

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ С МАССООБМЕНОМ

Н. А. ЖЕЛТУХИН, В. В. ЗАМЕТАЛИН, Н. М. ТЕРЕХОВА

(Новосибирск)

В работе исследуется устойчивость пограничных слоев с массообменом, описываемых двухпараметрическим семейством решений Фокнера — Скэн. Предлагается эффективный метод решения краевой задачи для уравнения Фокнера — Скэн. Для решения уравнения устойчивости предлагается детерминантный метод. В широком диапазоне изменения параметров градиентности и массообмена найдены критические значения характеристик устойчивости.

Известно много работ, посвященных изучению раздельного влияния градиентности потока и отсоса (вдува) на устойчивость пограничного слоя. Исследования в основном базировались на использовании однопараметрического семейства решений Фокнера — Скэн (свободные результаты можно найти в [1-3]) и Польгаузена [1, 3, 4]. Влияние отсоса на устойчивость рассматривалось, например, в [1, 3, 5]. Однако до последнего времени изучение одновременного влияния этих факторов на устойчивость пограничного слоя не проводилось. Этот вопрос затронут лишь в [6].

В данной работе исследуется устойчивость автомодельных пограничных слоев, в которых профиль безразмерной скорости u представлен двухпараметрическим семейством решений Фокнера — Скэн $u = \Phi'(\xi, \beta, \gamma)$, где β — параметр градиентности, γ — параметр массообмена, ξ — безразмерная координата. Такой подход использован потому, что семейство решений Фокнера — Скэн является базисным для построения профилей скорости в практически интересных случаях (стреловидное крыло и т. д.) и на его основе строится ряд приближенных и точных методов расчета пограничного слоя. Полученные здесь результаты расширяют возможности применения этого семейства решений. Предлагается метод решения краевой задачи для уравнения Фокнера — Скэн при наличии нормальной составляющей скорости на границе. Для решения уравнения Орра — Зоммерфельда применен детерминантный метод. В широком диапазоне изменения параметров β и γ найдены критические значения характеристик устойчивости (волновое число α_* , число Рейнольдса Re_* , фазовая скорость возмущений C_*).

1. Профиль скорости. Рассмотрим важный класс точных решений уравнения пограничного слоя, соответствующий внешнему обтеканию $u_0 = c_0 x^m$ (x , u_0 — размерная координата и скорость, c_0 и m — произвольные постоянные).

Профили скорости в этом случае могут быть представлены двухпараметрическим семейством $u = \Phi'(\xi, \beta, \gamma)$, где Φ — решение уравнения Фокнера — Скэн [3]

$$(1.1) \quad \Phi''' = -\Phi\Phi'' + \beta(\Phi'^2 - 1), \quad \beta = 2m(m+1)^{-1}$$

$$(1.2) \quad \Phi = \gamma, \quad \Phi' = 0 \quad (\xi = 0), \quad v_0(x) \sim \gamma x^{\beta-1}, \quad \Phi' = 1 \quad (\xi = \delta)$$

где v_0 — нормальная скорость на стенке ($\gamma > 0$ — отсос, $\gamma < 0$ — вдув в пограничный слой), δ — толщина слоя.

Основная трудность при нахождении эпюры скоростей состоит в решении краевой задачи (1.1), (1.2), осложненной тем, что $\delta = \delta(\beta, \gamma)$. Существующие методы расчета, графоаналитический и дифференциальных поправок, громоздки и малоэффективны. Ниже излагается метод динамических переменных, позволяющий с наименьшими затратами свести краевую задачу (1.1), (1.2) к задаче Коши.

Для удобства разобьем поле обтекания на область I — пограничный слой $0 \leq \xi \leq \delta^-$, $0 \leq u \leq 1 - \varepsilon$; область II — потенциальное течение $\delta^+ \leq \xi \leq \infty$, $1 - \varepsilon \leq u \leq 1$. Здесь $\varepsilon = 10^{-4}$. Проведем в (1.1) замену переменных. В качестве независимой переменной выберем $F = \Phi'(\xi)$, а зависимых — $f(F) = \Phi(\xi)$ и $\chi(F) = \Phi''(\xi)$.

Уравнение (1.1) для функций f и χ в переменных F примет вид

$$(1.3) \quad \frac{df}{dF} = F\chi^{-1}, \quad \frac{d\chi}{dF} = -\chi^{-1}[f\chi - \beta(F^2 - 1)]$$

Система (1.3) интегрируется в области I ($0 \leq F \leq F_k$, $F_k = 1 - \varepsilon$) для всех значений β и γ . Следует заметить, что описываемым методом можно рассчитать только течения без перегибов профиля скорости, так как $\chi = 0$ является особой точкой системы (1.3).

Сформируем краевые условия для (1.3). В области II представим функцию Φ и ее производные в виде

$$(1.4) \quad \Phi(\xi) = b + \xi + g(\xi), \quad \Phi'(\xi) = 1 + g'(\xi), \quad \Phi''(\xi) = g''(\xi)$$

Здесь b — произвольная постоянная, функция g выбрана так, что

$$g(\xi) \rightarrow 0, \quad g'(\xi) \rightarrow 0, \quad g''(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty$$

Поэтому при достаточно больших ξ можно с хорошей точностью положить $\Phi(\xi) = \xi$.

При этих предположениях уравнение (1.1) можно линеаризовать и представить в виде

$$(1.5) \quad g'''(\xi) = 2\beta g'(\xi) - \xi g(\xi)$$

В точке $\xi = \delta$ потребуем выполнения условий

$$g'(\delta^-) = g'(\delta^+), \quad g''(\delta^-) = g''(\delta^+) \\ z(\delta^-) = z(\delta^+), \quad z = g'/g''$$

Для функции z уравнение (1.5) запишется в виде

$$(1.6) \quad z' = 1 + \xi z - 2\beta z^2$$

Решение (1.6) можно найти как прямым интегрированием, так и методом разложения в ряд.

Хорошие результаты получаются для ряда следующего вида:

$$(1.7) \quad z = a_1/\Phi + a_3/\Phi^3 + a_5/\Phi^5 + a_7/\Phi^7, \quad a_1 = -1, \quad a_3 = 1 + 2\beta \\ a_5 = -(3 + 4\beta)a_3, \quad a_7 = (15 + 34\beta + 24\beta^2)a_3$$

Задав значение f на границе областей произвольно ($f(F_k) = \text{const}$), из (1.4), (1.7) получим значение

$$(1.8) \quad \chi = -\varepsilon z^{-1}$$

и таким образом определим граничные условия для системы (1.3).

Для выбранного $f(F_k)$ получаем $f(0) = \gamma$, $\chi(0) = \Phi''(0)$. Варьируя, легко найти $\Phi''(0)$ для заданного γ и, следовательно, граничные условия для (1.1).

2. Детерминантный метод расчета гидродинамической устойчивости. Задача об устойчивости плоскопараллельных потоков вязкой несжимаемой жидкости к малым возмущениям в линейной постановке сводится к краевой

задаче для уравнения Орра – Зоммерфельда [3]

$$(2.1) \quad \varphi^{IV} = A\varphi'' - B\varphi, \quad A = i\alpha \operatorname{Re}(u-C) + 2\alpha^2 \\ B = i\alpha \operatorname{Re}[(u-C)\alpha^2 + u''] + \alpha^4, \quad \operatorname{Re} = u_0 \delta^* / \nu$$

$$(2.2) \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi(\infty) = \varphi'(\infty) = 0$$

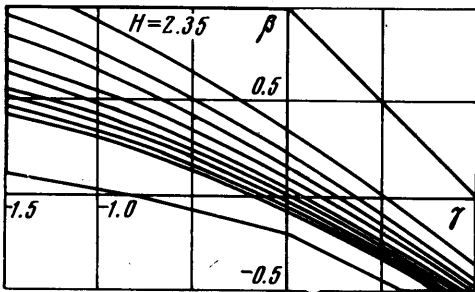
где φ – амплитуда возмущения функции тока.

Обозначим два частных решения (2.1), удовлетворяющих (2.2), через φ_1, φ_2 . Краевые условия на стенке приводят к задаче об отыскании нулей детерминанта

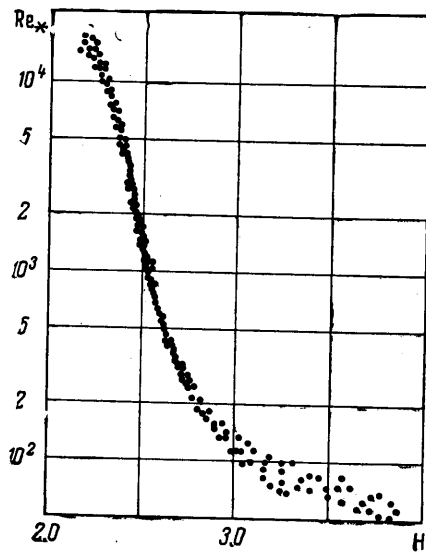
$$D = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix}$$

что возможно, когда C – собственное значение (2.1).

Как известно, непосредственному решению краевой задачи (2.1), (2.2) мешает то обстоятельство, что одно из решений (назовем его быстрорасту-



Фиг. 1



Фиг. 2

щим, $\varphi_1 \sim \exp(\sqrt{V \operatorname{Re}})$ проявляет свое доминирующее свойство, и построить два линейно-независимых решения не удастся.

В настоящее время известен ряд методов, успешно преодолевших эту трудность. Одним из них является детерминантный.

Введением новых зависимых переменных, представляющих собой миноры матриц фундаментальных решений

$$(2.3) \quad D_1 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} \varphi_1'' & \varphi_2'' \\ \varphi_1''' & \varphi_2''' \end{vmatrix} \\ D_4 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1''' & \varphi_2''' \end{vmatrix}, \quad D_5 = \begin{vmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1''' & \varphi_2''' \end{vmatrix}, \quad D_6 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' \end{vmatrix}$$

можно свести (2.1) к системе шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$(2.4) \quad D_1' = D_6, \quad D_2' = D_5, \quad D_3' = B D_6 \\ D_4' = D_5 + A D_6, \quad D_5' = D_3 + B D_1 + A D_2, \quad D_6' = D_2 + D_4$$

Здесь функции D_i имеют один порядок роста, определяемый φ_1 . Нормировкой $Y_i = D_i/D_6$ можно этот порядок понизить. Тогда для Y_i найдем

$$(2.5) \quad Y_1' = 1 - Y_1(Y_2 + Y_4), \quad Y_2' = Y_1 Y_3 - Y_2^2, \quad Y_3' = B - Y_3(Y_2 + Y_4) \\ Y_4' = A + Y_1 Y_3 - Y_4^2, \quad Y_5 = Y_1 Y_3 + Y_2 Y_4$$

Из условий (2.2) нетрудно получить краевые условия для функций (2.3).

Из бесконечности условия (2.2) переносятся на достаточно большие ξ там, где $u \rightarrow 1$, $u'' \rightarrow 0$. Тогда условия непрерывности и ограниченности возмущений принимают вид

$$(2.6) \quad \varphi''' + \alpha\varphi'' - \kappa^2(\varphi' + \alpha\varphi) = 0, \quad \varphi''' + \kappa\varphi'' - \alpha^2(\varphi' + \kappa\varphi) = 0, \quad \kappa^2 = A - \alpha^2$$

Один из возможных вариантов определения φ_1 и φ_2 следующий:

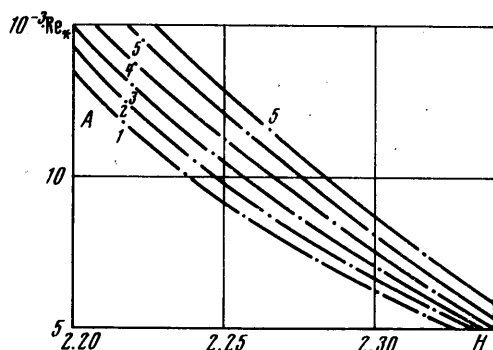
$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_1' = -\kappa, \quad \varphi_1'' = \kappa^2, \quad \varphi_1''' = -\kappa^3 \\ \varphi_2 = 0, \quad \varphi_2' = 1, \quad \varphi_2'' = -(\alpha + \kappa), \quad \varphi_2''' = \alpha^2 + \alpha\kappa + \kappa^2$$

Тогда для Y_i граничные условия запишутся ($k = -(\alpha + \kappa)^{-1}$) так:

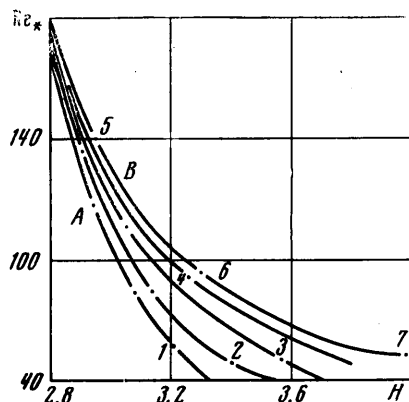
$$Y_1 = k, \quad Y_2 = \alpha\kappa k, \quad Y_3 = \alpha^2\kappa^2 k, \quad Y_4 = (\alpha^2 + \alpha\kappa + \kappa^2)k$$

Из условий (2.2) $Y_1 = 0$ при $\xi = 0$.

3. Результаты и обсуждение. Для сопоставления предложенного метода решения задач гидродинамической устойчивости с другими численными



Фиг. 3



Фиг. 4

методами была построена кривая нейтральной устойчивости профиля Блазиуса. Значения параметров устойчивости в критической точке ($Re_* = 519$, $\alpha_* = 0.301$, $C_* = 0.396$) хорошо согласуются с имеющимися численными расчетами [1-3, 7].

В работе для исследуемого двухпараметрического семейства в широком диапазоне изменения параметров β и γ (фиг. 1) с шагом $\Delta\beta = \Delta\gamma = 0.1$ найдены критические значения параметров устойчивости. Предельная линия в области $\beta < 0$ соответствует профилю отрывных течений $u'(0) = 0$; в области $\beta > 0$, $\gamma > 0$ значение $Re_* \sim 2 \cdot 10^4$. Полученные зависимости $Re_* = Re_*(\beta, \gamma)$ имеют двухпараметрический характер, но параметры β и γ неудобны для

использования. Естественно заменить их универсальными характеристиками пограничного слоя, такими как форм-параметры

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}, \quad T = \frac{\delta^*}{u_0} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad f = \frac{\delta^{**2}}{u_0} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right)_{y=0}$$

Зависимость $Re_* = Re_*(H)$ с учетом расслоения по параметрам β и γ представлена на фиг. 2. Оказалось, что на сетке (β, γ) можно выделить область, соответствующую значениям $2.35 \leq H \leq 2.75$, где в некотором приближении (относительная погрешность 5–7%) двухпараметрическая зависимость $Re_* = Re_*(\beta, \gamma)$ может быть заменена однопараметрической $Re_* = Re_*(H)$.

На фиг. 1 представлены эквивалентные линии H для параметров β и γ из этой области (шаг $\Delta H = 0.05$). Для больших и малых значений H (вне области) четко прослеживается двухпараметрический характер зависимости Re_* (β, γ), сопровождающийся расслоением кривой $Re_*(H)$.

На фиг. 3 для $H < 2.35$ приведены зависимости $Re_* = Re_*(H)$ для семейства $\beta = \text{const}$, начиная от $\beta = 0$ (кривая А) до $\beta = 1$ с шагом 0.2. Точками 1, 2, 3, ... обозначены начальные значения $\gamma = 0, 0.2, 0.4, \dots$. Вдоль кривых $\beta = \text{const}$ γ меняется с шагом $\Delta\gamma = -0.2$.

Те же зависимости показаны на фиг. 4 для $H > 2.8$. Здесь значение β меняется от 0.2 (кривая А) до -0.1 с шагом $\Delta\beta = -0.1$. Параметр γ изменяется вдоль каждой кривой $\beta = \text{const}$ от значений $\gamma = -1.4, -1.0, -0.6, -0.2$, обозначенных цифрами 1, 2, 3, 4 с интервалом $\Delta\gamma = 0.2$. Кроме того, на фиг. 4 (кривая В) приводятся значения Re_* для чисто градиентного течения ($\gamma = 0$). Номерам 5, 6, 7 соответствуют значения $\beta = -0.14, -0.18, -0.1899$.

Подобные же закономерности наблюдаются и для зависимостей $Re_*(T)$ и $Re_*(\gamma)$.

Поступила 5 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Басин А. М., Короткин А. И., Козлов Л. Ф. Управление пограничным слоем судна. Л., «Судостроение», 1968.
2. Гапонов С. А., Володин А. Г. Устойчивость несжимаемого пограничного слоя. Изв. СО АН СССР, Сер. техн., 1970, вып. 2, № 8.
3. Шлигтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
4. Володин А. Г., Гапонов С. А. Устойчивость профилей скорости семейства Польгаузена. Изв. СО АН СССР, Сер. техн., 1970, вып. 2, № 8.
5. Гапонов С. А., Левченко В. Я., Соловьев А. С. Устойчивость пограничного слоя на плоской пластине с однородным отсасыванием. Изв. СО АН СССР, Сер. техн., 1970, вып. 2, № 8.
6. Левченко В. Я., Соловьев А. С. Об устойчивости пограничного слоя при наличии градиента давления и отсоса. Изв. СО АН СССР, Сер. техн., 1970, вып. 2, № 8.
7. Kurtz E. E., Crandall S. H. Computer-aided analysis of hydrodynamic stability. J. Math. Phys., 1962, vol. 47.