

## УСТОЙЧИВОСТЬ СПИРАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ В КОЛЬЦЕВОМ ЗАЗОРЕ

Т. А. ВИЛЬГЕЛЬМИ, В. Н. ШТЕРН

(Новосибирск)

Исследуется устойчивость вызванного вращением внутреннего цилиндра и осевым градиентом давления течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя соосными цилиндрами, когда могут проявляться конвективная и вязкая неустойчивости, отличающиеся тем, что в первом случае после потери устойчивости развивается вторичный ламинарный режим, а во втором — турбулентный.

Задача об устойчивости спирального течения рассматривалась в [1]. Осевая компонента скорости основного течения считалась малой по сравнению с азимутальной, устойчивость исследовалась по отношению к осесимметричным возмущениям в узкощелевом приближении. Было обнаружено, что слабый осевой поток приводит к увеличению критического числа Тейлора ( $T$ ). В такой же постановке с использованием различных приближенных приемов задача исследовалась в [2-4], где были получены несколько отличающиеся результаты. В [5] приведены расчеты без ограничения на величину осевой скорости. Для каналов с произвольным зазором анализ конвективной неустойчивости в невязком приближении проведен в [6]. Но при больших числах Рейнольдса ( $R \geq 40$ ), построенных по осевой скорости, некоторые виды возмущений остались вне рассмотрения в [1-6]. Ниже показано, что именно эти возмущения приводят к возникновению вторичного тейлоровского движения.

Экспериментальные данные [7] свидетельствуют, что при различных значениях параметров наиболее опасные возмущения могут быть как осесимметричными, так и трехмерными.

В данной работе исследуется устойчивость спирального течения по отношению к малым трехмерным возмущениям. На ширину зазора между цилиндрами ограничений не накладывалось. Рассматривается весь диапазон изменения чисел Тейлора, Рейнольдса и волновых чисел возмущения. Особое внимание уделяется характеру нейтральных кривых при взаимодействии конвективной и вязкой неустойчивостей и спектральным свойствам нейтральных возмущений.

**1. Постановка задачи и метод решения.** Поле скорости исследуемого ламинарного течения имеет вид

$$(1.1) \quad u = Ar^2 - B \ln r + C, \quad v = E/r - Dr$$

Здесь  $u$  — осевая,  $v$  — азимутальная компоненты скорости (радиальная компонента равна нулю),  $r$  — радиальная координата, коэффициенты в (1.1) постоянные.

За масштаб длины принимается величина зазора между цилиндрами, при этом безразмерный радиус внутреннего цилиндра  $\xi$  будет параметром, определяющим геометрию канала. В качестве масштаба скорости выбирается величина осевой компоненты, осредненная по поперечному сечению. Безразмерная скорость вращения внутреннего цилиндра  $v_0$  будет характеризовать кинематику основного течения. Динамическим параметром является число Рейнольдса  $R$ , построенное по выбранным масштабам.

На поверхности внешнего цилиндра  $u=v=0$ , а на внутреннем цилиндре  $u=0, v=v_0$ . При этом константы в (1.1)

$$(1.2) \quad A = 2 \frac{\ln(1/\xi + 1)}{1 + 2\xi - (1 + 2\xi + 2\xi^2) \ln(1 + 1/\xi)}, \quad B = \frac{1 + 2\xi}{\ln(1/\xi + 1)}, \quad C = B \ln \xi - A\xi^2$$

$$D = v_0 \xi / (1 + 2\xi), \quad E = D(\xi + 1)^2, \quad \xi \leq r \leq \xi + 1$$

Линеаризуя уравнения Навье — Стокса вблизи основного течения и рассматривая гармонические возмущения получим уравнения для амплитуд

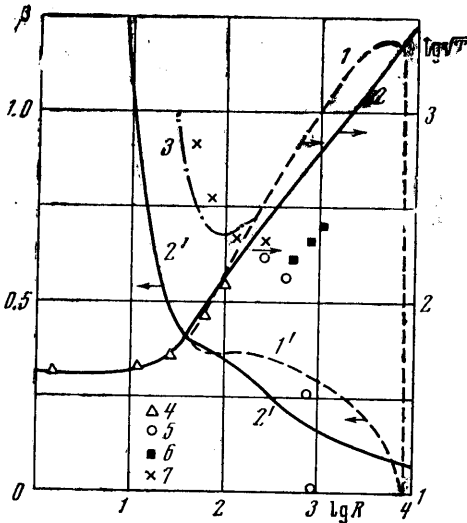
$$(1.3) \quad \begin{aligned} aw_1 - \frac{2Rv}{r} w_2 &= \frac{i}{\alpha} q' + \left\{ \frac{1}{r} (rw_1)' \right\}' - \frac{2im}{r^2} w_2 \\ aw_2 - R \left( v' + \frac{v}{r} \right) w_1 &= -\frac{m}{\alpha r} q + \left\{ \frac{1}{r} (rw_2)' \right\}' + \frac{2im}{r^2} w_1 \\ aw_3 + Ru'w_1 &= -q + r^{-1} (rw_3) ', \quad (rw_1)' + i\alpha r w_3 + im w_2 = 0 \\ a &= p \left[ i\alpha R(u-c) + \frac{imR}{r} v + \frac{m^2}{r^2} + \alpha^2 \right], \quad b = \frac{a}{r^2} \\ (v_*, p_*) &= \text{Re} \{ (w(r), q(r)) \exp [i\alpha(z-ct) + im\varphi] \} \\ p &= -iq/\alpha R \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha \in (0, \infty)$ ,  $m=0, 1, 2, \dots$  — соответственно осевое и азимутальное волновые числа,  $c=X+iY$  — искомое собственное значение задачи,  $X$  — фазовая скорость,  $Y>0$  отвечает нарастанию амплитуды возмущения во времени. Граничные условия следуют из условий прилипания и непроницаемости цилиндров

$$\begin{aligned} w_i(\xi) &= w_i(1+\xi) = 0 \\ (i &= 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Собственные значения находились численно с использованием метода дифференциальной прогонки со стыковкой [8]. Спектральный анализ возмущений проводился посредством непрерывного изменения параметров. Если  $\xi$  достаточно велико, а  $\alpha$  мало, спектр может быть приближенно рассчитан аналитически. Опираясь на эти значения спектра, как на реперные точки, и постепенно меняя параметры, можно численно рассчитать спектр для любых значений  $\alpha, m, R, \beta, \xi$ .

2. Случай узкого зазора. Сначала приведем результаты численных расчетов для узкощелевого ка-



Фиг. 1

нала и сопоставим их с результатами других авторов. На фиг. 1 нанесены критические значения параметров для  $\xi=50$  и  $m=0$ . Представлены только осесимметричные возмущения, потому что, как это будет показано ниже, они в случае малых зазоров наиболее опасны. По оси ординат отложены значения  $\beta=0.25\sqrt{2}/(1+2\xi)v_0$  и число Тейлора,  $\sqrt{T}=4\beta R$ . Для удобства сопоставления результатов число Тейлора определено так же, как в [1-5]. Результаты расчетов, показанные кривой 1, 1' на фиг. 1, хорошо согласуются с данными [1-5]. При малых значениях числа Рейнольдса критическое число Тейлора  $T_*=1700$ , с ростом  $R$  оно возрастает вплоть до  $R \approx 4000$ , а затем резко падает до нуля. При этом критическое волновое число  $\alpha_*$  уменьшается от 3.12 при  $R=0$  до 1.9 при  $T=0$ .

Однако при движении вдоль кривой 1 качественно меняется характер устойчивости. При малых  $R$ , как это характерно для тейлоровской неустойчивости, ветви нейтральной кривой в плоскости  $\alpha R$  расходятся; причем при  $R \rightarrow \infty$  вдоль нижней ветви  $\alpha \rightarrow 0$ , а вдоль верхней  $\alpha \rightarrow \infty$ . При больших

$R$  нейтральная кривая имеет качественно другой характер. Вдоль обеих ветвей  $\alpha \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ , что типично для вязкой неустойчивости Гейзенберга — Линя.

Численный анализ показал, что качественная перестройка диаграммы неустойчивости происходит при  $R \approx 40$ . От нейтральной кривой тейлоровского типа отщепляется петлеобразная нейтральная кривая. Носик этой нейтральной кривой и определяет то критическое число Рейнольдса, которое представлено кривой 1 при  $R > 40$ .

Но наряду с этим продолжает существовать нейтральная кривая тейлоровского типа. Критические числа Рейнольдса, отвечающие ее носику, показаны на фиг. 1 (кривые 2, 2').

Предыдущие исследователи не обнаружили этого типа неустойчивости. Между тем, как видно из фиг. 1, критическое число Тейлора в широком диапазоне чисел  $R$  ( $100 \leq R \leq 7000$ ) определяется именно кривой 2, вдоль которой при  $40 \leq R \leq 30\,000$  выполняются приближенные зависимости

$$\sqrt{T_*} \approx 6.4R^{1/2}, \quad \alpha_* \approx 1.2R^{1/4}$$

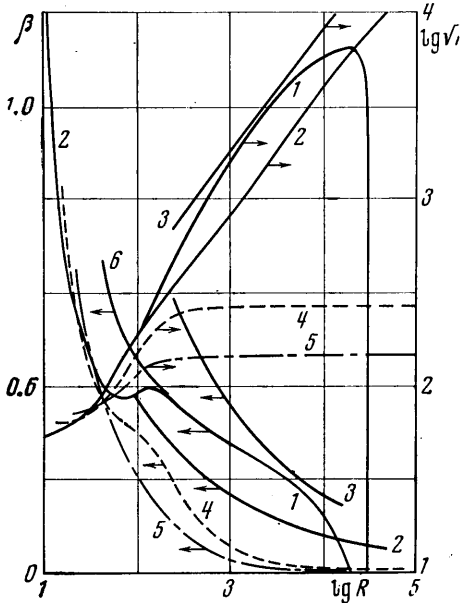
Далее с ростом  $R$  волновое число  $\alpha_*$ , достигнув максимума ( $\alpha_* = 37.5$ ), убывает, а критическое число Тейлора  $T_*$  возрастает несколько быстрее. Следует отметить, что если критические числа Тейлора, определенные по кривым 1 и 2, при  $R < 7000$  различаются не более чем в 1.5—2 раза, то критические волновые числа отличаются на порядок.

Совокупность кривых 1 и 2 определяет линейную диаграмму устойчивости. При значениях параметров, соответствующих точкам, расположенным ниже 1 и 2, исходное течение устойчиво к малым возмущениям. Если число Рейнольдса больше 7000, то с возрастанием любого из параметров  $R$ ,  $T$  наступает вязкая неустойчивость. При меньших числах Рейнольдса с увеличением  $T$  (или  $\beta$ ) вязкой неустойчивости предшествует конвективная. Выяснение типа неустойчивости, который проявляется первым, важно в том отношении, что закритический режим в случае вязкой и конвективной неустойчивости различен. При тейлоровской неустойчивости устанавливается вторичный ламинарный режим. Когда осевой градиент давления отличен от нуля, этот режим не является стационарным и вторичные тейлоровские вихри сносятся осевым потоком. Этому соответствует то обстоятельство, что фазовая скорость малых возмущений не равна нулю.

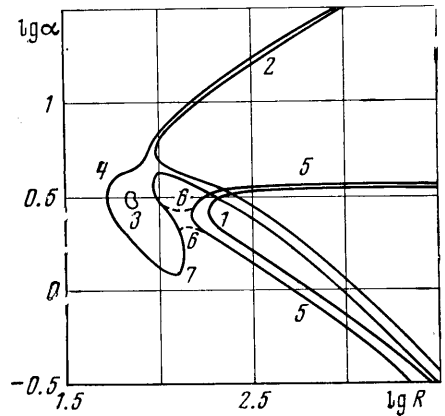
При вязкой неустойчивости в закритической области не развивается ламинарное вторичное течение, а происходит переход к турбулентному режиму. В связи с этим представляет интерес более детально проследить, как происходит смена типов неустойчивости и как изменяются при этом нейтральные кривые. Эти явления резко проявляются в каналах с широким зазором, и поэтому перейдем к детальному рассмотрению случая  $\xi = 1$ .

**3. Критические явления в канале с широким зазором.** На фиг. 2 представлена диаграмма устойчивости для течения в кольцевом зазоре, когда радиус внешнего цилиндра вдвое больше радиуса внутреннего. Сначала рассмотрим осесимметричные возмущения при малых скоростях вращения внутреннего цилиндра. Численный анализ показывает, что здесь существуют нейтральные кривые двух типов, соответствующие двум различным видам неустойчивости. Первым и основным типом неустойчивости, определяющим минимальное значение критического числа Рейнольдса (при  $\beta < 0.09$ ), является вязкая неустойчивость. Механизм ее, детально описанный Линем, заключается в том, что благодаря совместному влиянию вязкости и градиента скорости основного течения в определенном (довольно узком) интервале волновых чисел создается такое фазовое соотношение для продольной и поперечной скоростей возмущения, которое приводит к передаче энергии от основного течения к возмущенному.

Специфическая роль вязкости подтверждается тем фактом, что с увеличением  $R$  интервал волновых чисел сужается и в пределе стягивается в точку. При этом генерационный интервал смещается в сторону все больших длин волн. Важно подчеркнуть, что вязкая неустойчивость проявляется в узком диапазоне волновых чисел и для одной спектральной моды (да и то не всегда: в ряде напорных течений, таких как плоское течение Куэтта, она в линейном приближении вообще не фиксируется). Кривая 1 на фиг. 3 является типичной «вязкой нейтральной кривой». Вдоль верхней ее ветви волновое число тоже стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ , хотя это



Фиг. 2



Фиг. 3

еще не заметно на фиг. 2. Критическое число Рейнольдса соответствует «носику» и в зависимости от скорости вращения внутреннего цилиндра нанесено на фиг. 2 кривой 1.

Вторым типом является тейлоровская или конвективная неустойчивость. Она связана с центробежными ускорениями, которые действуют аналогично архимедовой силе при подогреве слоя жидкости снизу. Вязкость здесь выполняет обычную диссипативную стабилизирующую роль. В пределе нулевой вязкости нарастающими будут произвольные возмущения любого масштаба. При конечной вязкости достаточно коротковолновые гармоники будут затухать из-за преобладания вязкой диссипации энергии возмущения, а весьма длинноволновые — из-за стабилизирующего воздействия условий прилипания на стенках. С увеличением вязкости диапазон волновых чисел нарастающих возмущений будет сужаться вплоть до смыкания при критическом значении числа Рейнольдса или Тейлора.

Типичным представителем нейтральной кривой для тейлоровской неустойчивости является кривая 2 на фиг. 3. Носику этой кривой соответствует критическое число Рейнольдса, зависимость которого от скорости вращения внутреннего цилиндра при  $\beta < 0.4$  иллюстрирует кривая 2 на фиг. 2. С увеличением числа Тейлора  $T$  или  $\beta$  тейлоровская неустойчивость проявляется и на более высоких спектральных модах. Кривая 3 на фиг. 2 связана с носиком нейтральной кривой тейлоровской неустойчивости для следующей спектральной моды.

Остановимся несколько подробнее на свойствах спектра малых возмущений. Это важно, так как при переходе от одного типа неустойчивости к другому происходит существенная и довольно сложная перестройка спектра. Данное обстоятельство осталось вне поля зрения предыдущих исследователей, и поэтому не была замечена неустойчивость, которая является доминирующей в широком диапазоне чисел Рейнольдса, что приводило к качественному расхождению опытных и теоретических данных.

При фиксированных значениях чисел Рейнольдса и Тейлора существует счетный спектр зависимостей  $C_n(\alpha)$ . Эти спектральные уровни, вообще говоря, могут пересекаться, образуя точки кратности спектра при определенных значениях  $\alpha$ . Но при небольших скоростях вращения внутреннего цилиндра спектральная структура такова, что зависимости не имеют общих точек в области неустойчивости и близкой к ней. Каждая из нейтральных кривых типа 1 и 2 на фиг. 3 образована одной спектральной модой. Непрерывно меняя волновое число как параметр, можно перейти от одной ветви нейтральной кривой через область неустойчивости к другой ветви, оставаясь на одной спектральной моде. Следовательно, можно говорить о независимости тейлоровской и вязкой неустойчивостей, имея в виду, что они проявляются на разных спектральных уровнях и описываются независимыми нейтральными кривыми.

Но с увеличением числа Тейлора (или  $\beta$ ) два типа неустойчивостей вступают во взаимодействие и теряют свою индивидуальность. Это проявляется в том, что нейтральные кривые обмениваются ветвями и образуют единую структуру, в спектре появляются точки кратности, а область неустойчивости в плоскости  $\alpha R$  приобретает двулистную структуру. Эволюцию нейтральных кривых иллюстрируют фиг. 3 и 4. При  $\beta < 0.46$  имеются две независимые нейтральные кривые типа 1 и 2 на фиг. 3. При  $\beta = 0.46$  перед ними возникает «островок» неустойчивости 3, который увеличивается в размерах и смыкается с кривой 2, образуя кривую 4 на фиг. 3. Затем кривая 4 смыкается с вязкой кривой 5, как это указано пунктиром 6 на фиг. 3. Далее с ростом  $\beta$  выступ, соответствующий точке 7 на фиг. 3, устремляется в область больших  $R$  параллельно нижней ветви 5 и образуется структура линий 1, 2, 3 на фиг. 4.

Наконец, внутренняя область устойчивости 2 сдвигается в область бесконечно больших чисел Рейнольдса и структура нейтральных кривых приобретает вид 4, 5 на фиг. 4. Следует подчеркнуть, что это не две различные нейтральные кривые, а единая структура. Непрерывно меняя  $\alpha$ , при фиксированном  $R$  перейдем с верхней (заштрихованной) ветви 4 через область неустойчивости к нижней (заштрихованной) ветви 5. Аналогично связаны и две другие ветви. Однако, оставаясь в области неустойчивости, можно непрерывно перейти и от нижней ветви 5 к верхней, двигаясь вдоль стрелки 6 на фиг. 4.

Такой сложный характер области неустойчивости математически связан с наличием точки кратности спектра в диапазоне чисел Рейнольдса между носиками кривых 4 и 5 на фиг. 4. Чтобы пояснить характер перестройки спектра при переходе через число Рейнольдса, при котором имеется точка кратности, на фиг. 5 представлены зависимости декрементов  $Y$  как функций от волнового числа для значений  $R$ , которые отмечены на фиг. 4 сечениями  $A, B, C, D$ . Сечению  $A$  соответствует единственная спектральная зависимость  $Y(\alpha)$  в области неустойчивости.

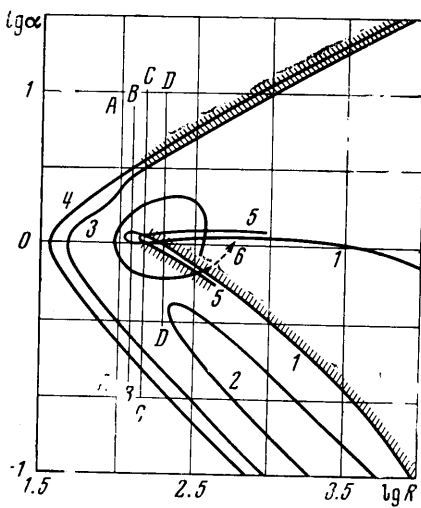
При увеличении  $R$  происходит сближение двух спектральных мод (см. сплошную и пунктирную линии  $B$  на фиг. 5). Они смыкаются при  $R = 115$ , образуя точку кратности (при этом совпадают и фазовые скорости, они здесь не приводятся) и обмениваются ветвями, как это иллюстрируют сплошная и пунктирная линии  $C$ . Теперь на оси  $\alpha$  существуют два диапа-

зона неустойчивости, которым соответствуют две различные спектральные моды (для  $\beta=0.47$ , этому же значению  $\beta$  отвечает совокупность кривых 1, 2, 3 на фиг. 4).

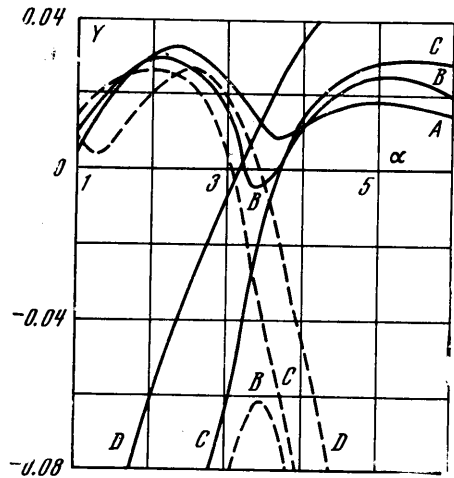
При дальнейшем росте  $\beta$  эти диапазоны перекрываются и во внутренней области кривой 1 (и 5) на фиг. 4 нарастающими являются две спектральные моды. Как показали расчеты, с увеличением скорости вращения по сравнению с осевой скоростью двулиственный характер области неустойчивости сохраняется вплоть до предельного случая кругового течения Куэтта при отсутствии осевого потока. Этот факт не был ранее известен.

Попытаемся дать физическую интерпретацию сложного двулиственного характера области неустойчивости.

Заметим, что обе ветви кривой 5, ограничивающие область перекрытия, уходят в область сколь угодно малых  $\alpha$  при  $R \rightarrow \infty$ , т. е. ведут себя так же,



Фиг. 4



Фиг. 5

как ветви обычной нейтральной кривой, характеризующей вязкую неустойчивость, а в пределе  $R \rightarrow \infty$  диапазон перекрытия стягивается в точку. Это свидетельствует о существенно вязком характере неустойчивости в области перекрытия, и картину потери устойчивости, соответствующую кривым 4, 5 на фиг. 4, можно трактовать так: при числе Рейнольдса, превышающем  $R_*$ , которое соответствует носу кривой 4, развивается вторичный тейлоровский режим. Предположим, что его амплитуда мала, будем увеличивать число Рейнольдса и исследовать устойчивость в пренебрежении вторичным течением. Тогда при числе Рейнольдса, превышающем  $R_*$ , которое соответствует носу кривой 5, на фоне тейлоровского режима разовьется вторичная вязкая неустойчивость. Как будет видно ниже, такая картина качественно соответствует экспериментальным данным, хотя, строго говоря, при анализе вторичной неустойчивости надо наложить возмущения на вторичный тейлоровский режим, а не на исходный, как предполагалось выше.

В опытах [9] наблюдалось четыре режима течения:

- 1) исходный ламинарный режим, когда поле скоростей зависит только от радиальной координаты (при малых числах Рейнольдса  $R$  и Тейлора  $T$ );
- 2) вторичный ламинарный режим с тейлоровскими вихрями (при умеренных  $T$  и малых  $R$ );

- 3) чисто турбулентный режим (при малых  $T$  и больших  $R$ );  
 4) тейлоровские вихри на фоне развитой турбулентности (большие  $T$  и  $R$ ).

Таким образом, возможно как развитие вязкой неустойчивости после образования вторичного тейлоровского течения, так и появление тейлоровских вихрей вследствие конвективной неустойчивости на фоне развитого турбулентного режима. Это свидетельствует о различной природе двух типов неустойчивостей и о независимом характере их проявления. Все эти четыре режима можно интерпретировать на основе линейного анализа устойчивости. Если критическое число Рейнольдса, соответствующее нейтральной кривой типа 1 на фиг. 3, превышает критическое число Рейнольдса для кривой типа 2 (как и происходит при малых скоростях вращения внутреннего цилиндра), то сначала развивается вязкая неустойчивость, а затем на фоне турбулентного течения с ростом  $R$  возникают тейлоровские вихри. Если же диаграмма линейной устойчивости имеет вид кривых 4, 5 на фиг. 4, то с увеличением  $R$  сначала развивается тейлоровский режим, а затем на его фоне возникает турбулентность. При этом область перекрытия двулостной фигуры неустойчивости связывается со вторичной вязкой неустойчивостью, инициирующей развитие турбулентности.

**4. Роль трехмерных возмущений.** Поскольку при течениях в кольцевых каналах неприменима теорема Сквайра, необходимо исследовать устойчивость течения по отношению к трехмерным возмущениям. Более того, для ряда течений именно трехмерные возмущения приводят к потере устойчивости в линейном приближении. Так, для течений Пуазейля в кольцевом канале известно [8], что при малых и широких зазорах наиболее опасные возмущения осесимметричны, но при средних величинах зазоров минимальное критическое число Рейнольдса соответствует трехмерным возмущениям. В частности, при  $\xi=1$  для возмущений с азимутальным числом  $m=2$   $R_*=10^4$ , в то время как для  $m=1$   $R_*=14\,500$ , а осесимметричным возмущениям  $m=0$  соответствует  $R_*=19\,300$ . Для чисто тейлоровского течения в отсутствие осевого потока влияние трехмерных возмущений исследовалось в [10]. Показано, что в случае узкого зазора при покоящемся внешнем цилиндре наиболее опасные возмущения осесимметричны. Для произвольных зазоров данных о влиянии трехмерных возмущений нет.

Расчеты показали, что и для спирального потока трехмерные возмущения несут существенный вклад в развитие неустойчивости при средних значениях зазора.

Проанализируем роль трехмерных возмущений при  $\xi=1$ . При очень малых скоростях вращения внутреннего цилиндра  $\beta \leq 0.004$  неустойчивость связана с вязким механизмом Гейзенберга — Линя. Критические числа Рейнольдса соответствуют результатам [8]. Далее с ростом  $\beta$  доминирующей становится тейлоровская неустойчивость. На фиг. 2 кривыми 4 и 5 нанесена зависимость критического числа Тейлора (и  $\beta$ ) от числа Рейнольдса для возмущений с  $m=1$  и 2 соответственно. Возмущения с азимутальным числом  $m \geq 3$  затухают во всем диапазоне чисел  $R$ ,  $T$ .

При  $\beta > 0.45$  нейтральные кривые для зависимостей 4, 5 (фиг. 2) имеют такой же вид, как при  $m=0$  (см. 4, 5 на фиг. 4), но при  $R \rightarrow \infty$  вдоль нижней ветви нейтральной (4 на фиг. 5)  $\alpha$  стремится не к нулю, а к конечной величине, а так как вдоль нижней ветви внутренней кривой (типа 5 на фиг. 4)  $\alpha \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ , то эти ветви при больших числах Рейнольдса пересекаются. Качественная перестройка кривых устойчивости на плоскости  $\alpha R$  начинается для  $m=1$  при  $\beta=0.45$ , а для  $m=2$  при  $\beta=0.4$ . При этом сначала образуется две вторичных нейтральных кривых, а затем с уменьшением  $\beta$  они в свою очередь раздваиваются. Зависимости 4, 5 на фиг. 2 со-

ответствуют минимальному критическому числу Рейнольдса на семействе всех нейтральных кривых при фиксированном значении  $\beta \geq 0.004$ .

Интересно отметить, что критические числа Тейлора при больших числах Рейнольдса практически постоянны для трехмерных возмущений. Для  $m=1$   $T_*=7.3 \cdot 10^4$ , для  $m=2$   $T_*=2 \cdot 10^4$ . При этом произведение критического волнового числа на критическое число Рейнольдса  $\alpha_* R_*$  тоже остается постоянной величиной. Для  $m=2$   $\alpha_* R_*=224$ . Поскольку волновое число  $\alpha_*$  при больших  $R$  становится весьма малой величиной, то нейтральные возмущения и вторичные тейлоровские вихри практически не зависят от осевой координаты. Такого типа азимутальные возмущения наблюдались экспериментально [7].

Определяющая роль трехмерных возмущений в развитии неустойчивости проявляется только при достаточно больших числах Рейнольдса. При  $R < 40$  наиболее опасны возмущения с  $m=2$ , в диапазоне  $28 < R < 40$  критическое число Тейлора минимально для  $m=1$ , а при  $R < 28$  неустойчивость впервые проявляется на осесимметричных возмущениях. Отсюда, в частности, следует, что при отсутствии осевого потока неустойчивость потока между цилиндрами при  $\xi=1$  связана с осесимметричными возмущениями.

С уменьшением зазора между цилиндрами влияние трехмерных возмущений на возникновение неустойчивости снижается. Когда  $\xi$  увеличивается от единицы, кривые типа 1, 2 на фиг. 2 (соответствующие осесимметричным возмущениям) смещаются в области более низких значений  $\beta$  (или  $T$ ). Кривые типа 4, 5, связанные с трехмерными возмущениями, смещаются в противоположном направлении. При этом точки пересечения кривых 4, 5 с 1, 2 (при больших  $\beta$ ), определяющие смену типов возмущений, ответственных за тейлоровскую неустойчивость, смещаются в сторону больших чисел Рейнольдса. С другой стороны, и в случае вязкой неустойчивости (при малых  $\beta$ ) критические числа  $R_*$  для  $m=0$  с ростом  $\xi$  становятся минимальными по сравнению с  $m=1$  и 2. Это приводит к тому, что, начиная с  $\xi \geq 7$ , наиболее опасными возмущениями во всем диапазоне чисел  $R$  и  $T$  становятся осесимметричные.

Таким образом, диаграмма устойчивости на фиг. 1, построенная для осесимметричных возмущений, не изменится, если учесть и трехмерные возмущения, поскольку последние в этом случае будут менее опасны. В области больших чисел Рейнольдса кривые 1 и 2 на фиг. 1 пересекаются при  $\beta=0.0915$ . Это число  $\beta_*$ , характеризующее переход от конвективной неустойчивости к вязкой, остается практически неизменным для всех  $\xi \geq 1$ , а во всем диапазоне изменения  $\xi$  описывается эмпирической зависимостью

$$\beta_* = 0.0915 [1 - \exp(-3.2\xi)]$$

При достаточно малых числах Рейнольдса полученные здесь результаты хорошо согласуются с данными [11, 12] по устойчивости тейлоровского течения в случае широких зазоров.

**5. Сопоставление с экспериментами.** Уже отмечалось, что линейная теория устойчивости качественно верно отражает результаты, полученные в экспериментах. Попробуем оценить, как мог бы сказаться на результатах учет конечности возмущений.

Известно, что тейлоровская неустойчивость характеризуется мягким возбуждением [13]. При числах  $T < T_*$ , определенных по линейной теории, любые, в том числе немалые по амплитуде, возмущения затухают с течением времени. Если же  $T > T_*$ , то амплитуда вторичного движения монотонно возрастает с увеличением  $T$  от нуля при  $T=T_*$ . Поэтому, если свойство мягкого возбуждения сохраняется при наличии осевого потока, то кривые 2 на фиг. 1, 2, соответствующие конвективной неустойчивости, не должны претерпеть изменений с учетом нелинейности.



Для вязкой же неустойчивости характерно жесткое возбуждение [14]. Немалые по амплитуде возмущения могут привести к смене режима течения при числах  $R$ , меньших, чем критическое по линейной теории. При этом образующийся режим течения сразу становится резко отличным от ламинарного. Поэтому следует ожидать, что кривые типа 1 на фиг. 1, 2 с учетом нелинейности возмущений сместятся в область меньших чисел Рейнольдса. Для напорных течений в каналах это смещение составляет по числам  $R$ , как правило, порядок величины.

На фиг. 1 нанесены опытные данные по устойчивости спирального течения в узкощелевых каналах (4 — данные [15]  $\xi=19$ , 5 — данные [9]  $\xi=5.5$ ). При малых числах  $R$  опытные результаты и расчеты по линейной теории совпадают с высокой точностью. При умеренных числах  $R$  вплоть до  $R \sim 200$  наблюдается расхождение. Следует отметить, что гораздо лучше совпадают с опытом результаты, соответствующие кривой 2, по сравнению с кривой 1, причем это связано не столько с различием в числах Тейлора, сколько с критическими волновыми числами. В диапазоне  $0 < R < 260$  по опытным данным  $\alpha_*$  возрастает от 3.12 до 7.5. Расчеты по линии 2 в этом же диапазоне дают возрастание  $\alpha_*$  от 3.12 до 7.9, в то время как вдоль кривой 1 волновые числа уменьшаются и при  $R=260$   $\alpha \sim 2$ .

Расхождение экспериментальных данных и расчетных (кривая 2 на фиг. 1) по числам Тейлора увеличивается с числом  $R$  и составляет при  $R \sim 300$  1.5—2 раза. Это, по-видимому, связано с тем, что при этих числах  $R$  тейлоровская неустойчивость развивается с жестким возбуждением. Следует ожидать, что смена мягкого возбуждения жестким происходит одновременно с качественной перестройкой нейтральных кривых при  $R > 40$ . При больших числах Рейнольдса в экспериментах наблюдалась турбулизация течения. Согласие опытных данных с кривой 1 при этом носит качественный характер. Удовлетворительное количественное совпадение для вязкой неустойчивости получилось бы, если кривую 1 сместить по числам  $R$  на порядок.

Отметим некоторые явления, связанные с вторичной неустойчивостью. После турбулизации течения с ростом числа  $T$  происходит вторичная перестройка потока, связанная с появлением на фоне турбулентного режима тейлоровских вихрей. Этой вторичной неустойчивости соответствуют точки 6 (по данным [9]) на фиг. 1. Для теоретического расчета этого явления необходимо исследовать на устойчивость развитый турбулентный режим. Тем не менее существует качественное соответствие точек 6 с кривой 2.

С другой стороны, после наступления тейлоровской неустойчивости на фоне развитого вторичного ламинарного режима с ростом числа  $R$  или  $T$  развивается вязкая неустойчивость, которая приводит к турбулизации конвективного режима. Этой вторичной вязкой неустойчивости соответствуют 7 (по данным [9]) на фиг. 1.

Для теоретического предсказания этого явления необходимо исследовать на вязкую неустойчивость вторичное тейлоровское течение. Однако и тут интересно отметить, что экспериментальные данные находятся в хорошем качественном соответствии с кривой 3 на фиг. 1, на которой нанесены критические значения  $R_*$  (отвечающие носикам кривых типа 5 на фиг. 4), связанные со вторичной вязкой неустойчивостью исходного ламинарного режима. Это качественное, а в какой-то мере и количественное совпадение, видимо, объясняется тем, что вязкая и конвективная неустойчивости развиваются почти независимо друг от друга, т. е. наличие вторичных тейлоровских вихрей не сказывается существенно на развитии вязкой неустойчивости.

Таким образом, линейный анализ устойчивости качественно верно (а в ряде случаев и количественно) отражает сложный характер устойчивости спирального потока, наблюдаемый на опыте.

В заключение авторы благодарят М. А. Гольдштика за внимание к работе и обсуждение результатов.

Поступила 30 I 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford Clarendon Press., 1961.
2. Krueger E. R. Stability of Couette flow and spiral flow. Doct. diss. Rensselaer Polytechn. Inst., 1962.
3. Krueger E. R., Diprima R. C. The stability of a viscous fluid between rotating cylinders with an axial flow. J. Fluid Mech., 1964, vol. 19, No. 4.
4. Datta S. K. Stability of spiral flow between concentric cylinders at low axial Reynolds number. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, No. 4.
5. Hughes T. H., Reid W. H. The stability of spiral flow between rotating cylinders. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 1968, vol. 263, No. 1135, pp. 57–91.
6. Wedemeyer E. Stabilität spiraliger Stromungen in einem zylindrischen Ringraum. Mitt M – Plank – Inst. Stromingsforsch und der Aerodyn. Versuchsanst, 1969, vol. 44.
7. Schwarz K. W., Springett B. E., Donnelly R. J. Modes of instability in spiral flow between rotating cylinders. J. Fluid Mech., 1964, vol. 20, pt 2.
8. Гольдштик М. А., Сапожников В. А. Устойчивость течения в кольцевом канале. Изв. АН СССР, МЭРГ, 1971, № 4.
9. Kaye J., Elgar E. C. Modes of adiabatic and diabatic fluid flow in an annulus with an inner rotating cylinder. Trans. ASME, 1968, vol. 80, No. 3.
10. Krueger E. R., Cross A., Diprima R. C. On the relative importance of Taylor-vortex and non-axisymmetric modes in flow between rotating cylinders. J. Fluid Mech., 1966, vol. 24, No. 3.
11. Овчинникова С. Н. Устойчивость течения Куэтта в случае широкого зазора между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
12. Sparrow E. M., Munro W. D., Jonsson V. K. Instability of the flow between rotating cylinders: the wide-gap problem. J. Fluid Mech., 1964, vol. 20, pt 1.
13. Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
14. Андрейчиков И. П., Юдович В. И. Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале. Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 4.
15. Snyder H. A. Experiments on the stability of spiral flow at low axial Reynolds numbers. Proc. Roy. Soc., 1962, vol. 265, No. 1321.