

АСИМПТОТИКА ЗАТУХАЮЩЕЙ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ
В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ АТМОСФЕРЕ

А. А. МАРКОВ

(Москва)

Рассматривается близкое к автомодельному [1] решение задачи о плоском взрыве в атмосфере, плотность и давление которой меняются с высотой по экспоненциальному (барометрическому) закону. Исследована устойчивость автомодельного решения [1] в линейном приближении. Автомодельное решение оказывается в определенном смысле промежуточной асимптотикой (ср. [2]) изучаемого решения. Отмечен неравномерный характер стремления к автомодельному решению, что согласуется с результатами численного исследования [3].

Для газодинамических функций в некоторой области получены асимптотические разложения, в которых первые члены совпадают с решением [1], а следующие члены учитывают влияние противодействия, земного притяжения и влияние начальных данных рассматриваемой задачи.

Возмущение по противодействию около автомодельного решения [1] в случае $\gamma=2$ рассматривалось ранее [4] методом, изложенным в монографии [5]. В отличие от рассмотренной здесь задачи учитывалась лишь переменность плотности атмосферы.

Применяемый здесь метод построения асимптотики затухающей волны аналогичен методу [6], где была рассмотрена ускоряющаяся волна.

Различные приближенные методы учета неоднородности атмосферы при взрыве изложены в [7-9].

1. Рассмотрим адиабатическое движение невязкого, совершенного газа, вызванное плоским взрывом с энергией E_0 на единицу площади. Возмущаемая взрывом область пространства отделяется от невозмущенной области ударной волной, которая распространяется вверх и вниз в неоднородной атмосфере. Предполагаем, что атмосферная плотность и давление зависят от пространственной координаты x' (ось x' направлена вверх) по экспоненциальному закону

$$(1.1) \quad \rho_0' = \rho_* \exp(-x'/\Delta), \quad p_0 = p_* \exp(-x'/\Delta)$$

где Δ — масштаб неоднородности, ρ_* , p_* — значения плотности и давления в точке взрыва.

Воспользуемся безразмерными переменными [10] и лагранжевой формой записи уравнений газовой динамики

$$(1.2) \quad t = t' / (\rho_* \Delta^3 / E)^{1/2}, \quad x = x' / \Delta, \quad \rho = \rho' / \rho_* \\ p = p' \Delta / E, \quad u = u' / (E / \rho_* \Delta)^{1/2}, \quad \alpha_0^{-1} E_0 = E, \quad \alpha_0 = \alpha_0(\gamma)$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial m} + A_g = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho^{-\gamma} p = 0$$

$$A_g = g \rho_* \Delta^2 / E, \quad m = \int_x^\infty \rho d\xi$$

Соотношения на ударной волне в переменных (1.2) записываются следующим образом:

$$(1.4) \quad \rho = e^{-\varphi} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{A_p}{\dot{\varphi}^2} \right]^{-1}, \quad u = \frac{2\dot{\varphi}}{\gamma+1} \left[1 - \gamma \frac{A_p}{\dot{\varphi}^2} \right]$$

$$p = e^{-\varphi} \frac{2\dot{\varphi}^2}{\gamma+1} \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{A_p}{\dot{\varphi}^2} \right], \quad A_p = \frac{p^* \Delta}{E}, \quad \varphi = \frac{d\varphi}{dt}$$

Здесь $\varphi = \varphi^+(t)$ для волны, распространяющейся вверх, и $\varphi = \varphi^-(t)$ для волны, распространяющейся вниз, A_g и A_p — параметры, показывающие влияние поля тяготения и противодействия.

Предположим, что в начальный момент времени $t=0$ заданы распределения

$$(1.5) \quad M_0^- \leq m \leq M_0^+, \quad \rho = \rho^o(m), \quad u = u^o(m), \quad p = p^o(m)$$

Начальными данными (1.5) будут служить либо автомодельное решение [1], либо решение [3] в достаточно поздний момент времени (см. более подробно [11]).

2. Перейдем в уравнениях (1.3) и условиях (1.4), (1.5) к новым переменным ([11])

$$(2.1) \quad \tau = \ln \dot{\varphi}^2, \quad \varphi = \varphi^-(t), \quad \eta = m/M(t), \quad M(t) = \int_{\varphi^-}^{\infty} \rho(x, t) dx$$

$$u = \dot{\varphi} V(\eta, \tau), \quad \rho = e^{-\varphi} R(\eta, \tau), \quad p = \dot{\varphi}^2 e^{-\varphi} P(\eta, \tau)$$

$$r = R^{-1}, \quad S = r^{\gamma} P$$

Из закона сохранения массы и формул (2.1) следуют соотношения:

$$(2.2) \quad M(t) = \int_{\varphi^-}^{\infty} e^{-x} dx = e^{-\varphi(t)}, \quad \eta_{\Gamma}^- \leq \eta \leq 1, \quad \eta_{\Gamma}^- = e^{+\varphi_0 - \varphi^+}$$

где $\eta=1$ — координата затухающей волны $x = \varphi^-$ (минус у φ опускаем).

Уравнения движения (1.3), граничные условия (1.4), начальные условия (1.5) в переменных (2.1) запишем следующим образом:

$$(2.3) \quad 2\omega(\tau) \frac{\partial r}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + r = 0, \quad 2\omega(\tau) \frac{\partial V}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial P}{\partial \eta} +$$

$$+ \omega(\tau) V + A_g e^{-\tau} = 0, \quad 2\omega(\tau) \frac{\partial S}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial S}{\partial \eta} + S(2\omega(\tau) + \gamma - 1) = 0,$$

$$\omega(\tau) = \ddot{\varphi} / \dot{\varphi}^2$$

$$(2.4) \quad \eta = 1, \quad r = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} A_p e^{-\tau} \right), \quad V = \frac{2}{\gamma+1} (1 - \gamma A_p e^{-\tau})$$

$$P = \frac{2}{\gamma+1} - A_p \frac{\gamma-1}{\gamma+1} e^{-\tau}, \quad -\infty < \tau \leq \tau_0, \quad \tau_0 = \ln \dot{\varphi}^2(0),$$

$$(2.5) \quad \tau = \tau_0, \quad \eta_{\Gamma}^- \leq \eta \leq 1, \quad r = r^o(\eta), \quad V = V^o(\eta), \quad S = S^o(\eta),$$

$$P = P^o(\eta) \quad (P^o = S^o (r^o)^{-\gamma})$$

3. Положим в (2.3) и граничных условиях (2.4) $A_p = A_g = 0$ и рассмотрим предельный переход

$$(3.1) \quad r_0(\eta) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} r(\eta, \tau), \quad V_0(\eta) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} V(\eta, \tau)$$

$$P_0(\eta) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} P(\eta, \tau), \quad \omega_0 = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \omega(\tau), \quad \omega_0 = \text{const}$$

Сопоставляя полученные таким образом уравнения и граничные условия для величин r_0, V_0, P_0 соответственно с уравнениями и граничными условиями на волне определяющими автомодельное решение [1], убеждаемся, что

$$(3.2) \quad \begin{aligned} r_0 &= \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \bar{\rho}_0^{-1}(\eta), \\ V_0 &= \frac{2}{\gamma+1} \bar{u}_0(\eta), \\ P_0 &= \frac{2}{\gamma+1} \bar{p}_0(\eta), \quad \omega_0 = \alpha^{-1} \end{aligned}$$

где $\bar{\rho}_0, \bar{u}_0, \bar{p}_0$ — автомодельное решение [1], α — показатель автомодельности.

4. Рассмотрим малое возмущение $W_1(\eta, \tau) = \{r_1(\eta, \tau), V_1(\eta, \tau), P_1(\eta, \tau), \omega_1(\tau)\}$ около $W_0(\eta) = \{r_0, V_0, P_0; \omega_0\}$.

Предполагая эффекты противодействия и земного тяготения достаточно малыми, проведем линеаризацию уравнений в окрестности $W_0(\eta)$. Для $W_1(\eta, \tau)$ получим следующую систему уравнений и граничных условий:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} 2\omega_0 \frac{\partial r_1}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial r_1}{\partial \eta} + \frac{\partial V_1}{\partial \eta} + r_1 &= 0, \\ 2\omega_0 \frac{\partial V_1}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial V_1}{\partial \eta} - \frac{\partial P_1}{\partial \eta} + \omega_0 V_1 + \omega_1(\tau) V_0 + A_g e^{-\tau} &= 0 \\ 2\omega_0 \frac{\partial S_1}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial S_1}{\partial \eta} + S_1(2\omega_0 + \gamma - 1) + 2\omega_1(\tau) S_0 &= 0, \end{aligned}$$

$$S_1(\eta, \tau) = r_0^\gamma (P_1 + a(\eta) r_1), \quad a(\eta) = \gamma P_0 / r_0$$

$$(4.2) \quad \eta = 1, \quad r_1 = A_r \frac{2\gamma}{\gamma+1} e^{-\tau}, \quad V_1 = -\frac{2\gamma}{\gamma+1} A_p e^{-\tau}, \quad P_1 = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1} A_p e^{-\tau}$$

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \tau = \tau_0, \quad r_1 = r_1^\circ(\eta), \quad V_1 = V_1^\circ(\eta), \quad P_1 = P_1^\circ(\eta) \\ r_1^\circ = r^\circ - r_0, \quad V_1^\circ = V^\circ - V_0, \quad P_1^\circ = P^\circ - P_0 \end{aligned}$$

Система уравнений (4.1) гиперболическая. Характеристики системы определяются уравнениями

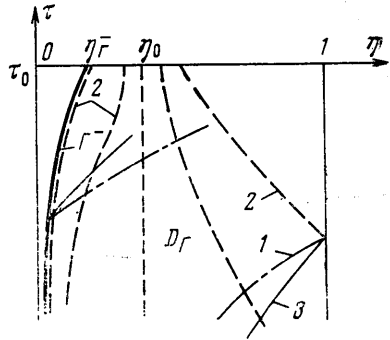
$$(4.4) \quad \frac{d\tau}{d\eta} = \frac{1}{\eta + \sqrt{a}}, \quad \frac{d\tau}{d\eta} = \frac{1}{\eta - \sqrt{a}}, \quad \frac{d\tau}{d\eta} = \frac{1}{\eta}, \quad a = \frac{\gamma P_0}{r_0}$$

Из свойств автомодельного решения [1] следует расположение характеристик в плоскости $\eta\tau$, приведенное на фигуре. Характеристики второго семейства имеют одну точку поворота $\eta = \eta_0, 0 < \eta_0 < 1$, определяемую уравнением

$$(4.5) \quad \eta^2 - \gamma P_0(\eta) r_0^{-1}(\eta) = 0$$

(Корень η_0 уравнения (4.5) соответствует особой точке $(\eta_0, \bar{p}_0(\eta_0))$ дифференциального уравнения, определяющего функцию $\bar{p}_0(\eta)$ (3.2), [1].) В области $\eta_0 < \eta \leq 1$ характеристики второго семейства приходят на границу $\eta = 1$ (затухающую волну). Характеристики двух других семейств (см. (4.4)) уходят с границы $\eta = 1$ (см. фигуру).

Рассмотрим область D_Γ (см. фигуру), ограниченную отрезком оси η ($\eta_\Gamma^- \leq \eta \leq 1, \tau = \tau_0$), границей $\eta = 1, \tau \leq \tau_0$ и характеристикой второго семейства, выходящей из точки (η_Γ^-, τ_0) .



Краевая задача (4.1) – (4.3) имеет единственное решение $W_1(\eta, \tau) = \{r_1(\eta, \tau), V_1(\eta, \tau), P_1(\eta, \tau); \omega_1(\tau)\}$ в области D_T .

Однозначная разрешимость задачи (4.1) – (4.3) доказывается сведением к интегральным уравнениям [11] вдоль характеристик и применением последовательных приближений. Для определения функции $\omega_1(\tau)$ используется характеристическое соотношение вдоль характеристики второго семейства $d\tau = d\eta / (\eta - \bar{v}a)$, приходящей на границу $\eta=1$, $\tau \leq \tau_0$ (затухающую волну). Оценивая последовательные приближения, находим для фиксированного η

$$(4.6) \quad |W_1| \leq K(\eta) e^{\sigma_1 |\tau|}, \quad |W_1| = |r_1| + |V_1| + |P_1| + |\omega_1|$$

где $\sigma_1 \geq 1$, $0 < \delta \leq \eta \leq 1$, $(\eta, \tau) \in D_T$, $\delta > 0$ – сколь угодно малое число.

5. Проведем более детальное исследование задачи (4.1) – (4.3) при $\tau \rightarrow -\infty$. Заметим, что в (4.1) переменные η и τ разделены, поэтому удобно воспользоваться преобразованием Лапласа по переменному τ . Положим

$$(5.1) \quad \tilde{W}(\eta, \lambda) = \int_{\tau_0}^{-\infty} e^{-\lambda\tau} W_1(\eta, \tau) d\tau, \quad \tilde{W} = \{\tilde{r}_1, \tilde{V}_1, \tilde{P}_1; \Omega\}$$

Приведем систему обыкновенных дифференциальных уравнений по переменному η для $\tilde{W}(\eta, \lambda)$. Для упрощения записи тильду в дальнейшем опускаем

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \eta r_1' + V_1' + (2\omega_0\lambda + 1)r_1 &= r_1^\circ(\eta) e^{-\lambda\tau_0} \\ \eta V_1' - P_1' + (2\omega_0\lambda + \omega_0)V_1 &= \Omega(\lambda)V_0(\eta) - A_g e^{-(1+\lambda)\tau_0} (1+\lambda)^{-1} + \\ &+ V_1^\circ(\eta) e^{-\lambda\tau_0} \\ \eta S_1' + (2\omega_0\lambda + 2\omega_0 + \gamma - 1)S_1 &= -2\Omega(\lambda)S_0(\eta) + S_1^\circ(\eta) e^{-\lambda\tau_0}, \\ \Omega(\lambda) &= \int_{\tau_0}^{-\infty} e^{-\lambda\tau} \omega_1(\tau) d\tau, \quad P_1 = r_0^{-\gamma} S_1 - ar_1 \end{aligned}$$

где $r_1^\circ(\eta)$, $V_1^\circ(\eta)$, $S_1^\circ(\eta)$ – начальные данные (4.3), штрих обозначает дифференцирование по η .

Используя соотношения на затухающей волне (4.2), получим для искомым функций $r_1(\eta, \lambda)$, $V_1(\eta, \lambda)$, $S_1(\eta, \lambda)$, $\Omega(\lambda)$ следующие граничные соотношения:

$$(5.3) \quad \eta=1, \quad r_1 = \frac{l_r e^{-(1+\lambda)\tau_0}}{1+\lambda}, \quad V_1 = \frac{l_v e^{-(1+\lambda)\tau_0}}{1+\lambda}, \quad S_1 = \frac{l_s e^{-(1+\lambda)\tau_0}}{1+\lambda}$$

$$l_r = A_p \frac{2\gamma}{\gamma+1}, \quad l_v = -A_p \frac{2\gamma}{\gamma+1}, \quad l_s = A_p \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^\gamma \frac{4\gamma^2 - (\gamma-1)^2}{\gamma^2 - 1}$$

Спектральная задача (5.2), (5.3) помимо искомым функций $r_1(\eta, \lambda)$, $V_1(\eta, \lambda)$, $S_1(\eta, \lambda)$ содержит также неизвестную параметрическую функцию $\Omega(\lambda)$. Функция $\Omega(\lambda)$ будет определена ниже требованием регулярности функций r_1 , V_1 , S_1 при $\eta \rightarrow \eta_0$.

Однозначная разрешимость нестационарной задачи (4.1) – (4.3) и априорная оценка (4.6) гарантируют существование решения спектральной задачи (5.2), (5.3) в области $\text{Re } \lambda < -\sigma_1$ ($\sigma_1 \geq 1$) (4.6). При этом $W(\eta, \lambda)$ является голоморфной функцией параметра λ .

Исследование спектральной задачи (5.2), (5.3) [11] показывает, что функция $W(\eta, \lambda)$ аналитически продолжается в полосу

$$(5.4) \quad -\sigma_1 < \text{Re } \lambda < \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{4\omega_0} \left(1 - \omega_0 - \frac{a_1(\eta_0)}{\eta_0} \right), \quad a_1(\eta) = \frac{a(\eta) - \eta^2}{\eta_0 - \eta}$$

где σ_0 – положительная постоянная, зависящая от γ ($\gamma=2$, $\sigma_0=3/8$). В полосе (5.4) функция $W(\eta, \lambda)$ регулярна всюду, кроме точки $\lambda=-1$ и конечного числа полюсов, удовлетворяющих некоторому спектральному уравнению $\Delta(\lambda)=0$ (см. ниже (5.11)).

Для построения аналитического продолжения $W(\eta, \lambda)$ в область (5.4) исключим из системы (5.2) функции P_1, V_1, S_1 с помощью формул

$$(5.5) \quad S_1 = \frac{l_1}{1+\lambda} \eta^{-h(\lambda)} e^{-(1+\lambda)\tau_0} + \eta^{-h(\lambda)} \int_1^\eta \xi^{h(\lambda)-1} (-2\Omega S_0(\xi) + S_1^\circ(\xi)) d\xi,$$

$$k(\lambda) = 2\lambda\omega_0 + 2\omega_0 + \gamma - 1$$

$$P_1(\eta, \lambda) = r_0^{-\gamma} S_1 - a(\eta) r_1, \quad V_1(\eta, \lambda) = \frac{l_0}{1+\lambda} e^{-(1+\lambda)\tau_0} -$$

$$- \int_1^\eta ((2\lambda\omega_0 + 1)r_1(\xi, \lambda) + \xi r_1'(\xi, \lambda) - r_1^\circ(\xi) e^{-\lambda\tau_0}) d\xi$$

которые получаются интегрированием уравнений (5.2) с учетом граничных условий (5.3).

В результате преобразований (5.5) система уравнений (5.2) сведется к одному дифференциальному уравнению второго порядка для неизвестных $r_1(\eta, \lambda), \Omega(\lambda)$

$$(5.6) \quad L_\lambda r_1 = (a(\eta) - \eta^2) r_1'' + [2a' - \eta(4\lambda\omega_0 + 3 + \omega_0)] r_1' +$$

$$+ [a'' - (2\lambda\omega_0 + 1)(2\lambda\omega_0 + \omega_0 + 1)] r_1 = A(\eta, \lambda) \Omega(\lambda) + B(\eta, \lambda)$$

(где штрих обозначает дифференцирование по η)

$$A(\eta, \lambda) = -\frac{dV_0}{d\eta} + 2 \frac{d^2}{d\eta^2} \left[\int_1^\eta \eta^{-h(\lambda)} \xi^{h(\lambda)-1} S_0(\xi) d\xi R_0^\gamma(\eta) \right]$$

$$B(\eta, \lambda) = e^{-\lambda\tau_0} \left\{ \frac{dV_1^\circ}{d\eta} - \eta \frac{dr_1^\circ}{d\eta} - (2\lambda\omega_0 + \omega_0 + 1) r_1^\circ + \right.$$

$$\left. + \frac{d^2}{d\eta^2} \left[R_0^\gamma(\eta) \eta^{-h(\lambda)} \int_1^\eta \xi^{h(\lambda)-1} S_1^\circ(\xi) d\xi + \frac{l_1 e^{-\tau_0}}{1+\lambda} \eta^{-h(\lambda)} R_0^\gamma \right] \right\}$$

При $\eta=1$ функции $r_1(\eta, \lambda)$ и $\Omega(\lambda)$ связаны соотношениями

$$(5.7) \quad \eta=1, \quad r_1 = l_1 e^{-(1+\lambda)\tau_0} (1+\lambda)^{-1},$$

$$r_1' = -6(\gamma-1)(\gamma+1)^{-2} \Omega(\lambda) + (\kappa_p A_p + \kappa_g A_g) (1+\lambda)^{-1} e^{-(1+\lambda)\tau_0} + \psi(\lambda)$$

$$\kappa_g = -(\gamma-1)(\gamma+1)^{-1}, \quad \kappa_p = (\gamma+1)^{-2} \{ 2\gamma(\gamma-1)(4\omega_0\lambda + \omega_0 + 1) +$$

$$+ (3\gamma-1)(6\omega_0 + \gamma - 1)\gamma - 16\gamma^2 - (\gamma+1)(3\gamma-1)(2\omega_0\lambda + 2\omega_0 + \gamma - 1) \}$$

где l_1 задается по формуле (5.3), $\psi(\lambda)$ — регулярная функция λ , зависящая от начальных данных (4.3).

Применением результатов [12, 13] доказывается, что однородное уравнение, соответствующее (5.6), имеет в области $\text{Re } \lambda < -\sigma_1$ два линейно-независимых решения ($E(\eta, \lambda)$ и $N(\eta, \lambda)$), аналитически зависящих от параметра λ , и таких, что

$$(5.8) \quad \lim_{\eta \rightarrow \eta_0} E(\eta, \lambda) = c_1(\lambda), \quad \lim_{\eta \rightarrow \eta_0} N(\eta, \lambda) (\eta - \eta_0)^\delta = c(\lambda)$$

$$\delta = 1 + \eta_0 a_1^{-1}(\eta_0) (4\lambda\omega_0 - 1 + \omega_0) = 4\omega_0 \eta_0 (\lambda - \sigma_0) / a_1(\eta_0)$$

$$\sigma_0 = (1 - \omega_0 - a_1(\eta_0) \eta_0^{-1})^4 \omega_0^{-1}$$

Таким образом, функция $E(\eta, \lambda)$ регулярна при $\eta \rightarrow \eta_0$, а функция $N(\eta, \lambda)$ имеет особенность порядка $(\eta - \eta_0)^{-\delta}$ при $\eta \rightarrow \eta_0$.

Решения $E(\eta, \lambda)$ и $N(\eta, \lambda)$ аналитически продолжаются в область $-\sigma_1 < \text{Re } \lambda < \sigma_0$. При $|\lambda| \rightarrow \infty, -\sigma_1 < \text{Re } \lambda < \sigma_0, 0 < c_0 \leq \eta \leq 1$ функции E, N удовлетворяют оценкам:

$$k_1 + O(\lambda^{-1}) \leq |E|, |N| \leq k_2 + O(\lambda^{-1})$$

где k_1, k_2 — отличные от нуля постоянные, зависящие от γ и константы c_0 .

Обозначим через $R_A(\eta, \lambda)$ и $R_B(\eta, \lambda)$ частные решения уравнений $L_\lambda r = A$, $L_\lambda r = B$, регулярные при $\eta \rightarrow \eta_0$ (см. более подробно [11]). Запишем искомое решение спектральной задачи (5.6), (5.7) в виде

$$(5.9) \quad r_1(\eta, \lambda) = C(\lambda)E(\eta, \lambda) + \Omega(\lambda)R_A(\eta, \lambda) + R_B(\eta, \lambda)$$

В (5.9) $C(\lambda)$ — свободный параметр, $\Omega(\lambda)$ — искомая параметрическая функция. Параметры C , Ω подберем так, чтобы удовлетворить крайевым условиям (5.7)

$$(5.10) \quad C(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[\frac{l_r e^{-(1+\lambda)\tau_0}}{1+\lambda} - R_B(1, \lambda) \left(R_A'(1, \lambda) - \frac{6(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \right) - R_A(1, \lambda) \left(\frac{\kappa_p A_p + \kappa_g A_g}{1+\lambda} e^{-(1+\lambda)\tau_0 + \psi(\lambda)} \right) \right]$$

$$\Omega(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[E(1, \lambda) \left(\frac{\kappa_p A_p + \kappa_g A_g}{1+\lambda} e^{-(1+\lambda)\tau_0 + \psi(\lambda)} \right) - E'(1, \lambda) \left(\frac{l_r e^{-(1+\lambda)\tau_0}}{1+\lambda} - R_B(1, \lambda) \right) \right]$$

$$(5.11) \quad \Delta(\lambda) = E(1, \lambda) (R_A'(1, \lambda) + 6(\gamma-1)(\gamma+1)^{-2}) - E'(1, \lambda) R_A(1, \lambda)$$

где $\Delta(\lambda)$ — определитель системы уравнений для искомых C и Ω .

Подставляя полученные выражения $C(\lambda)$ и $\Omega(\lambda)$ в (5.9), найдем функцию $r_1(\eta, \lambda)$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — нули определителя $\Delta(\lambda)$. Из (5.9), (5.10) следует, что $r_1(\eta, \lambda)$ регулярно зависит от параметра λ в области $\lambda \neq -1$, $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, \dots$. Оказывается, что функция $\Delta(\lambda)$ может иметь в полосе $-\sigma_1 \leq \text{Re } \lambda < \sigma_0$ лишь конечное число нулей (нули не могут сгущаться на бесконечности).

Применяя формулу обращения преобразования Лапласа к функциям $\Omega(\lambda)$ и $r_1(\eta, \lambda)$, найдем нестационарное возмущение $W_1(\eta, \tau)$.

Оценки $\Omega(\lambda)$ и $r_1(\eta, \lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ позволяют применить теорему о вычетах при обращении преобразования Лапласа (см., например, [12])

$$(5.12) \quad \omega_1(\tau) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma_1 - i\infty}^{-\sigma_1 + i\infty} e^{\lambda\tau} \Omega(\lambda) d\lambda =$$

$$= \omega_{-1} e^{-\tau} + \sum_{j=1}^N (\omega_{j0} + \tau \omega_{j1} + \dots + \tau^{m_j-1} \omega_{jm_j-1}) e^{\lambda_j(\tau-\tau_0)} + \omega_*(\tau)$$

$$r_1(\eta, \tau) = r_{-1}(\eta) e^{-\tau} + \sum_{j=1}^N (r_{j0}(\eta) + \dots + \tau^{m_j-1} r_{jm_j-1}(\eta)) e^{\lambda_j(\tau-\tau_0)} + r_*(\eta, \tau)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ — корни $\Delta(\lambda)$ в области $-\sigma_1 < \text{Re } \lambda < \sigma_0 - \delta$, m_j — кратность корня λ_j , δ — сколь угодно малое число

$$(5.13) \quad \omega_{-1} = \lim_{\lambda \rightarrow -1} (1+\lambda) \Omega(\lambda), \quad \omega_{jk} = \frac{1}{k!(m_j-1-k)!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_j} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{m_j-1-k} [\Omega(\lambda) (\lambda - \lambda_j)^{m_j}]$$

Величины r_{-1} , r_{jk} находятся по формулам (5.13) с заменой $\Omega(\lambda)$ на $r_1(\eta, \lambda)$; $\Omega(\lambda)$, $r_1(\eta, \lambda)$ определяются формулами (5.9) — (5.11). Остаточные члены ω_* , r_* экспоненциально убывают при $\tau \rightarrow -\infty$.

Учитывая зависимость величины $\omega_1(\tau)$ от координаты $\varphi(t)$ и формулы (2.1) для времени, получим из (5.12) асимптотический закон распро-

странения затухающей волны $x=\varphi(t)$

$$(5.14) \quad \ddot{\varphi}(t)/\dot{\varphi}^2(t) = \omega_0 + \omega_{-1}\dot{\varphi}^{-2}(t) + \sum_{k=1}^N \omega_{(k)}\dot{\varphi}^{2k}(t)\dot{\varphi}^{-2k}(0) + \dots$$

$$\omega_{(k)}(t) = \omega_{k0} + \omega_{k1} \ln \dot{\varphi}^2 + \dots + \omega_{km_{k-1}} (\ln \dot{\varphi}^2)^{m_{k-1}}$$

Первое слагаемое в правой части (5.14) соответствует автомодельному решению [1]. Пренебрегая остальными величинами, получим автомодельное распространение затухающей волны

$$\ddot{\varphi}(t)/\dot{\varphi}^2(t) = \omega_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \varphi_1$$

где φ_0, φ_1 — координата и скорость затухающей волны в начальный момент времени $t=0$, $\omega_0 = \alpha^{-1}$ (α — показатель автомодельности).

Слагаемое $\omega_{-1}\dot{\varphi}^{-2}(t)$ в (5.14) показывает влияние противодействия и земного притяжения на распространение затухающей волны при условии $A_p\dot{\varphi}^{-2} < 1, A_g\dot{\varphi}^{-2} < 1$. Величины $\omega_{(k)}\dot{\varphi}^{2k}(t)\dot{\varphi}^{-2k}(0)$ характеризуют скорость выхода затухающей волны на автомодельный режим при $A_p = A_g = 0$.

Асимптотику плотности, скорости, энтропии и давления в окрестности затухающей волны получим, используя обращение преобразования Лапласа и (5.5)

$$(5.15) \quad \rho^{-1}(\eta, t) = (\rho_0^{-1}(\eta) + r_1(\eta, t)) e^{\varphi(t)}$$

$$S(\eta, t) = \dot{\varphi}^2 e^{-(1-\gamma)\varphi} (S_0(\eta) + S_1(\eta, t))$$

$$P(\eta, t) = \dot{\varphi}^2 e^{-\varphi} (P_0(\eta) + P_1(\eta, t))$$

$$u(\eta, t) = \dot{\varphi} (V_0(\eta) + V_1(\eta, t))$$

Здесь величины $S_1(\eta, t), P_1(\eta, t), V_1(\eta, t)$ имеют разложения, аналогичные (5.12). Величина $\varphi^{-1}(t)$ определяется из дифференциального уравнения (5.14) при начальных условиях $\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \varphi_1$ (положение и скорость затухающей волны в начальный момент времени предполагаются заданными).

6. Когда показатель адиабаты $\gamma=2$, асимптотические разложения (5.12), (5.14) упрощаются. Автомодельное решение W_0 известно в явном виде [1]

$$(6.1) \quad \gamma=2, \quad r_0(\eta) = 1/3\eta^{-5/3}, \quad V_0(\eta) = 1 - 1/3\eta^{-2/3}, \quad P_0(\eta) = 2\eta/3$$

$$\omega_0 = 2/3, \quad R_0(\eta) = 1/r_0 = 3\eta^{5/3}, \quad S_0 = 2\eta^{-2/3}/27$$

Из (4.5) находим координату η_0 точки поворота характеристик

$$(6.2) \quad a(\eta) - \eta^2 = 4\eta^{5/3} - \eta^2 = 0, \quad \eta_0 = 1/8$$

Фундаментальная система решений E, N однородного уравнения $L_\lambda r = 0$ выражается через гипергеометрические функции. Так, регулярное при $\eta \rightarrow \eta_0$ решение $E(\eta, \lambda)$ имеет вид

$$(6.3) \quad E(\eta, \lambda) = \eta^{-5/3} F(-2\lambda+1, -2\lambda, -4\lambda+5/2; 1-4^{-1}\eta^{-2/3})$$

где $F(a, b, c; z)$ обозначает гипергеометрическую функцию [14]. Функция $E(\eta, \lambda)$ регулярно зависит от параметра λ в области $\text{Re } \lambda < 5/8$ и аналитически продолжается во всю λ -плоскость как мероморфная функция λ с полюсами первого порядка при $\lambda = 5/8 + n/4, n=0, 1, 2, \dots$

Нерегулярное при $\eta \rightarrow \eta_0$ решение $N(\eta, \lambda)$ однородного уравнения представляется в виде

$$(6.4) \quad N(\eta, \lambda) = \begin{cases} N^+(\eta, \lambda), & \eta_0 < \eta \leq 1 \\ N^-(\eta, \lambda), & 0 < \eta < \eta_0 \end{cases}$$

$$(6.5) \quad \begin{aligned} N^+(\eta, \lambda) &= \eta^{-(8\lambda+5)/3} (1-4\eta^{2/3})^{4\lambda-3/2} F(2\lambda, 2\lambda+1, 5/2; 4^{-1}\eta^{-2/3}) \\ N^-(\eta, \lambda) &= \eta^{-(4\lambda+3)/3} (1-4\eta^{2/3})^{4\lambda-3/2} F(1+2\lambda, -1/2, +2\lambda, 2; 4\eta^{2/3}) \end{aligned}$$

Формулы (6.4), (6.5) справедливы в области $\text{Re } \lambda < 3/8 = \sigma_0$.

В рассматриваемом случае частные решения R_A и R_B удается представить следующим образом (вычисления опускаем)

$$(6.6) \quad \begin{aligned} R_A &= -\frac{1}{4\lambda} \eta^{-(4\lambda+5)/3} + \frac{1}{4\lambda(2\lambda-1)} \eta^{-5/4} \\ R_B &= \frac{5}{4} A_p \eta^{-(4\lambda+5)/3} \frac{e^{-(1+\lambda)\tau_0}}{1+\lambda} + R_F(\eta, \lambda) \end{aligned}$$

где $R_F(\eta, \lambda)$ — регулярное при $\eta \rightarrow \eta_0$, $\lambda \rightarrow -1$ частное решение уравнения $L_{\lambda r} = F$.

Определитель $\Delta(\lambda)$ (ср. (5.11)) системы уравнений для искомых $C(\lambda)$ и $\Omega(\lambda)$ в (5.9) выражается в виде

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= p(\lambda)F(\lambda) + p_1(\lambda)F_1(\lambda), \quad p_1(\lambda) = 9(1-\lambda)/(2(2\lambda-1)), \\ p(\lambda) &= 1 - p_1(\lambda), \quad F(\lambda) = F(-2\lambda+1, -2\lambda, -4\lambda+5/2; 3/4), \\ F_1(\lambda) &= F(-2\lambda+1, -2\lambda+1, -4\lambda+5/2; 3/4) \end{aligned}$$

Расположение корней спектрального уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ исследовалось с помощью принципа аргумента на ЭВМ. Варьируя расположение замкнутого контура на λ -плоскости и вычисляя приращение аргумента $\Delta(\lambda)$ на этом контуре, установлено, что в полуплоскости $-\infty < \text{Re } \lambda < 3/8$ уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ не имеет корней. Отсюда следует устойчивость автомодельного решения [1] при $\gamma = 2$ в случае $A_p = A_g = 0$, а также экспоненциальная скорость затухания возмущений при $\tau \rightarrow -\infty$ ($\tau = \ln \varphi^2$).

Приведем закон распространения затухающей волны и разложение функции $\rho^{-1}(\eta, t)$ в случае $\gamma = 2$

$$(6.7) \quad \ddot{\varphi}(t)/\dot{\varphi}^2(t) = 2/3 + \omega_{-1}/\dot{\varphi}^2(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j [\dot{\varphi}^2(t)/\dot{\varphi}^2(0)]^{\lambda_j}$$

Здесь ω_{-1} определяется формулой (5.13)

$$(6.8) \quad \omega_k = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_k} (\lambda - \lambda_k) \Omega(\lambda), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\rho^{-1}(\eta, t) = e^{\varphi} \left\{ \rho_0^{-1}(\eta) + r_{-1}(\eta)/\dot{\varphi}^2(t) + \sum_{j=1}^{\infty} r_j(\eta) [\dot{\varphi}^2(t)/\dot{\varphi}^2(0)]^{\lambda_j} \right\}$$

где $r_j(\eta)$ определяется формулами

$$r_j(\eta) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_j} (\lambda - \lambda_j) r_1(\eta, \lambda), \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

(см. (5.9), (5.10)).

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ — корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, ($\lambda_1 = 0.375$, $\lambda_2 = 0.5$, $\lambda_3 = 0.71$, $\lambda_4 = 0.75 \dots$), найденные приближенно численным методом. Разложения остальных газодинамических функций определяются из (5.15) и имеют аналогичный вид.

Рассмотрим влияние противодействия и земного притяжения на автомодельное распространение затухающей волны в экспоненциальной атмосфере. Возмущение по противодействию около автомодельного решения [1] для $\gamma = 2$ рассматривалось ранее в [4]. Учитывалась при этом лишь переменность плотности атмосферы, а атмосферное давление пред-

полагалось постоянным по пространственной координате. Для построения возмущений применялся метод, изложенный в монографии [5]. В настоящей работе возмущение по противодействию (а также и по эффекту земного тяготения) получается как частный случай в разложениях (5.12), (5.15) (вычет решения спектральной задачи в полюсе $\lambda = -1$).

Используя формулы (5.13), (5.9), (5.10), находим (см. (5.7))

$$(6.9) \quad r_{-1}(\eta) = \frac{1}{\Delta(-1)} \left[l_r \left(R_A'(1, -1) + \frac{2}{3} \right) - \psi_r(-1) R_A(1, -1) \right] \times \\ \times E(\eta, -1) + \frac{1}{\Delta(-1)} [\psi_r(-1) E(1, -1) - l_r E'(1, -1)] R_A(\eta, -1) + \frac{5}{4} A_p \eta^{-1/2}$$

Величины в правой части (6.9) находятся из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \psi_r(-1) &= \kappa_p A_p + \kappa_g A_g = -A_p 35 / 27 - A_g / 3 \\ l_r &= 4/3 A_p, \quad R_A(\eta, -1) = \eta^{-1/2} / 4 + \eta^{-5/2} / 12, \quad R_A(1, -1) = 1/3 \\ R_A'(1, -1) &= -2/3, \quad E(\eta, -1) = \eta^{-3/2} F(3, 2, 1^{3/2}; 1 - 4^{-1} \eta^{-2}), \\ E'(1, -1) &= (-5/3) E(1, -1) + (1/6) F'(3, 2, 1^{3/2}; 3/4) \\ \Delta(-1) &= 4/9 E(1, -1) - 1/3 E'(1, -1) \end{aligned}$$

Найдем влияние противодействия и земного притяжения на асимптотику энтальпии, давления, скорости. Воспользуемся (5.5). Обозначим через $S_{-1}(\eta)$, $P_{-1}(\eta)$, $V_{-1}(\eta)$ вычеты функций $S_1(\eta, \lambda)$, $P_1(\eta, \lambda)$, $V_1(\eta, \lambda)$ в полюсе $\lambda = -1$. Имеем

$$S_{-1}(\eta) = \lim_{\lambda \rightarrow -1} (1 + \lambda) S_1(\eta, \lambda) = l_s \eta^{-1/2} = \eta^{-1/2} 5 A_p / 9$$

$$P_{-1}(\eta) = 5 A_p \eta^3 - a(\eta) r_{-1}(\eta),$$

$$V_{-1}(\eta) = l_v - \eta r_{-1}(\eta) + r_{-1}(1) + \int_1^\eta r_{-1}(\xi) d\xi^{4/3}$$

Приведем асимптотический закон распространения затухающей волны с учетом эффектов противодействия и земного притяжения

$$(6.10) \quad \ddot{\phi}(t) / \dot{\phi}^2(t) = 2/3 + \omega_{-1} / \dot{\phi}^2(t) + \dots$$

(многоточием обозначены остальные слагаемые в (6.7)).

Заметим, что аналогичный закон получен в [4] (см. (3) в [4])

$$(6.11) \quad M dq/dM = \sigma q + \tau q^2 + \dots$$

где q — возмущение по противодействию p_1 $q = a_1^2 / c^2$, a_1 — скорость звука перед волной, c — скорость волны, $\sigma = -1 + 2/a$, M — лагранжева координата волны, величина τ аналогична ω_{-1} (6.10) и подлежит определению. Сопоставляя обозначения [4] с обозначениями настоящей работы, находим

$$M = e^{-\varphi(t)}, \quad a_1^2 / p_1 = e^\varphi, \quad c = \dot{\varphi}, \quad q / p_1 = e^\varphi / \dot{\varphi}^2$$

Преобразуя (6.11) в данных обозначениях, получим (ср. (6.10))

$$\ddot{\varphi} / \dot{\varphi}^2 = 2/3 + \tau p_1 e^\varphi / (2 \dot{\varphi}^2) + \dots$$

(В [4] $p_1 = \text{const}$, в настоящей работе $p_1 = e^{-\varphi}$.)

Величина τ в [4] осталась неопределенной. По-видимому, неопределенность величины τ объясняется отсутствием гладкости построенного возмущения в точке $\eta_0 = 1/8$. Отметим, что величина ω_{-1} , аналогичная τ , однозначно определяется в настоящей работе требованием регулярности решения спектральной задачи в точке η_0 .

В заключение автор благодарит Л. А. Чудова за замечания, Э. И. Андрианкина и В. Б. Лидского за содержательное обсуждение, Ю. В. Корovina за помощь в вычислениях на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Райзер Ю. П. Движение в неоднородной атмосфере, вызванное кратковременным плоским ударом. Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 3.
2. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б. Промежуточные асимптотики в математической физике. Усп. матем. н., 1971, т. 26, № 2, стр. 115—129.
3. Кестенбойм Х. С., Кузина З. Н. Распространение плоских ударных волн в экспоненциальной атмосфере. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5, стр. 31—35.
4. Солдатов Г. П. О влиянии противодействия на движение в неоднородной атмосфере, вызванное кратковременным плоским ударом. Изв. вузов, Математика, 1968, № 8.
5. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961.
6. Марков А. А. Об исследовании устойчивости некоторых автомодельных решений теории взрыва в атмосфере. Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 1, стр. 47—50.
7. Карликов В. П. Линеаризованная задача о распространении сильного взрыва в неоднородной атмосфере. Вестн. МГУ, Сер. матем. и механ., 1959, № 4, стр. 27—39.
8. Андрианкин Э. И., Коган А. М., Компанеев А. С., Крайнов В. П. Распространение сильной ударной волны в неоднородной атмосфере. ПИМТФ, 1962, № 6.
9. Лаумбах Д. Д., Пробстин Р. Ф. Точечный взрыв в холодной экспоненциальной атмосфере. Механика. Сб. обз. и перев. ин. период. лит., 1969, № 3, стр. 95—115.
10. Седов Л. И. Методы подобия и размерностей в механике, Изд. 6. М., Физматгиз, 1967.
11. Марков А. А. О близких к автомодельным решениях задачи плоского взрыва в экспоненциальной атмосфере. М., ИПМ АН СССР, Препринт № 19, 1972.
12. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1969.
13. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М., «Мир», 1965.
14. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Справочная математическая библиотека. М., «Наука», 1965.