

**УСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛНОВЫХ РЕЖИМОВ В ПЛЕНКЕ,
СТЕКАЮЩЕЙ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ**

А. А. НЕПОМНЯЩИЙ

(Пермь)

Нелинейная теория движения в пленке жидкости, стекающей по наклонной плоскости, предсказывает существование интервала $k_0 < k < k_m$, внутри которого может лежать волновое число периодического волнового движения [1]. Условие устойчивости экспериментально реализуемых движений накладывает ограничение на их волновые числа. В [2] производилось численное исследование устойчивости волновых движений; в изученном интервале изменения числа Галилея и волнового числа все движения оказались неустойчивыми, однако наименее быстро нарастали возмущения, наложенные на движение с определенным волновым числом («оптимальный» режим). В [3] в длинноволновом приближении была установлена неустойчивость движений с длиной волны, превышающей некоторое предельное значение.

В настоящей работе в рамках двумерной задачи проводится исследование устойчивости периодических волновых движений, основанное на разложении по малому параметру k_m . Установлено, что внутри интервала $k_0 < k < k_m$ лежит конечный подынтервал волновых чисел, для которых волновые движения устойчивы. Узость этого интервала ($\Delta k \approx 0.07 k_m$) может быть причиной того, что в эксперименте при не слишком высоких числах Галилея для установившихся периодических волновых движений не наблюдается существенных различий длины волны [4].

1. Рассмотрим плоское движение жидкой пленки, стекающей по наклонной плоскости под действием силы тяжести. Плотность жидкости ρ , кинематическая вязкость ν , коэффициент поверхностного натяжения σ , ускорение свободного падения g , угол наклона плоскости к вертикали α . Выбор системы координат показан на фиг. 1. Отклонение свободной поверхности пленки от среднего положения обозначим через $a_0\varphi$, где a_0 — средняя толщина пленки.

Выбрав в качестве единиц измерения длины, скорости, времени и давления соответственно a_0 , ν/a_0 , a_0^2/ν и $\rho(\nu/a_0)^2$, запишем уравнения движения в безразмерной форме

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \Delta u + G \cos \alpha, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \Delta v - G \sin \alpha, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

где u , v — соответственно x - и y -компоненты скорости, p — давление, $G = ga_0^3/\nu^2$ — число Галилея. Условия на твердой и свободной границах пленки имеют вид

$$(1.2) \quad y=0, \quad u=v=0$$

$$(1.3) \quad y=1+\varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) / \left[1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] = 0$$

$$(1.4) \quad p + \gamma G^{1/2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} / \left[1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

$$(1.5) \quad \partial \varphi / \partial t + u \partial \varphi / \partial x = v$$

Здесь $\gamma = \sigma(v^4 g)^{-1/2} / \rho$ — безразмерная константа, определяемая физическими свойствами жидкости, давление отсчитывается от атмосферного.

Система (1.1) с граничными условиями (1.2)–(1.5) всегда имеет решение $(\varphi_0, u_0, v_0, p_0)$, описывающее стационарное плоскопараллельное движение жидкости с недеформированной поверхностью

$$(1.6) \quad \varphi_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad u_0 = G \cos \alpha U_0(y), \quad p_0 = G \sin \alpha P_0(y), \\ U_0(y) = y - y^2/2, \quad P_0(y) = 1 - y$$

Согласно линейной теории устойчивости [5] течение (1.6) неустойчиво при $G > G_*$ по отношению к возмущениям с волновыми числами в интервале $0 < k < k_m$, где

$$(1.7) \quad G_* = 5 \sin \alpha / 2 \cos^2 \alpha, \\ k_m^2 = 2 \cos^2 \alpha G^{2/3} (G - G_*) / 5\gamma$$

Неустойчивость могут вызывать также возмущения типа волн Толмина — Шлихтинга, однако критическое число Галилея для них всегда значительно выше [6].

Для многих жидкостей константа $\gamma \gg 1$ (для воды при 15°С $\gamma = 2850$, для спирта $\gamma = 930$); в этом случае величина k_m мала при не слишком больших значениях $G - G_*$.

Система (1.1)–(1.5) имеет класс решений, которые являются периодическими функциями переменной $x' = x - ct$, где c — фазовая скорость; методы исследования этих решений развиты в [4, 7–12]. Соответствующие движения будем называть стационарными периодическими волновыми режимами.

2. Введем плоские возмущения и перейдем к функции тока ψ'

$$(2.1) \quad u = u_0 + \partial \psi' / \partial y, \quad v = v_0 - \partial \psi' / \partial x, \\ \varphi = \varphi_0 + \varphi', \quad p = p_0 + p'$$

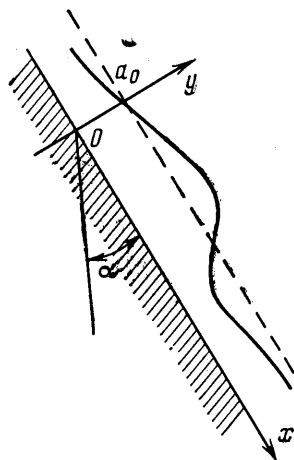
Волновое число k стационарных волновых режимов одного порядка с величиной k_m [1], которая предполагается малой в силу $\gamma \gg 1$. Поскольку дифференцирование по x в этом случае вносит малый множитель порядка k_m , введем переменную $x_1 = k_m x$. Из (1.5) видно, что для возмущений с $\varphi' \neq 0$ дифференцирование по t также вносит малый множитель. Функция φ' может быть представлена в виде $\varphi' = \varphi'(x, \tau_1, \tau_2, \dots)$, где $\tau_n = k_m^n t$.

Решения будем строить в виде ряда по степеням k_m . Хотя амплитуда начального возмущения плоскопараллельного движения произвольна, для стационарных периодических движений разложения для функций φ' , ψ' , p' начинаются с первой степени k_m , так как в противном случае уравнения не имеют нетривиальных решений, зависящих только от $x - ct$. Поэтому положим

$$(2.2) \quad \varphi' = k_m G \cos \alpha \varphi, \quad \psi' = k_m (G \cos \alpha)^2 \psi, \quad p' = k_m (G \cos \alpha)^2 p$$

и запишем разложение по степеням k_m для функции $f = (\varphi, \psi, p)$ в виде

$$(2.3) \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)} k_m^n$$



Фиг. 1

Подставляя (2.2) и выражения для x_1 , τ_1 и τ_2 в (1.1) — (1.5), опуская члены порядка k_m^2 и выше и приводя условия на свободной границе к $y=1$, получим

$$(2.4) \quad k_m \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau_1 \partial y} + k_m G \cos \alpha U_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial y} - k_m G \cos \alpha \frac{dU_0}{dy} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \\ = -k_m \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

$$0 = -\partial p / \partial y - k_m \partial^3 \psi / \partial x_1 \partial y^2$$

$$(2.5) \quad y=0, \quad \psi = \partial \psi / \partial y = 0$$

$$(2.6) \quad y=1, \quad \partial^2 \psi / \partial y^2 + \varphi d^2 U_0 / dy^2 + k_m G \cos \alpha \varphi \partial^3 \psi / \partial y^3 = 0$$

$$(2.7) \quad p + A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \operatorname{tg} \alpha \frac{dP_0}{dy} \varphi + 2k_m \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial y} + k_m G \cos \alpha \varphi \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$A = \gamma G^{1/2} k_m^2 / G \cos \alpha$$

$$(2.8) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} + k_m \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_2} + G \cos \alpha U_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + G \cos \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \\ + k_m (G \cos \alpha)^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial y} \varphi \right) = 0$$

При этом учитываем, что величина A в силу (1.7) порядка единицы. Подставим разложение (2.3) в (2.4) — (2.8) и будем приравнять члены одного порядка по k_m .

Из уравнений нулевого порядка получаем

$$(2.9) \quad \psi^{(0)} = 1/2 \varphi^{(0)} y^2, \quad p^{(0)} = -A \partial^2 \varphi^{(0)} / \partial x_1^2 + \operatorname{tg} \alpha \varphi^{(0)}, \\ \partial \psi^{(0)} / \partial \tau_1 + G \cos \alpha \partial \varphi^{(0)} / \partial x_1 = 0$$

Отсюда $\varphi^{(0)} = \varphi^{(0)}(\xi)$, где $\xi = x_1 - G \cos \alpha \tau_1$. Фазовая скорость волн $c = G \cos \alpha$, что соответствует результатам линейной теории.

Уравнения первого порядка по k_m имеют решение

$$(2.10) \quad \psi^{(1)} = G \cos \alpha \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \xi} \left(\frac{y^5}{120} - \frac{y^4}{24} \right) + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi} \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2} C(\xi) y^2, \\ \varphi^{(1)} = -\frac{1}{3} G \cos \alpha \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi} + C(\xi)$$

где функция $C(\xi)$ в рассматриваемом порядке не определена, и дают замкнутое нелинейное уравнение для $\varphi^{(0)}$

$$(2.11) \quad \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \tau_2} + \frac{1}{3} \gamma G^{1/2} k_m^2 \frac{\partial^4 \varphi^{(0)}}{\partial \xi^4} + \left[\frac{2}{15} (G \cos \alpha)^2 - \frac{1}{3} G \sin \alpha \right] \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial \xi^2} + \\ + 2 (G \cos \alpha)^2 \varphi^{(0)} \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \xi} = 0$$

Уравнение, получаемое из (2.11) посредством линеаризации, в соответствии с определением числа k_m как волнового числа нейтрального возмущения, должно обладать решением вида $\exp [ik_m(x - ct)] = \exp(i\xi)$. Отсюда следуют соотношения (1.7).

Уравнение (2.11) приводим к виду

$$(2.12) \quad \frac{\partial H}{\partial \tau} + \frac{\partial^4 H}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + 2H \frac{\partial H}{\partial \xi} = 0,$$

$$\tau = \frac{2}{15} G(G-G_*) \cos^2 \alpha \tau_2, \quad \varphi^{(0)} = \frac{2}{15} \frac{G-G_*}{G} H$$

Отметим, что уравнение вида (2.12) может быть получено также из уравнений, выведенных интегральным методом в [1], если сохранить в них только главные члены по k_m .

3. Рассмотрим стационарные периодические движения, которым соответствуют решения $H=H(\xi)$, $\partial H/\partial \tau=0$. Введем переменную $X=K\xi$, где $K=k/k_m$, k — волновое число стационарного режима. Для определения $H(X)$ имеем

$$(3.1) \quad K^4 \frac{d^4 H}{dX^4} + K^2 \frac{d^2 H}{dX^2} + 2KH \frac{dH}{dX} = 0$$

$$(3.2) \quad H(2\pi) = H(0), \quad \int_0^{2\pi} H(X) dX = 0$$

Здесь первое из соотношений (3.2) является условием периодичности решения, второе — следствием определения φ как отклонения от средней толщины пленки.

Вследствие симметрии уравнения (3.1) решение можно искать в виде разложения по набору нечетных функций $H_n = \sin nX$

$$(3.3) \quad H = \sum_{n=1}^N a_n(K) \sin nX$$

Результаты расчета, проведенного с $N=10$, для нескольких первых гармоник приведены на фиг. 2 (линия 1 — a_1 , 2 — a_2 , 3 — a_3 , 4 — $a_4 \cdot 10^2$). При $K \rightarrow 1$ $a_n(K) \sim (1-K)^{n/2}$. Отметим, что величина

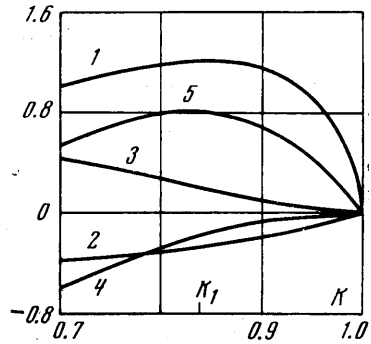
$$\langle H^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H^2 dX = \frac{1}{2} \sum_n a_n^2$$

(линия 5 на фиг. 2) имеет максимум при $K=K_1 \approx 0.84$. Таким образом, построено семейство решений (3.3), соответствующих стационарным периодическим волновым режимам.

Перейдем к исследованию устойчивости этих режимов. Для бесконечно малых возмущений $h(\xi) \exp(-\lambda\tau)$, наложенных на решение $H(\xi)$, получаем линейное уравнение

$$(3.4) \quad -\lambda h + \frac{d^4 h}{d\xi^4} + \frac{d^2 h}{d\xi^2} + 2H(\xi) \frac{dh}{d\xi} + 2 \frac{dH(\xi)}{d\xi} h = 0$$

Собственные значения λ определяются из требования ограниченности h при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Так как $H(\xi)$ — периодическая функция ξ с периодом $2\pi/K$, произвольное ограниченное решение уравнения (3.7) может быть выбрано в виде $h = \exp(iQ\xi)F(\xi)$, где $F(\xi)$ — периодическая функция с периодом $2\pi/K$, Q — вещественное число. Величина Q , очевидно, определена с точностью до целого кратного K ; для определенности можно выбрать $|Q| \leq K/2$.



Фиг. 2

Пусть сначала $Q=0$ (h — периодическая функция с периодом $2\pi/K$). Легко видеть, что всегда существует возмущение с $Q=0$, для которого $\lambda=0$. Это возмущение $h=dH/d\xi$, соответствующее бесконечно малому сдвигу решения H по ξ . Поэтому при Q , близком к нулю, всегда существует нормальная мода, для которой $|\operatorname{Re} \lambda|$ мало, так что эта область представляет особый интерес с точки зрения устойчивости.

Пусть Q мало. Запишем (3.4), перейдя к переменной $X=K\xi$. Ищем решение в виде

$$(3.5) \quad h = F \exp(iQ_1 X), \quad F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n Q_1^n, \quad \lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Q_1^n, \quad Q_1 = Q/K$$

где F_n — периодические функции X с периодом 2π .

В нулевом порядке по Q_1 имеем

$$-\lambda_0 F_0 + K^4 F_0^{IV} + K^2 F_0'' + 2K(HF_0' + H'F_0) = 0$$

(штрих означает дифференцирование по X). Выбираем решение $F_0 = H'$, $\lambda_0 = 0$.

Левая часть уравнения для F_i ($i=1, 2, \dots$) представляет собой производную от периодической функции, поэтому интеграл от правой части по X в пределах от 0 до 2π должен обращаться в нуль. Функции F_i определены с точностью до произвольного решения однородного уравнения $\operatorname{const} H'$, что связано с неопределенностью нормировки функции F ; для устранения этой неопределенности положим

$$\int_0^{2\pi} dX F_0 F_i = 0, \quad i \neq 0$$

В первом порядке по Q_1 получаем

$$(3.6) \quad K^4 F_1^{IV} + K^2 F_1'' + 2K(HF_1)' = \lambda_1 H' - i(4K^4 H^{IV} + 2K^2 H'' + 2KH H')$$

Продифференцируем уравнение (3.1) по параметру K

$$(3.7) \quad K^4 \left(\frac{\partial H}{\partial K} \right)^{IV} + K^2 \left(\frac{\partial H}{\partial K} \right)'' + 2K \left(H \frac{\partial H}{\partial K} \right)' = -(4K^3 H^{IV} + 2KH'' + 2HH')$$

Сравнивая (3.6) и (3.7), находим

$$F_1 = \lambda_1 / 2K + iK \partial H / \partial K$$

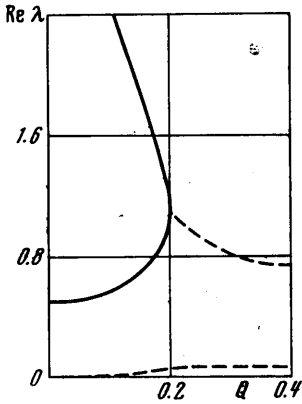
Из условия существования периодического решения уравнения для функции F_2 находим

$$(3.8) \quad \lambda_1^2 = -4K^2 \int_0^{2\pi} H \frac{\partial H}{\partial K} \frac{dX}{2\pi} = -2K^2 \frac{d\langle H^2 \rangle}{dK}$$

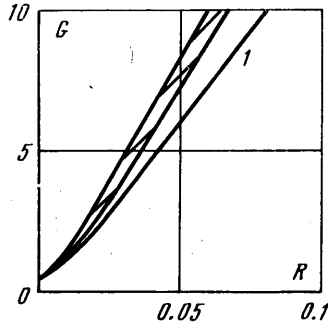
Если $K > K_1$ (см. фиг. 2), то $d\langle H^2 \rangle / dK < 0$, $\lambda_1^2 > 0$; в этом случае существуют два вещественных корня $\pm \sqrt{\lambda_1^2}$ противоположного знака, один из которых всегда отрицателен, поэтому стационарные волновые движения с $K > K_1$ неустойчивы. При $K < K_1$, $\lambda_1^2 < 0$ (два мнимых корня); устойчивость движения по отношению к возмущениям с малыми Q в этом случае зависит от знака величины λ_2 , которая может быть получена аналогичным образом из уравнения третьего порядка по Q_1 . Функции, входящие в выражение для λ_2 , определялись в виде рядов Фурье с точностью до четырех

гармоник. Расчеты показали, что в области $K < K_1$, $\lambda_2 > 0$ при $K > K_2 \approx 0.77$. Таким образом, стационарные волновые режимы, для которых $K = k/k_m$ лежит внутри интервала $K_2 < K < K_1$, устойчивы по отношению к возмущениям с малыми Q .

Для произвольных Q спектр декрементов затухания был получен методом Галеркина с семью базисными функциями. Установлено, что в интервале $K_2 < K < K_1$ стационарное движение устойчиво по отношению к любым бесконечно малым плоским возмущениям. Характерная картина спектра декрементов в области устойчивости волновых режимов для наиболее



Фиг. 3



Фиг. 4

медленно затухающих возмущений приведена на фиг. 3 (сплошные линии соответствуют вещественным декрементам, штриховые — парам комплексно-сопряженных декрементов; $K=0.8$).

Таким образом, в рамках двумерной задачи устойчивы стационарные волновые режимы, для которых

$$0.77 < K < 0.84, \quad K = k/k_m$$

(см. фиг. 4; заштрихована область устойчивых движений; линия 1 — нейтральная кривая устойчивости плоскопараллельного движения; $\gamma=2850$, $\alpha=10^\circ$). Существование подынтервала устойчивых вторичных движений ранее было установлено в ряде задач о движении жидкости между твердыми границами [13–15], в которых нейтральная кривая устойчивости имеет минимум при отличном от нуля значении волнового числа k . При этом интервал волновых чисел устойчивых движений был относительно широк. Например, в задаче о движении между коаксиальными цилиндрами он лишь в $\sqrt{3}$ раз уже, чем интервал волновых чисел для нарастающих возмущений основного движения. Для волновых движений в пленке интервал, в котором лежат волновые числа устойчивых движений, значительно уже ($\Delta k \approx 0.07k_m$). Это может быть причиной того, что в эксперименте не наблюдается значительного разброса значений волнового числа.

Автор благодарит Е. М. Жуховицкого за постановку задачи и постоянное внимание к работе, Г. И. Петрова и участников его семинара, особенно В. Я. Шкадова, а также Г. З. Гершуни, В. А. Брискмана, Л. Н. Маурина за ценное обсуждение.

Поступила 19 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
2. Шкадов В. Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 2.

3. *Иванов Ю. П., Пашина Л. В.* Устойчивость длинных волн в потоке вязкой несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.
 4. *Капица П. Л., Капица С. П.* Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. III. Опытное изучение волнового режима течения. ЖЭТФ, 1949, т. 19, вып. 2.
 5. *Yih C. S.* Stability of liquid flow down an inclined plane. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3.
 6. *Lin S. P.* Instability of a liquid film flowing down an inclined plane. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No 2.
 7. *Капица П. Л.* Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. 1. Свободное течение. ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 1.
 8. *Иванов Ю. П.* Катящиеся волны в наклонном канале. Ж. вычислит матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.
 9. *Маурин Л. Н., Сорокин В. С.* О волновом течении тонких слоев вязкой жидкости. ПМТФ, 1962, № 4.
 10. *Шкадов В. Я., Холпанов Л. П., Малюсов В. А., Жаворонков Н. М.* К нелинейной теории волновых течений пленки жидкости. Теорет. основы хим. технологии, 1970, т. 4, № 6.
 11. *Gjevik B.* Occurrence of finite-amplitude surface waves on falling liquid films. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 8.
 12. *Penev V., Krylov V. S., Boyadjiev Ch., Vorotilin V. R.* Wavy flow of thin liquid films. Internat. J. Heat Mass Transfer, 1972, vol. 15, No. 7.
 13. *Eckhaus W.* Studies in non-linear stability theory. Berlin, Springer, 1965.
 14. *Kogelman S., Di Prima R. C.* Stability of spatially periodic supercritical flow in hydrodynamics. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 1.
 15. *Schlüter A., Lortz D., Busse F.* On the stability of steady finite-amplitude convection. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt 1.
-