappa_\Sigma\beta^2}$$

4. Сделаем еще одно упрощающее предположение, которое позволит решить в квадратурах систему (3.7). Рассмотрим только температурное отставание и будем считать, что скорости газа и инородных частиц одинаковы $u_s=u$. Из условий на разрыве, видоизмененных применительно к рассматриваемому случаю, можно получить скорость движения поршня в начальный момент времени

$$\text{(4.1)}\qquad u_2=\frac{2M}{\beta M_2^2}\frac{M_2^2-1}{\varkappa+1},\qquad M_2^2=\frac{M^2}{m\beta^2}$$

При $u_s=u$ ударная волна будет двигаться со скоростью M_2. С учетом (3.8) и (4.1) соотношение (3.6) преобразуется к следующим альтернативным формам:

$$\text{(4.2)}\qquad T_s=1+\frac{\varkappa}{1-m}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\frac{u}{2}(u-u_2)=T+\frac{\varkappa}{1-m}\frac{\varkappa_\Sigma+1}{\varkappa_\Sigma-1}\frac{u}{2}(u-u_e)$$

Подставим (4.2) во второе уравнение (3.7). С использованием условия $u_s=u$ получим

$$\text{(4.3)}\qquad \frac{du}{d\zeta}=\lambda_k^{-1}\frac{u^k(u_e-u)^k}{u-u_2/2},$$

$$\lambda_k^{-1}=\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\frac{1-m}{\beta\varkappa}\Lambda_2^{-1}M^{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{\varkappa_\Sigma+1}{\varkappa_\Sigma-1}\frac{\varkappa}{1-m}\right)^k$$

Представим уравнение (4.3) в виде

$$\text{(4.4)}\qquad (1-V)^{-k}dV=fdx=V^k(V-\chi)^{-1}d\tau$$

$$V=\frac{u}{u_e},\qquad \tau=\frac{u_e^{2k-2}\zeta}{\lambda_k},\qquad \chi=\frac{u_2}{2u_e},\qquad r=\frac{u_e^{2k-3}MW}{\beta\lambda_k}$$

Будем искать решение этой системы уравнений, удовлетворяющее условиям

$$\text{(4.5)}\qquad \begin{aligned} &x=\tau=0,\quad V=2\chi,\quad r=0\\ &x=\tau=\infty,\quad V=1,\quad r=\infty \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая.

1^0. $k=1$. Имеет место линейный закон теплообмена между фазами. Положим $f=1$, тогда решение первого уравнения (4.4), удовлетворяющее условиям (4.5), имеет вид

$$V=1-(1-2\chi)e^{-x} \tag{4.6}$$

Из второго уравнения (4.4) находим

$$\tau=(1-\chi)x-\chi\ln[1+(2\chi-1)e^{-x}]+\chi\ln 2\chi \tag{4.7}$$

Используя условие для $W(\zeta)$ из (3.2) и переходя к переменной x в соответствии с (4.4), получим

$$dr=(V-\chi)fV^{1-k}dx \tag{4.8}$$

В рассматриваемом случае с учетом (4.5) и (4.6) можно получить решение этого уравнения

$$r=(1-\chi)x+(1-2\chi)(e^{-x}-1),$$

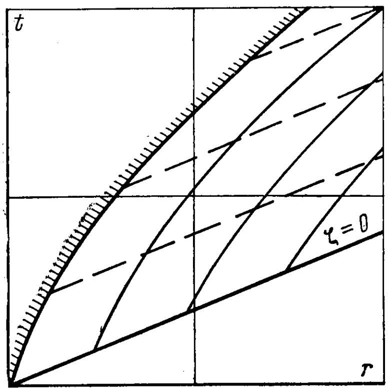
которое позволяет определить траектории частиц газа.

2^0. $k=2$. Этот случай соответствует квадратичному закону теплообмена между газом и инородными частицами. Положим $f=(1-2\chi)^{-1}$. По аналогии с предыдущим случаем получим

$$V=(2\chi+x)(1+x)^{-1}$$

$$\tau=\frac{1-\chi}{1-2\chi}x+(1-2\chi)\ln\left(1+\frac{x}{2\chi}\right)-\frac{1-2\chi}{2}\left(1+\frac{x}{2\chi}\right)^{-1}\frac{x}{2\chi},$$

$$r=\frac{1-\chi}{1-2\chi}x-\chi\ln\left(1+\frac{x}{2\chi}\right)$$



Фиг. 1

Эти соотношения выполняются при $\chi\neq0$. В случае $\chi=0$ (ударная волна вырождается в линию Маха) необходимо видоизменить условия (4.5).

Предположим, что в момент времени $t=0$ поршень находится в точке $y=0$. Уравнение движения ударной волны можно записать в одном из следующих видов: $\zeta=0$, $\beta\psi=Mt$ и $y=Mt$. Картина течения представлена на фиг. 1. Линии $\zeta=\text{const}$ параллельны траектории движения ударной волны. На этих линиях все параметры двухфазного течения постоянны. Тонкими сплошными линиями на фиг. 1 изображены траектории частиц газа, которые в данном случае совпадают с траекториями инородных частиц.

На основе полученных автомодельных решений можно сделать некоторые качественные выводы относительно неравновесных течений. Из выражения для λ_k (4.3) видно, что $\lambda_2\lambda_1^{-1}$ может быть большим ($\varkappa_\Sigma$ близко к единице), поэтому установление равновесного состояния в зоне релаксации за ударной волной при квадратичном законе теплообмена происходит медленнее, чем при линейном. Кроме того, из (3.8) следует, что u_e уменьшается при увеличении β, т. е. при учете занимаемого инородными частицами объема влияние диссипативных процессов уменьшается.

5. Исследуем групповые свойства двумерного стационарного двухфазного течения. В системе (1.1) рассмотрим переменные x, y, u, v, причем $\nu=0, 1$ для плоского и осесимметричного случаев соответственно.

Введем функции тока газа и инородных частиц, определяемые формулами

$$d\psi=\rho y^{\nu}(v dx-u dy), \quad d\psi_s=\rho_s y^{\nu}(v_s dx-u_s dy)$$

При помощи этих соотношений уравнение неразрывности для обеих фаз можно заменить уравнениями

$$(5.1) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}=y^{\nu}\rho v, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=-y^{\nu}\rho u, \quad \frac{\partial\psi_s}{\partial x}=y^{\nu}\rho_s v_s, \quad \frac{\partial\psi_s}{\partial y}=-y^{\nu}\rho_s u_s$$

Алгебра Ли системы (1.1) порождается оператором X_1, которому соответствует группа растяжений

$$X_1=(2-n)\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)+u\frac{\partial}{\partial u}+v\frac{\partial}{\partial v}+u_s\frac{\partial}{\partial u_s}+v_s\frac{\partial}{\partial v_s}+$$
$$+2p\frac{\partial}{\partial p}+2T\frac{\partial}{\partial T}+2T_s\frac{\partial}{\partial T_s}+[(\nu+1)(2-n)+1]\left(\psi\frac{\partial}{\partial\psi}+\psi_s\frac{\partial}{\partial\psi_s}\right)$$

Этот оператор входит в алгебру Ли при $n+1=2k$. Если температурный релаксационный процесс заморожен или протекает равновесно, то оператор X_1 входит в алгебру Ли при любом положительном n. Если инородные частицы неподвижны или движутся вместе с газом, то вместо n надо подставить $2k-1$ и X_1 входит в алгебру Ли при любом k.

В алгебру Ли входят операторы группы переноса

$$X_2=\partial/\partial x, \quad X_3=\partial/\partial\psi, \quad X_4=\partial/\partial\psi_s$$

Если занимаемым инородными частицами объемом можно пренебречь, то имеется еще один оператор группы растяжений

$$X_5=p\frac{\partial}{\partial p}+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\rho_s\frac{\partial}{\partial\rho_s}+\psi\frac{\partial}{\partial\psi}+\psi_s\frac{\partial}{\partial\psi_s}$$

При $\nu=0$ существует оператор $X_6=\partial/\partial y$.

В случае стоксовского закона сопротивления и линейного закона теплообмена при $\nu=0$ в алгебру Ли входит следующий оператор, определяющий группу вращения

$$X_7=x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial v}-v\frac{\partial}{\partial u}+u_s\frac{\partial}{\partial v_s}-v_s\frac{\partial}{\partial u_s}$$

Рассмотрим подгруппу группы Ли, соответствующую оператору

$$X=X_1-\omega X_5$$

Если $\beta>1$, то следует положить $\omega=0$. После нахождения инвариантов этой подгруппы можно ввести следующие переменные:

$$\eta=yx^{-1}, \quad u=y^{\mu}U(\eta), \quad u_s=y^{\mu}U_s(\eta)$$
$$p=y^{(2-\omega)\mu}P(\eta), \quad v=y^{\mu}V(\eta), \quad v_s=y^{\mu}V_s(\eta)$$
$$\rho=y^{-\omega\mu}R(\eta), \quad \rho_s=y^{-\omega\mu}R_s(\eta), \quad T_s=y^{2\mu}\Theta_s(\eta)$$
$$T=y^{2\mu}\Theta(\eta), \quad \psi=y^{(i+1)\mu}\Psi(\eta), \quad \psi_s=y^{(i+1)\mu}\Psi_s(\eta)$$

Подставляя эти соотношения в (5.1) и проводя соответствующие выкладки, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющую все автомодельные плоские и осесимметричные стационарные движения, соответствующие группам растяжений.

6. Рассмотрим оператор $X=X_2+\alpha X_3+\gamma X_4+\delta X_6$ и ограничимся изучением плоских движений ($\nu=0$). После нахождения полного набора функционально независимых инвариантов группы, соответствующего этому оператору, перейдем в уравнениях (5.1) к новым переменным

$$\begin{aligned}(6.1)\qquad & \alpha Y'=vu^{-1},\quad \delta-\alpha Y'=-\alpha(\rho u)^{-1},\quad \alpha\Psi_s'+\rho_s u_s v u^{-1}=\rho_s v_s\\ & \gamma\alpha^{-1}-\Psi_s'=\rho_s u_s(\rho u)^{-1},\quad \zeta=\alpha x-\psi\\ & y=\delta\alpha^{-1}\psi+Y(\zeta),\quad \psi_s=\gamma\alpha^{-1}\psi+\Psi_s(\zeta),\quad \Omega=\Omega(\zeta)\end{aligned}$$

где Ω — любой параметр, входящий в (1.1), кроме x, y, ψ и ψ_s.

Из этих уравнений сразу получаем два интеграла

$$(6.2)\qquad \rho(v-\delta u)=\alpha,\quad \rho_s(v_s-\delta u_s)=\gamma$$

С учетом (6.2) основная система уравнений (1.1) в новых переменных запишется так:

$$\begin{aligned}(6.3)\qquad & \alpha u'+\delta\varkappa^{-1}p'+\gamma u_s'=0\quad \alpha v'+\varkappa^{-1}p'+\gamma v_s'=0\\ & \alpha h'-\alpha(\rho^\circ)^{-1}p'+\gamma[T_s'+\varkappa(u_s-u)u_s'+\varkappa(v_s-v)v_s']+\\ & +[\rho^{-1}-(\rho^\circ)^{-1}][v_s-v-(u_s-u)\delta]p'=0\\ & \gamma\rho\rho_s^{-1}uu_s'-\delta\rho(\varkappa\rho_b)^{-1}up'=\Lambda_1^{-1}(u-u_s)\,|u-u_s|^{n-1}\\ & \gamma\rho\rho_s^{-1}uv_s'-\rho u(\varkappa\rho_b)^{-1}p'=\Lambda_1^{-1}(v-v_s)\,|v-v_s|^{n-1}\\ & \gamma\rho\rho_s^{-1}uT_s'=\Lambda_2^{-1}(T-T_s)^k,\quad p=\rho^\circ T\\ & \rho\rho_b=\rho^\circ\rho_b-\rho^\circ\rho_s,\qquad h=\varkappa(\varkappa-1)^{-1}T\end{aligned}$$

Чтобы выяснить, какой класс автомодельных движений определяет система (6.2) и (6.3), рассмотрим только температурное отставание ($u_s=u$, $v_s=v$, $k=1$). В этом случае первые три уравнения (6.3) можно проинтегрировать и, используя граничные условия $u(-\infty)=M_\infty$, $v(-\infty)=$ $=0$, свести задачу к решению уравнения

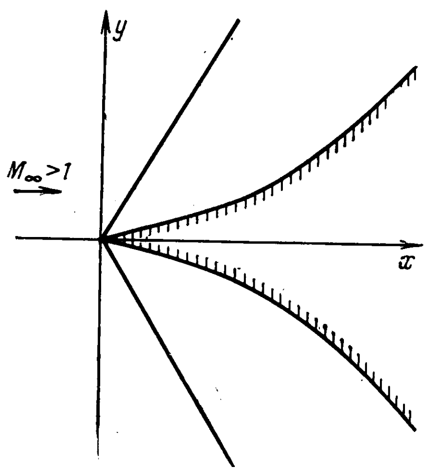
$$\begin{aligned}(6.4)\qquad & \frac{du}{d\zeta}=-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\frac{\varkappa_\Sigma+1}{\varkappa_\Sigma-1}\frac{\beta}{\delta M_\infty^2}\frac{1}{2\Lambda_2}\frac{(u-M_\infty)(u-u_e)}{u(u-u_0)}\\ & u_e=M_\infty-\frac{2M_\infty}{\beta M_e}\frac{M_e^2\sin^2\varphi-1}{\varkappa_\Sigma+1},\qquad u_0=M_\infty-\frac{M_\infty^2\sin^2\varphi-1}{\beta(\varkappa+1)}\\ & M_e^2=\varkappa(\varkappa_\Sigma\beta^2)^{-1}M_\infty^2,\quad \delta=\operatorname{tg}\varphi\end{aligned}$$

Уравнение (6.4) рассматривалось при изучении одномерных стационарных неравновесных течений. Известно [6, 7], что оно описывает два режима течения. Первый соответствует зоне релаксации за скачком уплотнения, в которой происходит уменьшение скорости до предельного значения u_e. По заданному изменению скорости из (6.3) можно получить уравнение обтекаемой поверхности ($\psi=0$)

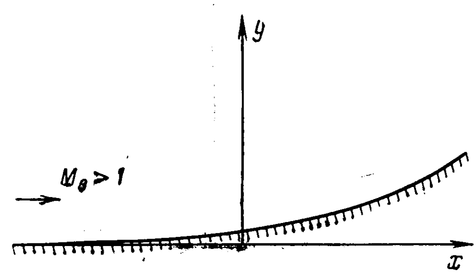
$$(6.5)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{v}{u}=\frac{1}{\delta}\left(\frac{M_\infty}{u}-1\right)$$

Автомодельному движению в данном случае соответствует обтекание сверхзвуковым потоком клинообразного тела при присоединенном скачке уплотнения постоянной интенсивности (фиг. 2). Форма тела такова, что вблизи вершины оно совпадает с клином, обтекаемым замороженным потоком, а на бесконечности — с клином, обтекаемым равновесным потоком (по обоим релаксационным процессам) при одной и той же интенсивности головного скачка. Каждому значению M_∞ соответствует бесконечное число автомодельных движений в зависимости от выбора угла наклона скачка φ. При $\sin\varphi = M_\infty^{-1}$ угол при вершине обтекаемого тела равен нулю. Отметим, что в случае химически реагирующих смесей решение подобного типа впервые было получено в [8].

Второй режим течения, описываемый (6.4), соответствует полной дисперсии скачка уплотнения. Он имеет место при околозвуковом режиме течения $M_e>1$, $M_\infty<1$, т. е. когда скорость набегающего потока меньше



Фиг. 2



Фиг. 3

замороженной, но больше равновесной скорости звука. В этом случае $u(\zeta)$ монотонно уменьшается до значения u_e, и из (6.5) следует, что имеет место автомодельное околозвуковое течение около вогнутой стенки (фиг. 3).

Рассмотренные в п. 3 и 6 автомодельные движения характерны для более широкого класса неравновесных течений. Они имеют место, если уравнения, описывающие кинетику релаксационных процессов, инвариантны по отношению к упомянутым преобразованиям группы переноса. Это условие выполняется для многих релаксационных процессов, присущих гетерогенным и гомогенным средам (массообмен между фазами, колебательная релаксация, химические реакции, ионизация и т. п.).

Поступила 23 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крайко А. И., Стернин Л. Е.* К теории течения двухскоростной сплошной среды с твердыми и жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, № 3.
2. *Овсянников Л. В.* Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск, Новосиб. ун-т, 1966.
3. *Овсянников Л. В.* Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1958, т. 118, вып. 3.
4. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
5. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М., «Наука», 1968.
6. *Lighthill M. J.* Viscosity effects in sound waves of finite amplitude. In: Surveys in mechanics. Cambridge Univ. Press., 1956.
7. *Кларк Дж., Макчесни М.* Динамика реальных газов. М., «Мир», 1967.
8. *Epstein M.* Dissociation relaxation behind a plane, oblique shock wave. J. Aeronaut. Sci., 1961, No. 8.