МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1974

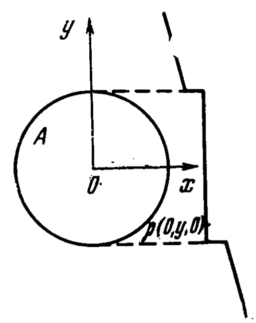
УДК 532.517.4

РАЗВИТИЕ ОБЛАСТИ ТУРБУЛИЗОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ [1]

О. Ф. ВАСИЛЬЕВ, Б. Г. КУЗНЕЦОВ, Ю. М. ЛЫТКИН, Г. Г. ЧЕРНЫХ

(Новосибирск)

Рассматривается плоская нестационарная задача о развитии области турбулентных возмущений в несжимаемой стратифицированной жидкости. В начальный момент времени внутри области конечных размеров задается энергия турбулентности. Предложена полуэмпирическая система уравнений, описывающая этот процесс. Приведены данные численных расчетов, иллюстрирующие первоначальное расширение области в результате турбулентной диффузии, ее последующее сжатие по вертикали («коллапс») под действием сил плавучести и генерируемые коллапсом внутренние волны.



Фиг. 1

1. В последние годы рядом авторов рассматривалась плоская нестационарная задача о течении, возникающем в результате коллапса области жидкости постоянной плотности, окруженной слабо стратифицированной жидкостью (фиг. 1), причем предполагалось, что плотность в заданной области стала одинаковой в результате перемешивания стратифицированной жидкости в пределах этой области. Экспериментально такая задача была детально изучена в [1]. В [2] выполнен численный анализ явления, основанный на системе уравнений стратифицированного течения (в приближении Буссинеска). Результаты расчетов, и в частности картина возникающих при коллапсе внутренних волн, оказались в удовлетворительном соответствии с экспериментальными данными [1]. В [3] численно и аналитически исследовано течение внутри области перемешанной жидкости и деформация ее границы, причем предполагалось, что на этой границе давление распределено по гидростатическому закону. Аналитическое исследование явления, основанное на линеаризованных уравнениях идеальной стратифицированной жидкости, выполнено также в [4–6]. В [7] рассмотрены внутренние волны, возникающие в результате коллапса области неоднородной жидкости со стратификацией, отличной от стратификации окружающей жидкости.

Во всех перечисленных работах предполагалось, что движение в стратифицированной жидкости возникает лишь вследствие нарушения некоторого имевшегося ранее распределения плотности. В данной работе учитывается также начальная интенсивность турбулентных возмущений в области смешения. В связи с этим в исходный момент времени $t=0$ внутри области перемешанной жидкости задается также кинетическая энергия турбулентности. Если эта энергия достаточно велика, то вначале вследствие турбулентной диффузии будет происходить расширение области как по вертикали, так и по горизонтали, и лишь через некоторый промежуток времени начнется сжатие области по вертикали, т. е. собственно коллапс. Качественное экспериментальное исследование такого процесса выполнено в [8].

2. Предположим, что турбулентность в области смешения является бессдвиговой — касательные турбулентные напряжения отсутствуют. Будем полагать также, что осредненное конвективное течение, индуцируемое силами плавучести, представляет собой движение типа внутренних волн и не порождает турбулентности. В осредненных уравнениях движения пренебрежем за малостью членами, нелинейными по горизонтальной и верти-

[1] Работа доложена на Международном симпозиуме по стратифицированным течениям (Новосибирск, 29—31 августа 1972 г.).

кальной компонентам осредненной скорости $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$, а также членами с молекулярной вязкостью.

Введем следующие гипотезы:

$$-\left\langle u'\left(\frac{u'^2+v'^2+w'^2}{2}+\frac{p'}{\rho_0}\right)\right\rangle=K_x\frac{\partial e}{\partial x}$$

$$-\left\langle v'\left(\frac{u'^2+v'^2+w'^2}{2}+\frac{p'}{\rho_0}\right)\right\rangle=K_y\frac{\partial e}{\partial y}$$

$$-\langle\rho'u'\rangle=K_x\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x}=K_x\frac{\partial\langle\rho_1\rangle}{\partial x},$$

$$-\langle\rho'v'\rangle=K_y\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial y}=K_y\left(\frac{\partial\langle\rho_1\rangle}{\partial y}+\frac{d\rho_s}{dy}\right)$$

и положим также

$$\langle u'^2\rangle=\langle v'^2\rangle=\langle w'^2\rangle=2/3e,\quad e=\langle u'^2+v'^2+w'^2\rangle/2.$$

Здесь $\rho_s=\rho_s(y)$ — плотность невозмущенной среды вне области смешения, $\rho_1=\rho-\rho_s$ — дефицит плотности среды; ρ', u', w', v', p' — турбулентные флуктуации плотности, горизонтальных и вертикальной компонент скорости и давления; K_x, K_y — горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентной диффузии. Будем считать, что стратификация невозмущенной жидкости вне области смешения является линейной и устойчивой, т. е. $d\rho_s/dy=-a\rho_0$, где $a=\text{const}>0$, $\rho_0=\rho_s(0)$.

С учетом этих допущений осредненные уравнения движения, несжимаемости, неразрывности и уравнение энергии турбулентности, записанные в приближении Буссинеска, будут иметь вид (знак осреднения опущен)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_1}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial e}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_1}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial e}{\partial y}-g\frac{\rho_1}{\rho_0}\tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\tag{2.2}$$

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+u\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+v\frac{\partial\rho_1}{\partial y}-av\rho_0=\frac{\partial}{\partial x}K_x\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}K_y\frac{\partial\rho_1}{\partial y}-a\rho_0\frac{\partial K_y}{\partial y}\tag{2.3}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t}+u\frac{\partial e}{\partial x}+v\frac{\partial e}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}K_x\frac{\partial e}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}K_y\frac{\partial e}{\partial y}+g\frac{K_y}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial y}-a\rho_0\right)-\varepsilon\tag{2.4}$$

Здесь p_1 — отклонение давления от гидростатического, обусловленного стратификацией по плотности $\rho_s(y)$; g — ускорение силы тяжести; ε — скорость диссипации энергии турбулентности в тепло.

Введением функции тока по формулам $u=\partial\psi/\partial y$, $v=-\partial\psi/\partial x$ система уравнений (2.1), (2.2) преобразуется в одно уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)=\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial\rho_1}{\partial x}\tag{2.5}$$

Граничные и начальные условия для системы (2.3) — (2.5) следующие:

$$\rho_1=\psi=e=0\quad(x^2+y^2\to\infty)\tag{2.6}$$

$$\rho=\rho_0,\quad e=e_0=\text{const}\quad(x,y\subset A,t=0)\tag{2.7}$$

$$\rho=\rho_s,\quad e=0\quad(x,y\not\subset A,t=0)\tag{2.8}$$

$$\psi=0\quad(-\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty,\ t=0)\tag{2.9}$$

Здесь A — область конечных размеров, граница которой предполагается симметричной относительно осей x и y.

Коэффициенты турбулентной диффузии K_x, K_y и скорость диссипации ε представим в форме

$$(2.10)\qquad K_x=\varkappa\sqrt{e}L_x,\quad K_y=\varkappa\sqrt{e}L_y,\quad \varepsilon=\alpha(K_xeL_x^{-2}+K_yeL_y^{-2})/2$$

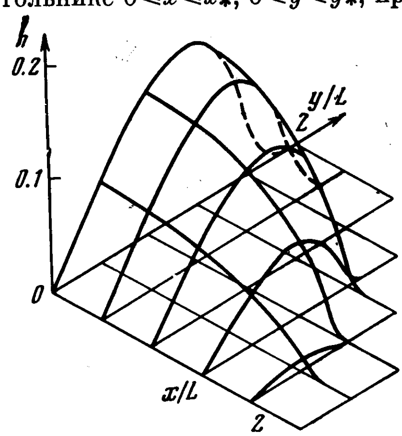
$$(2.11)\qquad e(L_x,\,0,\,t)=e_m/2,\ e(0,\,L_y,\,t)=e_m/2,\ e_m=e(0,\,0,\,t)$$

Равенства (2.11) служат для определения масштабов длины L_x, L_y.

Система уравнений (2.3)—(2.5) с указанными граничными и начальными условиями была решена численно методом дробных шагов [9]. При этом из соображений симметрии вычисления выполнялись лишь в первом квадранте плоскости xy с использованием граничных условий

$$(2.12)\qquad \psi=\partial\rho_1/\partial x=\partial e/\partial x=0\ \ (x=0,\,y\geqslant0);\quad \psi=\rho_1=\partial e/\partial y=0\ \ (x\geqslant0,\,y=0)$$

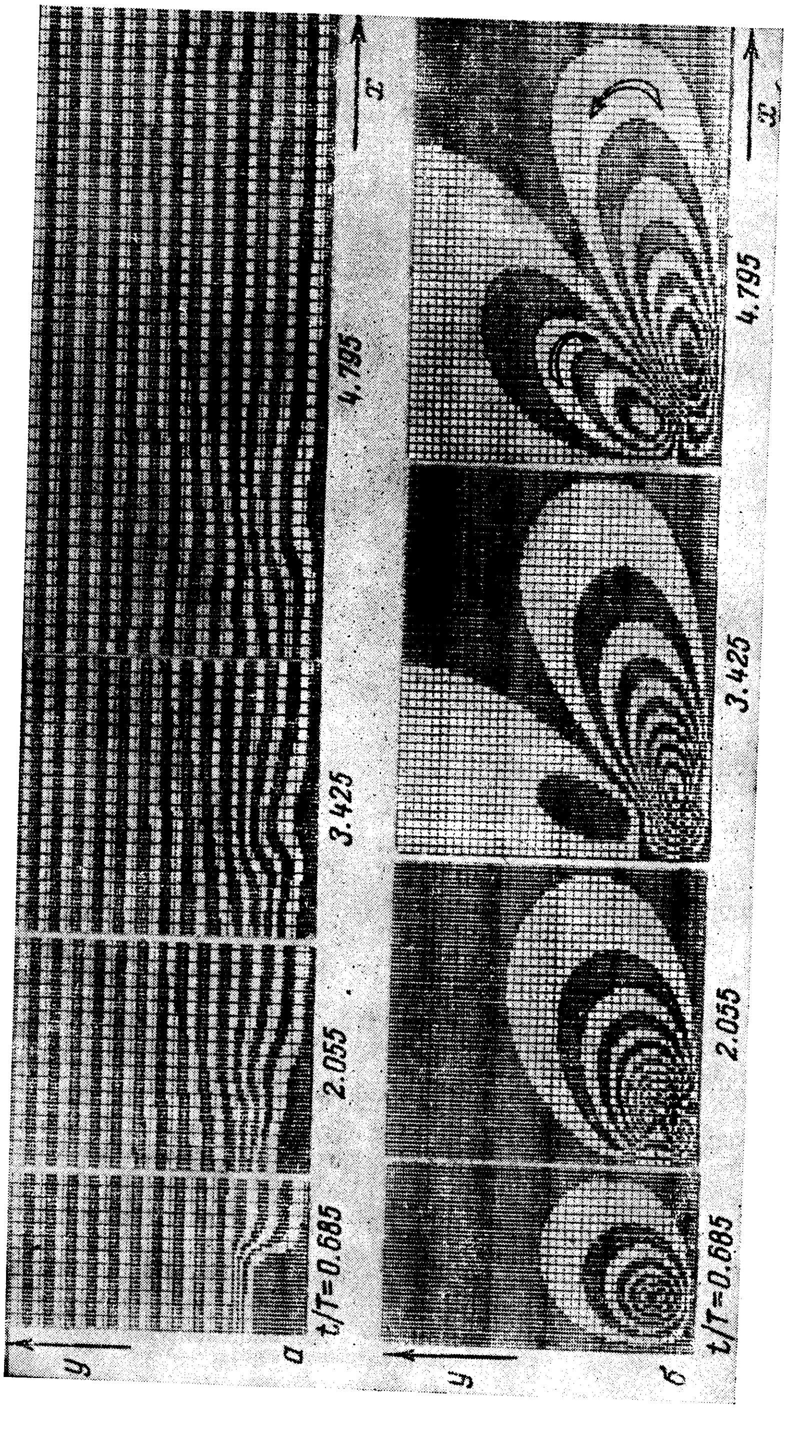
Вместо области A теперь фигурирует ее часть A_1 в первом квадранте. Численные расчеты проводились в прямоугольнике $0\leqslant x\leqslant x_*$, $0\leqslant y\leqslant y_*$, при этом граничные условия (2.6) из бесконечности сносились на границы прямоугольника $x=x_*$, $y=y_*$. Прямоугольник выбирался достаточно большим, чтобы значения функции тока, энергии турбулентности и дефицита плотности в окрестности границы прямоугольника в течение рассматриваемого интервала времени были близки к нулю.



Фиг. 2

Коэффициенты $\varkappa$ и α в (2.10) для K_x, K_y, ε брались равными 0.16 и 7.8 из следующих соображений. В случае однородной по плотности жидкости, когда $a=\rho_1=0$, конвективное течение отсутствует в силу граничного и начального условий (2.6), (2.9) и уравнение энергии турбулентности (2.4) аналогично уравнению, описывающему развитие безымпульсного турбулентного следа в однородной жидкости на достаточно больших расстояниях от тела [10]. Поэтому постоянные $\varkappa$ и α были выбраны такими, чтобы автомодельное решение уравнения энергии турбулентности $e=e_mf(r/L)$ в случае однородной жидкости удовлетворительно согласовывалось с экспериментальными данными [10] (здесь $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $L=L_x=L_y$). Это решение было найдено из анализа численного решения уравнения энергии турбулентности при достаточно больших значениях t.

Представляет интерес процесс турбулентной диффузии плотности (температуры, солености) в пассивно-стратифицированной жидкости, когда $u=v=g=0$ и уравнение (2.3) имеет автомодельное решение $\rho_1=\rho_0aLh(x/L,\,y/L)$, описывающее трансформацию профиля плотности, вызванную точечным источником турбулентности. Функция $h(x/L,\,y/L)$ была определена в результате численного решения системы уравнений (2.3), (2.4) при сделанном предположении ($u=v=g=0$) и изображена на фиг. 2. Из этой фигуры видно, что турбулентная диффузия приводит к неполному перемешиванию жидкости: в турбулизованной области среда остается неоднородной, но со стратификацией, отличной от $\rho_s(y)$.

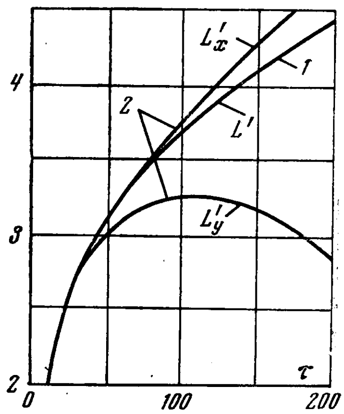


Фиг. 3

3. Алгоритм решения задачи заключается в выполнении следующих четырех циклов: отыскания $\partial\psi(x, y, t)/\partial t$ в узлах разностной сетки из уравнения (2.5), определения $\psi(x, y, t+\Delta t)$ в узлах сетки по найденным значениям функции $\partial\psi/\partial t$, решения уравнения энергии турбулентности (2.4), решения уравнения неразрывности (2.3). Для отыскания функции $\partial\psi/\partial t$ использовалась итерационная схема стабилизирующей поправки [9], аппроксимирующая уравнение (2.5) со вторым порядком по переменным x, y, являющаяся абсолютно сходящейся и обладающая свойством полной аппроксимации.

Уравнения энергии турбулентности (2.4) и неразрывности (2.3) решались с помощью схемы расщепления [9], аппроксимирующей данные уравнения с первым порядком по времени и вторым по пространственным переменным, причем при интегрировании уравнения энергии турбулентности значение энергии в величинах K_x, K_y бралось с предыдущего временного слоя. Устойчивость и сходимость алгоритма решения задачи (2.3) — (2.5) с соответствующими граничными и начальными условиями (2.6) — (2.9) проверялись экспериментально в ходе расчетов.

4. При отсутствии турбулентных возмущений, когда $e\equiv0$, поставленная задача аналогична изучавшейся в [1-6]. Выполненные для этого случая расчеты проводились на квадратной разностной сетке с числом ячеек 59×38; область A_1 представляла собой квадрат размером 6×6 ячеек. На фиг. 3, *а* изображены линии равной плотности $(\rho_0-\rho)/aL_0\rho_0=\text{const}$ с интервалом 0.167. На этой фигуре и ниже изолиниям соответствуют границы между заштрихованными и незаштрихованными областями, L_0 — характерный размер (ширина) области смешения A_1 в начальный момент времени, $T=1/\sqrt{ag}$ — период Вяйсяля — Брента. Приведенная на фиг. 3, *а* картина внутренних волн, индуцируемых коллапсом, аналогична полученной в [1, 2].



Фиг. 4

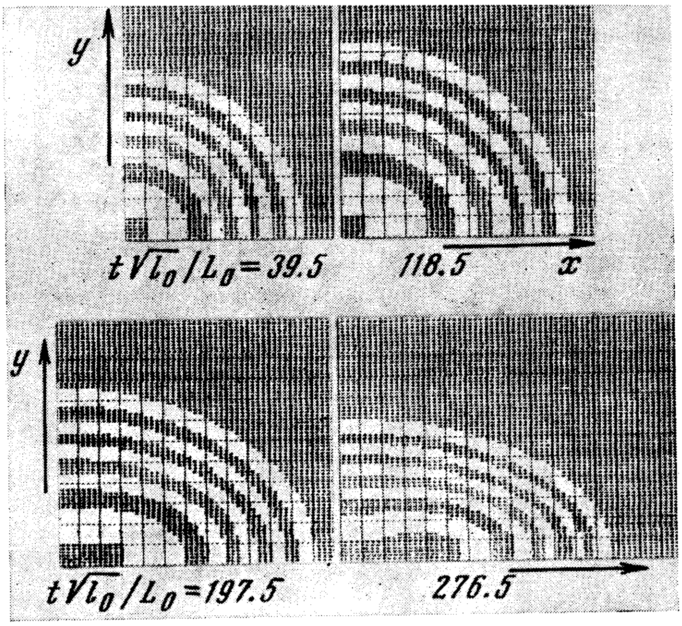
Представляет также интерес конвективное течение, возникающее в этом случае (фиг. 3, *б*; линии тока $\psi T/L_0^2=\text{const}$ проведены с интервалом 0.01). Вначале это течение представлено лишь одним вихрем; при значении $t/T\approx3$ вблизи оси y появляется второй вихрь. При бо́льших значениях t/T вблизи оси y возникают третий, четвертый и последующий вихри, в то время как ранее возникшие вихри оттесняются к оси x. В результате гребни и впадины внутренних волн непрерывно смещаются вдоль оси x.

5. Развитие области смешения при наличии турбулентности существенно зависит от параметра

$$R=\iint\limits_A \rho_0 e_0\,dx\,dy \Bigg/ \iint\limits_A g y \rho_1\,dx\,dy$$

равного отношению кинетической энергии турбулентности к потенциальной энергии, обусловленной отклонением плотности ρ_1, в зоне смешения в начальный момент времени. Рассмотренный в п. 4 случай $e\equiv0$ соответствует значению $R=0$.

Представленные на фиг. 4—6 результаты получены при $R=3e_0/agL_0^2=10^4$ на такой же разностной сетке, как в п. 4; область A_1 задавалась в виде квадрата размером 2×2 ячеек. На фиг. 4 сравниваются характерные поперечные размеры турбулизованной области L_x', L_y' для случаев однородной и стратифицированной жидкостей (на этой фигуре цифра *1* относится к случаю однородной жидкости, когда $L_x=L_y=L$, $L'=L/L_0$;



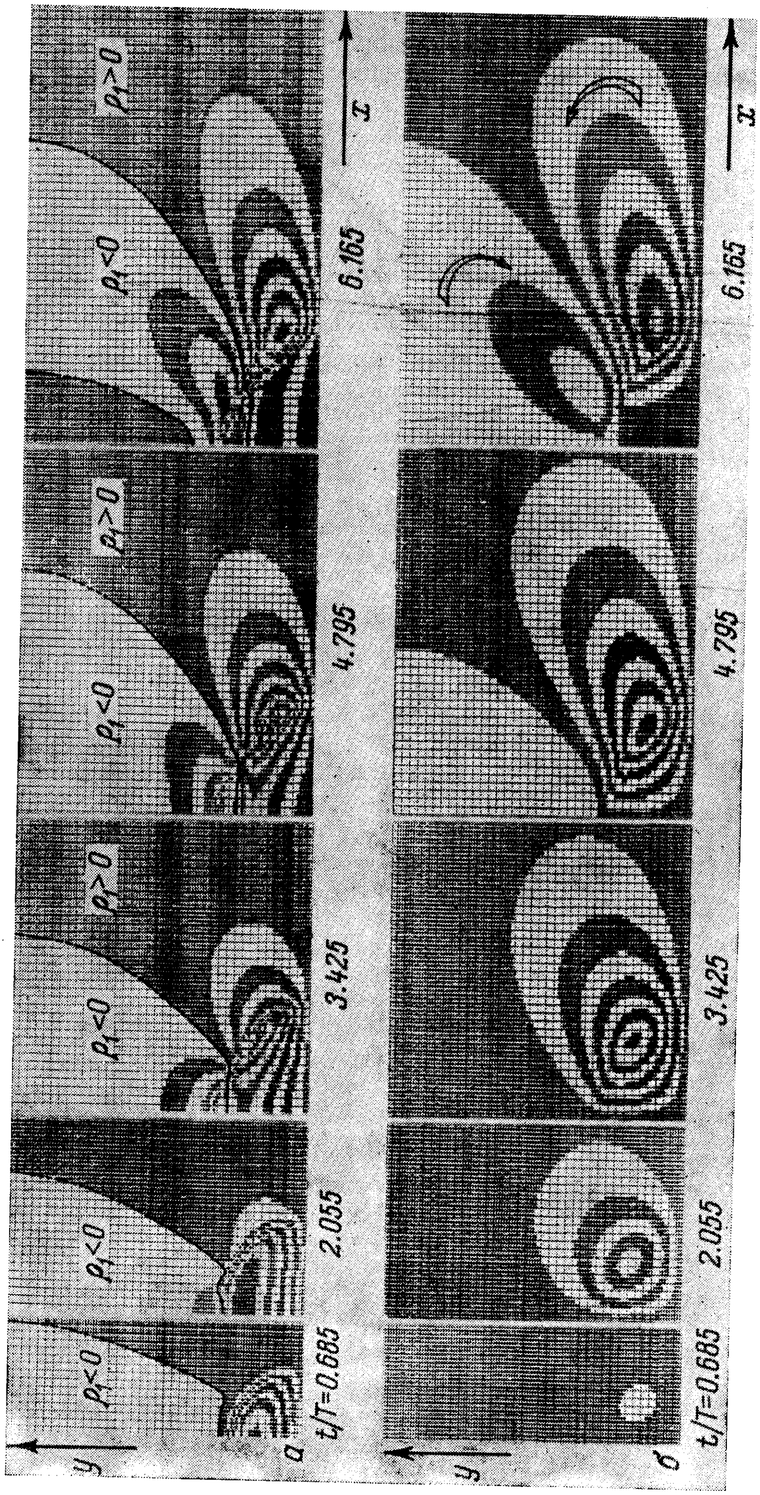
Фиг. 5

цифрой *2* отмечены размеры турбулизованной области в стратифицированной среде; $L_x'=L_x/L_0$, $L_y'=L_y/L_0$, $\tau=t\sqrt{e_0}/L_0$). Данные об изменении энергии турбулентности $e_m(t)$ в центре области смешения для однородной (*I*) и стратифицированной (*II*) жидкостей приводятся ниже

τ		0	31.6	63.2	94.8	126.4	158.0	189.6	221.2
$\frac{e_m}{e_0}\cdot10^3$	I	$1\cdot10^3$	5.10	1.87	1.04	0.69	0.50	0.38	0.30
	II	$1\cdot10^3$	5.00	1.73	0.87	0.50	0.31	0.19	0.11

Развитие турбулизованной области в стратифицированной жидкости иллюстрируется также фиг. 5, на которой изображены изолинии $e/e_m=\mathrm{const}$, проведенные с интервалом 0.1. Из представленных на фиг. 4, 5 результатов следует, что приблизительно до момента времени $\tau=t\sqrt{e_0}/L_0=50$ область смешения развивается так же, как и в однородной жидкости. Примерно при $\tau=100$ ($t/T=1.73$) вертикальный размер области L_y в стратифицированной жидкости достигает максимума, а затем начинается ее сплющивание по вертикали.

На фиг. 6, *а* изображены изолинии $\rho_1/aL\rho_0=\mathrm{const}$, представленные с интервалом 0.050, пунктирные линии соответствуют $\rho_1=0$. Соответствующее этому конвективное течение жидкости приведено на фиг. 6, *б* в виде изолиний $\psi T/L_0^2=\mathrm{const}$ с интервалом 0.091. Обратим внимание на то, что картины конвективного течения при $e=0$ и в данном случае сходны друг с другом (фиг. 3, *б*; 6, *б*). Следует отметить, что при $\tau=50$ ($t/T=0.87$) распределение дефицита плотности ρ_1 мало отличается от автомодельного, полученного в случае пассивно-стратифицированной жидкости. Отсюда можно заключить, что при $R=10^4$ развитие области смешения в стратифицированной среде происходит в основном под действием турбулентной диффузии, а влияние начального усреднения плотности в области A_1 в результате перемешивания жидкости оказывается несущественным.



Фиг. 6

Последнее заключение подтверждается тем, что в случае, когда распределение плотности в начальный момент времени в области A_1 задавалось таким же, как и в окружающей стратифицированной жидкости, были получены результаты, практически совпадающие с приведенными на фиг. 4—6.

Поступила 30 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wu Jin.* Mixed region collapse with internal wave generation in a density stratified medium. J. Fluid Mech., 1969, vol. 35, No. 3, pp. 531—541.
2. *Wessel W. R.* Numerical study of the collapse of a perturbation in an infinite density stratified fluid. Phys. Fluids, 1969, vol. 12. No. 12, pt. 2, pp. 170—176.
3. *Padmanabhan H., Ames W. F., Kennedy J. F., Hung Tin-Kan.* A numerical investigation of wake deformation in density stratified fluids. J. Engng Math., 1970, vol. 4, No. 3, pp. 229—241.
4. *Mei C. C.* Collapse of a homogeneous fluid mass in a stratified fluid. Proc. 12-th Internat. Congress Appl. Mech., Stanford Univ., 1968.
5. *Schooley A. H., Hughes B. A.* An experimental and theoretical study of internal waves generated by the collapse of a twodimensional mixed region in a density gradient. J. Fluid Mech., 1972, vol. 51, No. 1, pp. 159—175.
6. *Koh R. C. Y.* Transient motions induced by local disturbances in a linearly density — stratified fluid. J. Hydraulic Res., 1971, vol. 9, No. 3, pp. 335—353.
7. *Hartman R. I., Lewis H. W.* Wake collapse in a stratified fluid: linear treatment. J. Fluid Mech., 1972, vol. 51, No. 3, pp. 613—618.
8. *Schooley A. H.* Wake collapse in a stratified fluid. Science, 1967, vol. 157, No. 3787, pp. 421—423.
9. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, «Наука», 1967.
10. *Naudascher E.* Flow in the wake of self — propelled bodies and related sources of turbulence. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, No. 4, pp. 625—656.