точкам, характеризующим максимальные изменения давления (для нахождения ударных волн) и температуры торможения (для нахождения контактных разрывов).

Анализ численного решения подтверждает основные качественные свойства, установленные выше и в [6, 7], а именно:

1) звуковая линия, отделяющая область дозвуковых скоростей за отошедшей ударной волной, попадает в точку A.

2) в точке A звуковая линия ортогональна вектору скорости за ударной волной. В угловой точке на теле звуковая линия ортогональна «дозвуковому» направлению касательной к телу;

3) на звуковой линии существует точка K_+ выпуклости звуковой линии по отношению к ортогональным траекториям линий тока;

4) углы между касательными к контактному разрыву, полученные в расчетах, хорошо согласуются с результатами аналитического исследования (расчетные точки на фиг. 4 отмечены крестиками).

Поступила 26 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Еремин В. В., Липницкий Ю. М.* Разностная схема 3-го порядка точности для расчета двумерных течений с контактным разрывом. Научн. тр. Ин-та механ. МГУ, 1972, № 19.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
3. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
4. *Гудерлей К. Г.* Теория околозвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
5. *Никольский А. А., Таганов Г. И.* Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
6. *Шифрин Э. Г.* К задаче обтекания бесконечного клина сверхзвуковой струей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
7. *Шифрин Э. Г.* К задаче обтекания профиля равномерной сверхзвуковой струей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4.

УДК 533.6.011.34

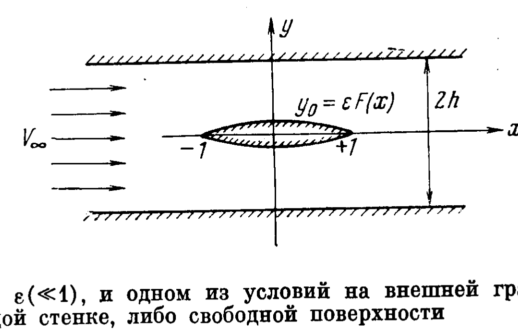
ТОНКОЕ ТЕЛО В ОГРАНИЧЕННОМ ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

В. И. ХОЛЯВКО

(Харьков)

Рассматривается обтекание под нулевым углом атаки тонкого тела (симметричный профиль и тело вращения) установившимся невязким дозвуковым потоком газа, ограниченного твердой стенкой или свободной поверхностью. Решение задач ведется интегральным методом Фурье. Получены соотношения для тел с произвольным контуром и формой боковой поверхности и установлены асимптотические формулы для оценки предельных случаев течения. Проводится анализ влияния границ потока и эффекта сжимаемости на характеристики течения.

1. Расчет характеристик течения состоит в решении линеаризованного уравнения газовой динамики для потенциала скорости возмущений



$$\beta^2\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+(j/y)\varphi_y=0,\quad \beta^2=1-M_\infty^2 \tag{1.1}$$

при граничном условии на поверхности тела

$$\varphi_y=v_\infty\varepsilon F'(x),\quad y=y_0=\varepsilon F(x),\quad -1\leqslant x\leqslant 1 \tag{1.2}$$

где ε – относительная толщина тела $\varepsilon(\ll 1)$, и одном из условий на внешней границе потока, отвечающем либо твердой стенке, либо свободной поверхности

$$\varphi_y=0,\qquad \varphi_x=0\quad (y=h) \tag{1.3}$$

В уравнении (1.1) значение $j=0$ относится к плоскому течению и $j=1$ – к осесимметричному. Геометрия рассматриваемого течения показана на фигуре. Все линейные размеры отнесены к половине длины тела.

Представим функцию $F'(x)$ в виде интеграла Фурье

$$F'(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^\infty F'(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi$$

Тогда граничное условие (1.2) запишется в следующем виде:

$$\varphi_y=\frac{v_\infty\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^\infty F'(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi \tag{1.4}$$

В плоском потоке ($j=0$) это граничное условие, заданное на поверхности тела $y=y_0$, можно снести на ось $y=0$. Кроме того, в плоской задаче достаточно ограничиться изучением верхней половины течения $0\leqslant y\leqslant h$.

Общее решение уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями построим методом суперпозиций частных решений. Ниже подробно разобран случай обтекания профиля в канале с твердыми стенками. Для задач о профиле в потоке со свободными границами и теле вращения в цилиндрическом канале выписаны конечные результаты.

2. Разделяя переменные и учитывая первое условие (1.3), получим частные решения уравнения (1.1) при $j=0$

$$\varphi_n(x,y)=A_n\operatorname{ch}n\beta(h-y)\cos n(\xi_n-x)$$

Просуммируем все бесконечное количество этих частных решений, полагая $n=\lambda$, $\zeta_n=\zeta$, $A_n=f_1(\lambda)f_2(\xi)\,d\lambda d\xi$ для $0\leqslant\lambda\leqslant\infty$, $-\infty\leqslant\zeta\leqslant\infty$

$$\varphi(x,y)=\int_0^\infty f_1(\lambda)\operatorname{ch}\lambda\beta(h-y)\,d\lambda\int_{-\infty}^\infty f_2(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi \tag{2.1}$$

Решение (2.1) содержит две произвольные функции ($f_1(\lambda)$ и $f_2(\xi)$), которые определяются из граничного условия (1.4). Сравнивая производную (2.1) по y при $y=0$ с условием (1.4), устанавливаем, что

$$f_1(\lambda)=\frac{1}{\operatorname{sh}\lambda\beta h},\qquad f_2(\xi)=-\frac{v_\infty\varepsilon}{\pi\beta}F'(\xi)$$

После подстановки этих значений $f_1(\lambda)$ и $f_2(\xi)$ в (2.1) и соответствующих преобразований (при этом предполагается, что можно менять порядок интегрирования) получим решение задачи обтекания тонкого профиля в канале с твердыми стенками

$$\varphi(x,y)=\frac{v_\infty\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^\infty F'(\xi)\ln\left[\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{\beta h}-\cos\frac{\pi y}{h}\right]d\xi \tag{2.2}$$

В формуле (2.2) интегрирование можно проводить на конечном отрезке $-1\leqslant\xi\leqslant1$.

Для определения коэффициента давления воспользуемся линеаризованным уравнением Бернулли $c_p=-2\varphi_x/v_\infty$. В частности, на поверхности профиля ($y=0$) будем иметь

$$c_p=\frac{\varepsilon}{\beta^2h}\int_{-\infty}^\infty F'(\xi)\operatorname{cth}\frac{\pi(\xi-x)}{2\beta h}\,d\xi \tag{2.3}$$

Если в формулах (2.2) и (2.3) положить $h=\infty$, то получим решение задачи обтекания профиля безграничным потоком

$$\varphi_\infty(x,y)=\frac{v_\infty\varepsilon}{2\pi\beta}\int_{-\infty}^\infty F'(\xi)\ln[(\xi-x)^2+\beta^2y^2]\,d\xi,\qquad c_{p_\infty}=\frac{2\varepsilon}{\pi\beta}\int_{-\infty}^\infty\frac{F'(\xi)\,d\xi}{\xi-x} \tag{2.4}$$

Оценим влияние границ потока на распределение давления по профилю для случая $h\gg1$. Если ограничиться первыми двумя членами разложения в гиперболическом котангенсе формулы (2.3), то получим

$$c_p = c_{p_\infty} + \frac{\pi\varepsilon}{6\beta^3 h^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F'(\xi)(\xi - x)\,d\tau = c_{p_\infty} - \frac{\pi\omega}{12\beta^3 h^2}, \qquad \omega = 2\varepsilon\int\limits_{-1}^{1} F(\xi)\,d\xi \tag{2.5}$$

где ω – площадь сечения профиля. Последнее равенство в (2.5) справедливо при $F(-1)=F(1)=0$.

Согласно (2.5) асимптотическая добавка к давлению на поверхности профиля от влияния границ потока пропорциональна $\beta^{-3}h^{-2}$ и является постоянной по длине хорды.

3. Решение задачи обтекания профиля для случая, когда границей течения является свободная поверхность, ведется аналогично изложенному выше с использованием второго условия (1.3). Приведем некоторые конечные результаты.

Потенциал скорости возмущений и распределение давления по поверхности профиля определяются следующим образом:

$$\varphi(x, y) = -\frac{v_\infty\varepsilon}{2\pi\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F'(\xi)\ln\frac{\operatorname{ch}\xi' + \cos y'}{\operatorname{ch}\xi' - \cos y'}\,d\xi \tag{3.1}$$

$$c_p = \frac{\varepsilon}{\beta^2 h}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F'(\xi)\operatorname{csch}\xi'\,d\xi \qquad \left(\xi' = \frac{\pi(\xi - x)}{2\beta h}, \quad y' = \frac{\pi y}{2h}\right)$$

При $h \gg 1$ с учетом первых двух членов разложения в гиперболическом косекансе из (3.1) получаем

$$c_p = c_{p_\infty} + \pi\omega/24\beta^3 h^2 \tag{3.2}$$

Согласно (3.2) асимптотическая добавка к давлению на профиле в потоке со свободной поверхностью в 2 раза меньше по абсолютному значению, чем в канале с твердыми стенками.

4. Общее решение задачи обтекания тела вращения в цилиндрической трубе записывается в следующем виде:

$$\varphi(x, r) = -\frac{v_\infty\varepsilon}{\pi\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F'(\xi)\,d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\frac{I_n(\lambda\beta h)K_0(\lambda\beta r) \pm I_0(\lambda\beta r)K_n(\lambda\beta h)}{I_n(\lambda\beta h)K_1(\lambda\beta r_0) \mp I_1(\lambda\beta r_0)K_n(\lambda\beta h)} \times \tag{4.1}$$

$$\times \cos\lambda(\xi - x)\frac{d\lambda}{\lambda}$$

где I и K – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно; верхние знаки и значение индекса $n=1$ относятся к задаче с твердыми стенками, а нижние знаки и $n=0$ – к задаче со свободной поверхностью. Здесь введены общепринятые обозначения цилиндрических координат с заменой y на r. Предельный случай тонкого тела в ограниченном потоке получается из (4.1) при $r_0 \to 0$

$$\varphi(x, r) = \varphi_\infty(x, r) \mp \frac{v_\infty}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S'(\xi)\,d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\frac{K_n(\lambda\beta h)}{I_n(\lambda\beta h)}I_0(\lambda\beta r)\cos\lambda(\xi - x)\,d\lambda \tag{4.2}$$

$$\varphi_\infty(x, r) = -\frac{v_\infty}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{S'(\xi)\,d\xi}{[(\xi - x)^2 + \beta^2 r^2]^{1/2}}, \qquad S(\xi) = \pi r_0^2 = \pi\varepsilon^2 F^2(\xi)$$

где $S(\xi)$ – площадь поперечного сечения тела, а $\varphi_\infty(x, r)$ – решение задачи обтекания тонкого тела вращения безграничным потоком (оно может быть получено из (4.1) при $h=\infty$, $r_0 \to 0$).

Если дополнительно принять $h \gg 1$, то из (4.2) следует выражение, справедливое в окрестности тела

$$\varphi(x, r) = \varphi_\infty(x, r) \mp \frac{v_\infty\beta h}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{S'(\xi)\,d\xi}{(\xi - x)^2 + 4\beta^2 h^2} + O(r^2) \tag{4.3}$$

В этом случае распределение давления по поверхности тела вращения определяется следующим образом:

$$c_p = c_{p_\infty} \pm \frac{4\beta h}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{S'(\xi)(\xi - x)\,d\xi}{[(\xi - x)^2 + 4\beta^2 h^2]^2} \tag{4.4}$$

или если пренебречь первым слагаемым в знаменателе, т. е. иметь в виду, что $4\beta^2 h^2 \gg (\zeta - x)^2$, то получим

$$c_p = c_{p_\infty} \mp \frac{\tau}{4\pi\beta^3 h^3}, \qquad \tau = \int\limits_{-1}^{1} S(\xi)\,d\xi \tag{4.5}$$

где τ – объем тела вращения.

В формулах (4.2) – (4.5) верхние знаки относятся к случаю твердых стенок, а нижние – к свободной границе.

Поступила 25 IV 1972

УДК 533.6.011

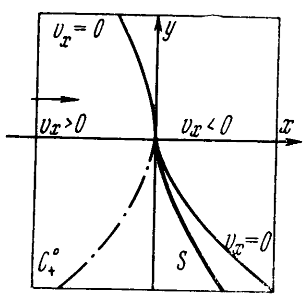
УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОДНОГО ТИПА ОКОЛОЗВУКОВЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ С УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

А. П. ЦВЕТКОВ

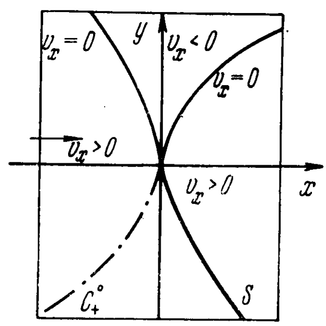
(*Саратов*)

В работе рассматривается вопрос о характере поведения околозвукового потока в окрестности точки встречи звуковой линии и ударной волны.

Изучаются автомодельные околозвуковые течения, в которых проходящий вдоль предельной характеристики разрыв производных (конечный разрыв первых или бесконечный разрыв вторых) компонент вектора скорости по координатам отражается



Фиг. 1



Фиг. 2

в виде ударной волны (фиг. 1, 2). Рассмотрение ведется при наличии только одной предельной характеристики в области сверхзвуковых скоростей.

В [1] были рассчитаны два примера течений вида, изображенного на фиг. 1, соответствующие значениям показателя автомодельности $n = 3/2$, $17/12$. Кроме того было найдено необходимое условие ($7/5 < n < 5/3$) существования рассматриваемых течений.

В [2, 3] подобные течения изучались, когда приходящая вдоль предельной характеристики особенность была конечным разрывом первых производных компонент вектора скорости по координатам ($1.4 < n < 1.5$). Значение $n = 1.40225$ характеризуется использованием для построения течения в области между предельной характеристикой и ударной волной решения типа простой волны.

Ниже указаны условия, необходимые и достаточные для существования течений видов, представленных на фиг. 1, 2. Поскольку изучение течений вида, изображенного на фиг. 2, проводится впервые, то интервал Жермена по n расширенный