

О ЛИНЕЙНЫХ МАСШТАБАХ ТУРБУЛЕНТНОСТИ
В ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Н. И. АКАТНОВ

(Ленинград)

В статье приводится сопоставление некоторых характеристик турбулентного пограничного слоя, вычисленных в [1, 2] с экспериментальными данными. Сопоставление показывает, в частности, что «путь смешения», входящий в определение коэффициента турбулентной вязкости, для разных течений не пропорционален интегральному масштабу турбулентности, определяемому по корреляционной функции.

1. В [1-7] решен ряд задач турбулентного пограничного слоя с использованием кроме обычных уравнений пограничного слоя энергетического уравнения турбулентных пульсаций. Напряжение турбулентного трения выражалось формулой

$$(1.1) \quad \tau_{xy} = -\rho \langle u'v' \rangle = \rho \varepsilon \partial u / \partial y$$

Здесь x — ось системы xy , направленная вдоль основного течения; u — проекция средней скорости на ось x ; u' , v' — проекции пульсационной составляющей скорости на x , y ; ε — кинематический коэффициент турбулентной вязкости. Диффузионный член выражался градиентной формулой

$$(1.2) \quad -\langle v'(p'/\rho + \frac{3}{2}u'^2) \rangle = \varepsilon \partial b / \partial y$$

Здесь $b = \frac{1}{2} \langle u'^2 + v'^2 + w'^2 \rangle$. Диссипация энергии турбулентности в тепло выражалась следующей из соображений размерности [8] соотношением

$$(1.3) \quad W = c \gamma b_i \sqrt{b_i} / l = c b \sqrt{b_i} / l$$

Здесь $b/b_i = \gamma$ — коэффициент перемежаемости, l — характерная длина пульсационного движения (макромасштаб турбулентности), c — эмпирическая постоянная, $b_i = b$ внутри турбулизированной жидкости. Как показали расчеты, в свободном пограничном слое лучше брать $b_i = b_m$ (b_m — максимальное значение b в данном сечении пограничного слоя) [1, 3-5], а в пристенном пограничном слое $b_i = b$ [2, 6].

Для свободного пограничного слоя были приняты следующие гипотезы. В предположении, что $\varepsilon = \varepsilon(x)$, принималось

$$(1.4) \quad \varepsilon = aL(\sqrt{b})^*$$

где a — эмпирический коэффициент, $(\sqrt{b})^*$ — среднее значение \sqrt{b} на длине L . В качестве L принята толщина пограничного слоя, в пределах которой $\partial u / \partial y$, сохраняя знак, имеет большие значения. Если u_1 и u_2 — скорости на границах пограничного слоя, y_1 и y_2 — координаты точек, в которых $u = u_2$ равно соответственно 0.9 ($u_1 - u_2$) и 0.1 ($u_1 - u_2$), то $L = y_1 - y_2$. Таким путем для ε получаем

$$(1.5) \quad \varepsilon = aL \frac{1}{L} \int_{y_2}^{y_1} \sqrt{b} dy = a \int_{y_2}^{y_1} \sqrt{b} dy$$

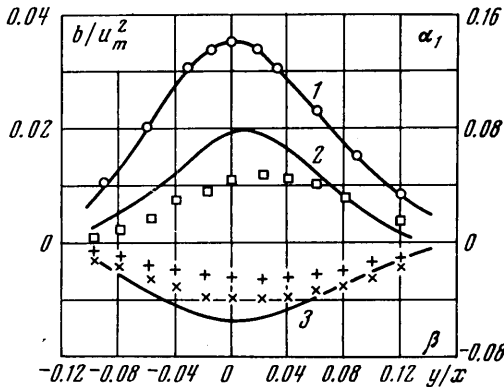
В качестве l в (1.3) подходящей длиной [3] оказывается толщина зоны турбулентных пульсаций. Если в данном сечении пограничного слоя y_3 и y_4 — координаты точек, в которых $b/b_m=0.05$, то

$$(1.6) \quad l=y_3-y_4$$

Отношения длин L/l в некоторых турбулентных течениях приведены в таблице. Замкнутая система уравнений, включающая в себя гипотезы (1.1)–(1.6), содержит два эмпирических коэффициента a и c . Гипотезы относительно ε , L и l без труда обобщаются на случай осесимметричных течений [1, 3].

Во внешней области пристенных течений [2], на которую влияние стенки не распространяется, использованы гипотезы (1.5), (1.6). В пристенной области в соответствии с гипотезой Прандтля принято

$$(1.7) \quad L=L_1=Ay, \quad l=l_1=By$$



Фиг. 1

через a , c , $\kappa=0.4$ и отношение b_m/v_*^2 , где b_m имеет место на границе вязкого подслоя, а $v_*^2=\tau_w/\rho$. Для турбулентных течений, рассмотренных в [1–6], получено хорошее согласование между вычисленными и экспериментальными распределениями средней скорости, кинетической энергии пульсаций и коэффициентов напряжения трения, а значения эмпирических

	Слой смешения [11]	Плоская струя [13]	Круглая струя [12]	Плоский канал [17]	Круглая труба	Пограничный слой на пластинке	Средние значения
a	0.104	0.095	0.094	0.092	0.095	0.090	0.095
c	2.6	2.7	2.4	2.4	2.6	2.2	2.5
L/l	0.70	0.30	0.37	0.20	0.20	0.40	—
$\Delta\varphi$, %	5	11	1	—	—	—	6
$\Delta\sigma$, %	11	6	1	—	—	—	6

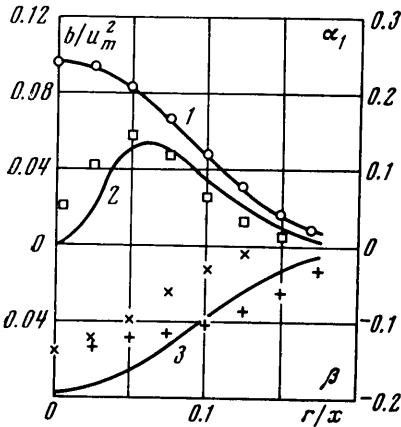
коэффициентов a и c близки для разных течений (см. таблицу, в которой значения коэффициентов a и c уточнены в сравнении с [3]).

2. В данной статье приводятся дополнительные сопоставления некоторых, вычисляемых в [1–3], величин с экспериментальными данными. В [1] вычисленное распределение величины b/u_m^2 (u_m — максимальное значение u в данном сечении пограничного слоя) в слое смешения и в круглой струе сравнивалось с опытными данными [9, 10], в которых не все составляющие скорости пульсаций были измерены. В [11, 12] те же течения исследованы более детально, в частности измерены все три составляющие пульсационной скорости. На фиг. 1, 2, 3 приведено сравнение теоретически найденных распределений $\varphi=b/u_m^2$ (кривые 1) с экспериментальными (белые кружки) соответственно для слоя смешения, круглой струи и плоской струи по данным [11] (фиг. 1), [12] (фиг. 2) и [13] (фиг. 3). Как видно, на фиг. 1–3

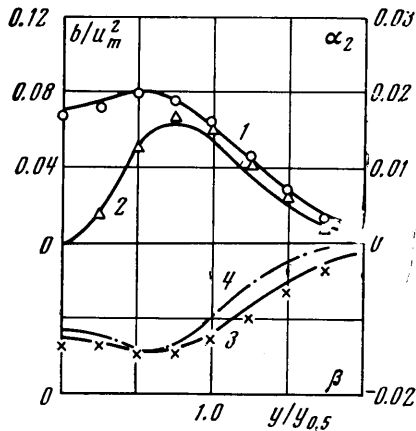
совпадение хорошее. Значения эмпирических коэффициентов a и c , соответствующих теоретическим кривым, приведены в таблице. Средние значения коэффициентов $a=a_0=0.095$ и $c=c_0=2.5$ для шести течений, приведенных в таблице. Струйные течения были рассчитаны при $a=a_0$ и $c=c_0$, найдены соответствующие значения φ_{m0} и δ_0 (δ — некоторая условная толщина пограничного слоя) и вычислены абсолютные погрешности

$$(2.1) \quad \Delta_\varphi = |(\varphi_m - \varphi_{m0}) / \varphi_{m0}|, \quad \Delta_\delta = |(\delta - \delta_0) / \delta_0|$$

приведенные в таблице. Максимальная погрешность $11 \div 12\%$, а среднее для трех случаев значение погрешности $5 \div 6\%$. Разброс экспериментальных значений b/u_m^2 составляет 10% . Слой смешения по данным [11] при-



Фиг. 2



Фиг. 3

мерно на 30% толще такого же слоя по данным [9]. Теоретическая толщина δ_0 находится между этими значениями ближе к толщине слоя [11].

На фиг. 1—3 построены теоретические распределения функции $\varepsilon(\partial u/\partial y)^2$ (кривые 2),

$$\alpha_1 = x \langle u'v' \rangle u_m^{-3} \partial u/\partial y, \quad \alpha_2 = y_{0.5} \langle uv' \rangle u_m^{-3} \partial u/\partial y$$

определяющей порождение турбулентности, а треугольниками и квадратами нанесены опытные данные.

На фиг. 1—3 сплошной линией (кривая 3) построены графики функции (1.3) $\beta = x u_m^{-3} W_i$, определяющей диссипацию турбулентности в тепло, при $b_i = b_m$. Экспериментальные распределения диссипации W_i , вычисленные по одной измеренной производной в предположении изотропности турбулентности ($W_i = 15\nu \langle (\partial u'/\partial x)^2 \rangle$) по данным [11—13], помечены косым крестом. Экспериментальные значения той же величины, полученные сложением средних квадратов всех необходимых производных, из которых некоторые измерены, а остальные выражены через измеренные с помощью дополнительных гипотез, помечены прямым крестом [11, 12]. Хорошее согласие наблюдается лишь для плоской струи (фиг. 3). На фиг. 3 (кривая 4) штрихпунктиром построен график функции (1.3) при $b_i = b$, который, как видно, согласуется с опытом несколько хуже, чем график (1.3) при $b_i = b_m$. Графики функций, определяющих порождение и диссипацию турбулентности, изображенные на фиг. 1—3, имеют большое сходство с графиками тех же величин, полученных в [14].

3. Экспериментально показано, что диссипация турбулентности в тепло в задаче о вырождении однородной изотропной турбулентности (в началь-

ной стадии) определяется интегральным масштабом турбулентности. В [15] в (1.3) в качестве характерной длины был использован интегральный масштаб турбулентности L_p , определенный по продольной корреляционной функции, и по опытным данным вычислялась величина $c' = W_1 L_p / b \sqrt{b}$. В указанной работе приведено в общей сложности $n=35$ опытных значений величины c' . Среднее значение $c_*' = \Sigma c' / n = 1.1$. Среднее значение абсолютного отклонения $\Delta_c = \Sigma |c_*' - c'| / n c_*' = 0.12$.

Разброс опытных данных соответствует изменению характерного размера решетки, создающей турбулентность M от 0.6 до 2.5 см и числа $Re = UM/\nu$ от 2800 до 22 100, однако систематической зависимости c' от M и Re не наблюдается. Таким образом, использование в (1.3) в качестве характерной длины интегрального масштаба обеспечивает относительное постоянство коэффициента c' в однородной и изотропной турбулентности при различных M и Re .

Представляет интерес сравнить длину l , определяемую выражением (1.6), которая также обеспечивает относительное постоянство c в (1.3), с интегральными масштабами турбулентности в пограничных слоях. Для ряда турбулентных пограничных слоев измерены поперечные корреляционные функции

$$(3.1) \quad R_{11}(y, \eta) = \langle u(y)u(y+\eta) \rangle / \sqrt{\langle u^2(y) \rangle} \sqrt{\langle u^2(y+\eta) \rangle}$$

Интегральный масштаб определим как

$$(3.2) \quad L_{11}(y) = \int_0^{\eta_m} |R_{11}(y, \eta)| d\eta, \quad \eta_m = \eta, \quad R_{11} = 0$$

Для пристенных течений брались $R_{11}(y, \eta)$, полученные при $\eta > 0$, т. е. когда подвижная нить термоанемометра двигалась от стенки. Для удобства сравнения вычислялись средние по толщине пограничного слоя значения L_{11} , определяемые соотношением

$$(3.3) \quad \langle L_{11}(y) \rangle = 1/\delta \int_0^{\delta} L_{11}(y) dy$$

Здесь δ — толщина пограничного слоя. Для нескольких пограничных слоев были вычислены отношения $m = c \langle L_{11}(y) \rangle / l$, которые оказались равными 0.2 в круглой струе [12], 0.23 в пограничном слое вблизи точки отрыва [16], 0.24 в канале [17], 0.26 в плоской струе [13, 18], 0.30 в слое смещения [11], 0.32 в пограничном слое в точке минимума давления [16], 0.35 в полуограниченной струе [19], 0.36 в пограничном слое на пластинке. В случаях, для которых нет решения, бралось $c = c_0 = 2.5$.

Среднее значение $m_* = 0.28$, а средняя величина абсолютного отклонения $\Delta_m = \Sigma |m_* - m| / n m_* = 0.18$. Разброс величины m в 1.5 раз больше разброса c' , но, учитывая, что c' вычислялась для одного и того же течения, а m для разных, можно признать, что величина разброса m не слишком велика. Заключение, сделанные относительно масштаба $\langle L_{11}(y) \rangle$, останутся, по-видимому, в силе и для других интегральных масштабов, поскольку обработка опытных данных для канала [17], плоской струи [18] и полуограниченной струи [19] показывает, что отношение $\langle L_{22}(y) \rangle / \langle L_{11}(y) \rangle \cong 1$. Для плоского канала, пограничного слоя, круглой струи $\langle L_{11}(x) \rangle / \langle L_{11}(y) \rangle = 2.5 \div 3.5$. Таким образом, длина l сравнительно неплохо коррелирована с интегральными масштабами турбулентности, что и объясняет возможность использования этой длины в качестве подходящего масштаба в (1.3).

Небольшой разброс значений коэффициента a для разных течений показывает, что путь смешения, входящий в ε , пропорционален aL . Обозначим $\langle L_{11}(y) \rangle / aL = r$. В слое смешения [11] $r=1.65$, в круглой струе [12] $r=2.4$, в плоской струе [18] $r=3.1$, в пограничном слое на пластине $r=4.4$, в канале [17] $r=5.4$. Среднее значение $r_*=3.4$, а среднее абсолютное отклонение $\Delta_r = \Sigma |r_* - r| / nr_* = 0.36$.

Разброс величины r вдвое больше разброса m , т. е. величина $\langle L_{11}(y) \rangle$ хуже коррелирована с aL , чем с l . Этот факт можно рассматривать как указание на то, что путь смешения не пропорционален $\langle L_{11}(y) \rangle$. В следующей статье будет показано, что величина aL тесно связана с определением пути смешения данным Прандтлем, а именно: $l_0 \sim \sqrt{b} / |du/dy|$.

Поступила 24 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Акатнов Н. И., Кузнецов А. П. Уравнение баланса энергии турбулентных пульсаций в теории свободного турбулентного пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.
2. Акатнов Н. И., Тульверт В. Ф. Использование уравнения баланса пульсационной энергии в теории пристеночных турбулентных течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 3.
3. Акатнов Н. И. О применении энергетического уравнения турбулентности в теории струйных течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 2.
4. Кузнецов А. П. Турбулентная струя проводящего газа в продольном магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1970, № 3.
5. Кузнецов А. П. Пограничный слой турбулентной газовой струи высокой температуры в продольном магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1971, № 2.
6. Тульверт В. Ф. Использование уравнения баланса пульсационной энергии в теории МГД течений в каналах и трубах. Магнитная гидродинамика, 1973, № 1.
7. Акатнов Н. И. Истечение струи из щелевого источника в продольный сносный поток. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 6.
8. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Сер. физ., 1942, т. 6, № 1, 2, стр. 56—58.
9. Liepmann H. W., Laufer J. Investigation of free turbulent mixing. NACA Tech. Notes, 1947, No. 1257.
10. Corrsin S. Investigation of flow in an axially symmetrical heated jet of air. NACA Wartime Rept W-94, December 1943.
11. Wignanski J., Fiedler H. E. The two-dimensional mixing region. J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, pt 2, pp. 327—361.
12. Wignanski J., Fiedler H. E. Some measurements in the self-preserving jet. J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, pt 3, pp. 577—612.
13. Bradbury L. J. S. The structure of a self-preserving turbulent plane jet. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, Pt. 1, pp. 31—64.
14. Rodi W., Spalding D. B. A two-parameter model of turbulence and its application to free jets. Wärme- und Stoffübertragung, 1970, Bd 3, N 2.
15. Batchelor G. K., Townsend A. A. Decay of isotropic turbulence in the initial period. Proc. Roy. Soc., London, Ser. A, 1943, vol. 193, N 1035. (Рус. перев.: Теория одномерной турбулентности. М., Изд-во иностр. лит., 1955, стр. 108.)
16. Shubauer G. B., Klebanoff P. S. Investigation of separation of the turbulent boundary layer. Nat. Adv. Comm. Aeronaut., Rep., 1951, N 1030.
17. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М., «Мир», 1968.
18. Tailland A., Sunyach M., Mathieu J. Etude d'un jet plane. C. R. Acad. Sci. Paris, 1967, t. 264, ser. A, pp. 527—530.
19. Tailland A., Sunyach M., Mathieu J. Jet parietal. C. R. Acad. Sci., 1967, t. 264, N 11.