

УДК 532.546

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ДВУХФАЗНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ К НЕСОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЕ В НЕФТЯНОМ ПЛАСТЕ

Ю. С. АБРАМОВ, В. Л. ДАНИЛОВ, Р. М. КАЦ

(Киев, Москва)

В работе метод зональной линеаризации [1] применен к решению пространственной задачи о совместной фильтрации нефти и подошвенной воды к несовершенной по степени вскрытия пласта скважине.

Приводится система интегродифференциальных уравнений динамики поверхностей равной насыщенности (изосат), которая справедлива как для безводного периода работы скважины, так и для периода прогрессирующего обводнения. Получено численное решение задачи, которое сопоставляется с приближенным аналитическим решением.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассматриваются бесконечный по протяженности пласт с непроницаемой кровлей, первоначальный нефтенасыщенный слой которого мощности h вскрыт на глубину b вертикальным линейным стоком-скважиной с объемным расходом Q . Водонасыщенная мощность пласта бесконечна (фиг. 1). Насыщающие пласт жидкости и порода считаются несжимаемыми, пористость пласта m постоянна, фильтрация ламинарная, различие плотностей нефти и воды и капиллярный эффект не учитываются.

Определим динамику поля водонасыщенности в пласте и закон изменения доли воды в продукции скважины, если в начальный момент времени $\tau=0$ в зоне $0 \leq z \leq h$ водонасыщенность s минимальна и равна остаточной водонасыщенности \bar{s} . В водной зоне $z \geq h$ водонасыщенность максимальна и равна \bar{s} (т. е. остаточная нефтенасыщенность $s_1=1-\bar{s}$). Относительные фазовые проницаемости для нефти и воды определены соответственно функциями $k_1(s)$ и $k_2(s)$.

После пуска скважины между плоскостью $\Gamma_N (z=h)$ и фронтовой изосатой Γ_0 образуется зона D совместной фильтрации нефти и воды, причем водонасыщенность s_0 на Γ_0 будет постоянной и равной насыщенности при одномерной фильтрации [2]. Водонасыщенность на Γ_N также останется постоянной и равной \bar{s} .

Предполагая, как и в решении Бакли-Левверетта, насыщенность в переходной зоне D монотонно убывающей от Γ_N к Γ_0 , построим поверхность равных насыщенностей $s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_i < \dots < s_N = \bar{s}$, разбивающие область D на N подобластей D_i (фиг. 1). В каждой из зон D_i выбирается некая средняя насыщенность $\langle s_i \rangle$ ($s_{i-1} < \langle s_i \rangle < s_i$), которой соответствует осредненный коэффициент фильтрации

$$c_i = c_{1i} + c_{2i}, \quad c_{1i} = k k_1(\langle s_i \rangle) \mu_1^{-1}, \quad c_{2i} = k k_2(\langle s_i \rangle) \mu_2^{-1}$$

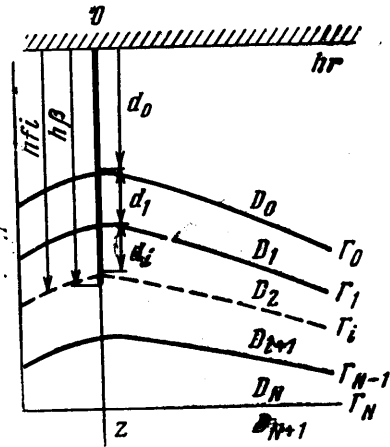
где k — абсолютная проницаемость, μ_1 и μ_2 — вязкости нефти и воды соответственно.

Как показано в [1], эта процедура приводит к тому, что в каждой из зон D_i осредненное давление p обращается в гармоническую функцию, а вся задача определения поля давлений в фиксированный момент времени сводится к задаче сопряжения гармонических функций при естественных условиях, выражающих требование непрерывности давления и суммарного потока при переходе через Γ_i и при условии непроницаемости кровли пласта

$$(1.1) \quad p^+ = p^-, \quad c_i (\partial p / \partial n_i)^+ = c_{i+1} (\partial p / \partial n_i)^-, \quad (\partial p / \partial z)_{z=0} = 0$$

Здесь n_i — внешняя к поверхности Γ_i нормаль (все Γ_i считаются поверхностями Ляпунова), индекс плюс — предельное значение при подходе к Γ_i изнутри, а индекс минус — предельное значение при подходе снаружи.

Скорость изосаты Γ_i (скорость распространения насыщенности заданной величины s_i) связывается с нормальной составляющей скорости фильтрации суммарного



Фиг. 1

потока v_{n_i} следующим образом [1]:

$$(1.2) \quad m(\partial s_i / \partial \tau)(\partial s_i / \partial n_i)^{-1} = v_{n_i} \partial F(s_i) / \partial s_i, \quad F(s) = [1 + k_1(s)k_2(s)\mu_2\mu_1^{-1}]^{-1}$$

где $F(s)$ — функция Бакли-Левверетта.

Представим давление p в форме

$$(1.3) \quad p = \varphi + \sum_{j=0}^N V_j$$

где φ — потенциал внешнего поля, учитывающий наличие линейного стока, V_j — потенциал простого слоя, распределенного по Γ_j .

Свойства потенциала простого слоя [3] позволяют удовлетворить условиям (1.1). Исключая давление из получающихся уравнений с помощью соотношений

$$(1.4) \quad c_i(\partial p / \partial n_i)^+ = c_{i+1}(\partial p / \partial n_i)^- = -v_{n_i}$$

после преобразований можно получить

$$(1.5) \quad v_{n_i} + \frac{a_i}{2\pi} \sum_{j=0}^N b_j \iint_{\Gamma_j} v_{v_j} \frac{\partial}{\partial n_i} (R_1^{-1} + R_2^{-1}) d\sigma = -2a_i \frac{\partial \varphi}{\partial n_i}$$

$$a_i = c_i c_{i+1} (c_i + c_{i+1})^{-1}, \quad b_i = c_i^{-1} c_{i+1}^{-1} (c_i - c_{i+1})$$

$$R_1 = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{1/2}$$

$$R_2 = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2]^{1/2}, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

где v_j — внешняя нормаль к поверхности Γ_j в точке (ξ, η, ζ) , (x, y, z) — точка поверхности Γ_j , $d\sigma$ — дифференциал поверхности Γ_j .

Определим вид функции φ из (1.3). В течение безводного периода, когда скважина целиком находится в зоне чистой нефти с коэффициентом фильтрации c_0 , суперпозицией потенциалов точечных стоков вдоль отрезка $[0, b]$ оси z можно найти

$$(1.6) \quad \varphi = 0.5(\pi c_0)^{-1} \varphi^0, \quad \varphi^0 = \frac{1}{b} \ln \frac{z + b + [(z + b)^2 + x^2 + y^2]^{1/2}}{z - b + [(z - b)^2 + x^2 + y^2]^{1/2}}$$

После прорыва воды скважина работает при совместном притоке двух фаз — нефти и воды. Пусть n первых изосат уже достигли скважины. Не изменяя общей гидродинамической картины, будем считать, что скважина (фиг. 1) состоит из отрезков

$$d_0, d_1, \dots, d_n, \left(\sum_{j=0}^n d_j = b \right)$$

В окрестности линейного стока суммарный объемный расход скважины Q делится на части пропорционально длинам отрезков d_i и коэффициентам c_i . На долю отрезка d_i , лежащего в зоне D_i , придется расход

$$(1.7) \quad Q_i = Q c_i d_i \left(\sum_{j=0}^n c_j d_j \right)^{-1} \quad (i = 0, 1, \dots, n+1)$$

Суммируя потенциалы всех отрезков, можно найти

$$(1.8) \quad \varphi = 0.5Q(\pi c_*)^{-1} \varphi^0, \quad c_* = b^{-1} \sum_{j=0}^n c_j d_j$$

Таким образом, система (1.5) с учетом (1.2), (1.6) и (1.8) описывает распределение скоростей изосат Γ_i в момент времени τ , если известно их положение.

В (1.2) и (1.5) перейдем к осесимметричным цилиндрическим лагранжевым координатам $\tau, \rho, \bar{z}, \bar{\xi}$ и безразмерному времени t по формулам

$$(1.9) \quad r = h^{-1}(x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \rho = h^{-1}(\xi^2 + \eta^2)^{1/2}, \quad \bar{z} = h^{-1}z, \quad \bar{\xi} = h^{-1}\xi \\ t = \tau T_0^{-1}, \quad T_0 = 2\pi m h^3 (3Q)^{-1}$$

Уравнение изосаты Γ_i , на которой значение насыщенности равно заданной постоянной s_i

$$(1.10) \quad z = f_i(r, t)$$

В результате подстановки (1.9) и (1.10) и преобразований, система (1.5) примет вид

$$(1.11) \quad u_i(r, t) + a_i \pi^{-1} \sum_{j=0}^N b_j \iint_0^\pi u_j(\rho, t) K_{ij}(r, \rho, \psi, t) \rho \, d\rho \, d\psi = {}^{1/3} a_i c_*^{-1} \Phi_i(r, t)$$

$$K_{ij} = \frac{(r - \rho \cos \psi) f_{ir}(r, t) + [f_j(\rho, t) - f_i(r, t)]}{\{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi + [f_j(\rho, t) - f_i(r, t)]^2\}^{3/2}} +$$

$$+ \frac{(r - \rho \cos \psi) f_{ir}(r, t) - [f_j(\rho, t) + f_i(r, t)]}{\{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi + [f_j(\rho, t) + f_i(r, t)]^2\}^{3/2}}$$

$$\Phi_i(r, t) = \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{1 + r^{-1} f_{ir}(r, t) [f_i(r, t) + \beta]}{\sqrt{r^2 + [f_i(r, t) + \beta]^2}} - \frac{1 + r^{-1} f_{ir}(r, t) [f_i(r, t) - \beta]}{\sqrt{r^2 + [f_i(r, t) - \beta]^2}} \right\}$$

Здесь $u_i(r, t)$ — проекции безразмерной нормальной скорости фильтрации на ось z ; $f_{ir} = \partial f_i / \partial r$; β — степень вскрытия нефтенасыщенной мощности.

Уравнение (1.2) приобретает вид

$$(1.12) \quad f_{it}(r, t) = F'(s_i) u_i(r, t), \quad f_{it} = \partial f_i / \partial t$$

Для полученной системы нелинейных интегродифференциальных уравнений относительно функций $f_i(r, t)$, т. е. законов движения изосат Γ_i ставится задача Коши при начальных условиях

$$(1.13) \quad f_i(r, 0) = f_i^0(r)$$

которые известны, если известно начальное распределение водонасыщенности в пласте. Начальные положения всех изосат совпадают, т. е. зона D вырождена в плоскость $f_i(r, 0) = 1$. Система (1.11) в момент $t=0$ сводится к системе линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно $u_i(r, 0)$. Ее решение, полученное последовательными приближениями, имеет вид

$$(1.14) \quad u_i(r, 0) = (1 - \lambda) (6\beta)^{-1} \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p \{ [r^2 + (2p+1+\beta)^2]^{-1/2} - [r^2 + (2p+1-\beta)^2]^{-1/2} \}$$

$$\lambda = (c_0 - c_{N+1}) (c_0 + c_{N+1})^{-1}$$

Начальные скорости изосат определяются по формуле

$$(1.15) \quad f_{it} = F'(s_i) u_i(r, 0)$$

2. Численное решение задачи. Перед численным решением задачи один из повторных интегралов (по переменной ψ) в (1.11) вычислялся в квадратурах, после чего уравнения записывались в сферических координатах, связанных с исходными цилиндрическими координатами соотношениями

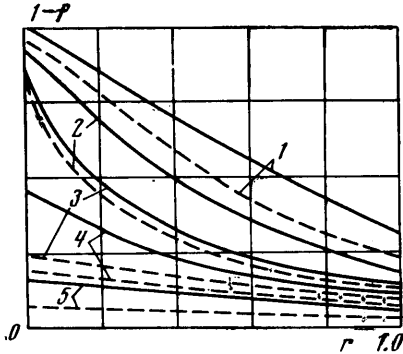
$$r = \rho(\theta) \sin \theta, \quad f(r) = \rho(\theta) \cos \theta$$

Для численного решения была использована явная суммирующе-разностная схема, описанная в [4, 5] и обобщенная для системы интегродифференциальных уравнений.

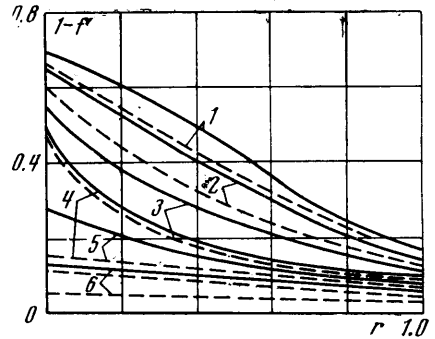
Промежуток интегрирования конечен $0 < \theta < \pi/2$. Пространственный шаг по θ взят равным $\pi/180$. Логарифмические особенности были выделены в отдельные интегралы, которые вычислялись преобразованием Вондри [6]. Шаг по времени до прорыва выбран равным 0.05 и 0.025. При этом относительное расхождение результатов расчетов находилось в пределах 0.5%. После подхода фронтальной изосаты к скважине шаг обычно увеличивался ($\Delta t = 0.25$). На один шаг по времени на машине «Минск-22» требуется 25 мин машинного времени.

В результате расчета получают последовательные положения изосат $\rho_i = \rho_i(\theta, t)$ или $\bar{z}_i = f_i(r, t)$. С момента достижения фронтальной изосатой скважины t^* начинается обводнение скважины и c_* определяется по (1.8) (для безводного периода $c_* = c_0$). Поскольку скважина в данном случае является особой линией (линия сток), на каждом шаге по времени координаты d_i точек пересечения скважины с изосатами находились параболической экстраполяцией от соседних точек изосат, координаты которых получают прямым счетом. Отметим, что результаты расчетов при

измельчении шага по θ свидетельствуют о хорошей точности указанной экстраполяции. Контроль точности вычислений на каждом шаге по времени осуществляется с помощью балансовых соотношений, основанных на том, что суммарный поток жидкости через поверхность изосаты равен отбору жидкости скважиной из зоны $D_0 + D_1 + \dots + D_{i+1}$. Если $i \leq n$, где n — число первых изосат, пересекших скважину, то



Фиг. 2



Фиг. 3

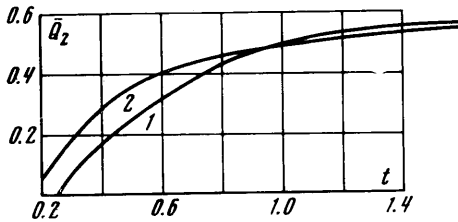
балансовые соотношения в цилиндрических координатах имеют вид

$$(2.1) \quad \frac{3}{F'(s_i)} \int_0^{\infty} f_{ii}(\rho, t) \rho d\rho = \left(\sum_{j=0}^i c_j d_j \right) \left(\sum_{j=0}^n c_j d_j \right)^{-1}$$

При $i > n$ правая часть (2.1) обращается в единицу. Описанный алгоритм был реализован для двухзонной аппроксимации ($N=2$) области D . Фазовые проницаемости принимались в виде

$$k_1(s) = (1-s)^2, \quad k_2(s) = s^2, \quad \underline{s} = 0, \quad \bar{s} = 1, \quad \mu_1 \mu_2^{-1} = 10$$

С момента $t=0$ образуется разрыв насыщенности на фронтовой изосате, причем его величина та же, что и в одномерном решении Бакли-Левретта [2]. Значение фронтовой насыщенности $s_0 = 0.3015$.



Фиг. 4

Средние насыщенности $\langle s_1 \rangle$ и $\langle s_2 \rangle$ вычислялись из решения одномерной задачи Бакли-Левретта на соответствующих интервалах $s_0 < \langle s_1 \rangle < s_1$ и $s_1 < \langle s_2 \rangle < s_2 = \bar{s}$. При этом насыщенность на второй изосате s_1 принята средней между s_0 и $\bar{s} = 1$. В результате получено $s_1 = 0.4634$, $\langle s_1 \rangle = 0.3738$, $\langle s_2 \rangle = 0.6044$.

Динамика поля водонасыщенности в пласте в двух рассчитанных вариантах при $\beta = 0.3$ и $\beta = 0.5$ показана соответственно на фиг. 2, 3. Сплошными линиями нанесено положение первой (фронтовой) изосаты, а штриховыми —

второй изосаты. Характерно резкое уменьшение скоростей продвижения изосат и их выполаживание после достижения скважины. Это объясняется тем, что длительность водного периода для данной задачи бесконечна, а предельное положение всех изосат при $t \rightarrow \infty$ есть плоскость $\bar{s} = 0$.

На фиг. 2 кривые 1—5 соответствуют $t = 2.2, 0.475, 0.244, 0.2, 0.1$. На фиг. 3 кривые 1—6 соответствуют $t = 3, 1.5, 0.292, 0.158, 0.125, 0.075$.

При известном текущем положении изосат доля воды \bar{Q}_2 в продукции скважины определяется по формуле

$$(2.2) \quad \bar{Q}_2 = Q_2 Q^{-1} = \left(\sum_{j=0}^n c_2 d_j \right) \left(\sum_{j=0}^n c_j d_j \right)^{-1}$$

Зависимости $\bar{Q}_2(t)$ приведены на фиг. 4, причем кривым 1, 2 соответствуют $\beta = 0.3, 0.5$. Отмечается быстрое уменьшение влияния степени вскрытия β с ростом t .

3. Приближенное аналитическое решение задачи. Безводный период. Приближенное аналитическое решение задачи Коши (1.11) — (1.13) для безводного периода по главной линии тока $r=0$ удается построить в виде степенных рядов по времени в окрестности $t=0$ [5, 7]

$$(3.1) \quad f_i(0, t) = f_i(0, 0) + f_{it}(0, 0)t + 1/2 f_{iit}(0, 0)t^2 + \dots$$

Начальные положения всех изосат совпадают, так как зона D вырождена в плоскость $f_i(r, 0) = 1$.

Из (1.14) и (1.15) следует:

$$(3.2) \quad f_{it}(0, 0) = -1/3(1-\lambda)B_{1i}, \quad B_{1i} = F'(s_i) \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p [(2p+1)^2 - \beta^2]^{-1}$$

Производные высших порядков определяются решениями систем интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которые получаются из (1.11) почленным дифференцированием по t

$$(3.3) \quad f_{iit}(0, 0) = -1/9(1-\lambda)^2 B_{2i}, \quad B_{2i} = F'(s_i) u_{ii}(0, 0)$$

$$(3.4) \quad u_{ii}(0, 0) + a_i \sum_{j=0}^N b_j \text{sign}(j-i) u_{ij}(0, 0) = 4B_{1i} a_i (1-\lambda)^{-1} \times \\ \times c_0^{-1} (1-\beta^2)^{-2} - a_i \sum_{j=0}^N b_j [M(\beta) F'(s_j) - N(\beta) F'(s_i)]$$

Здесь u_{ii} — нулевое приближение решения системы уравнений Фредгольма, удовлетворяющее системе линейных алгебраических уравнений.

Значения $M(\beta)$ и $N(\beta)$ для величин β на интервале от 0 до 0.8 приведены ниже:

β	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
M	2.9031	3.1121	3.4248	3.9149	4.7291	6.6904	10.011	65.4	
								19.513	
N	2.0740	2.1736	2.4009	2.7313	3.4118	4.8450	7.7101	43.1	
								14.011	

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что разложения (3.1) представляют собой ряды Тейлора функций $f_i(0, t)$, определенных выражением

$$(3.5) \quad t = 2B_{1i} B_{2i}^{-1} (1-\beta^2)^{-2} \{1 - [0.5B_{2i} (1-\beta^2) (f_i - 1) B_{1i}^{-1} + 1]^2 + \\ + 1.5\beta^2 B_{2i} (1-\beta^2) (f_i - 1) B_{1i}^{-2}\}$$

Точность этого выражения оценивалась сопоставлением с численным решением для поршневой схемы в [5]. Она определялась числом членов, учтенных в ряде для B_{1i} и порядком приближения в решении системы уравнений Фредгольма для u_{ii} . Формула (3.5) дает закон движения изосат вдоль главной линии тока до момента t^* подхода фронтальной изосаты к скважине. Этот момент определяется из (3.5) при $f_0 = \beta$.

В таблице приведены значения t^* для одно-, двух- и четырехзонной схем аппроксимации области D . Расчеты выполнены для тех же $k_1(s)$, $k_2(s)$, $\mu_1 \mu_2^{-1}$, что и в п. 2.

β	Одна зона		Две зоны		Четыре зоны
	числ.	(3.5)	числ.	(3.5)	(3.5)
0	0.3071	0.2868	0.3178	0.3020	0.3065
0.3	0.2332	0.2206	0.2418	0.2316	0.2348
0.5	0.1528	0.1458	0.1581	0.1521	0.1540
0.8	0.0302	0.0290	0.0306	0.0296	0.0299

Для четырехзонной схемы из одномерного решения Бакли-Левверетта можно найти $s_1=0.3738$, $s_2=0.4634$, $s_3=0.6044$, $\langle s_1 \rangle=0.3365$, $\langle s_2 \rangle=0.4151$, $\langle s_3 \rangle=0.5240$, $\langle s_4 \rangle=0.7288$.

Сравнение аналитического решения с численным, приведенным в этой же таблице, показывает их хорошее соответствие. Различие между ними может быть уменьшено, с одной стороны, дроблением пространственного и временного шагов в численном решении, а с другой — повышением порядка приближения в решении системы уравнений Фредгольма для u_i . Сравнение результатов для различных схем аппроксимации области D иллюстрирует хорошую сходимость метода с ростом числа зон D_i .

Поступила 7 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Данилов В. Л., Кац Р. М. Метод однородных зон решения нелинейных многомерных задач массопереноса в пористых средах. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 2.
2. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
4. Данилов В. Л. Интегро-дифференциальные уравнения движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. Казанск. фил. АН СССР, Сер. физ.-мат. и техн. н., 1957, № 11.
5. Абрамов Ю. С., Кац Р. М. О пространственном движении границы раздела двух несжимаемых жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
6. Кюгеман Д., Вебер И. Аэродинамика авиационных двигателей. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
7. Данилов В. Л. Об одном аналитическом методе решения задачи стягивания контура нефтеносности. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.

УДК 533.6.011.8

ОБ ИСПАРЕНИИ И КОНДЕНСАЦИИ СФЕРИЧЕСКИХ КАПЕЛЬ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧИСЛАХ КНУДСЕНА

И. Н. ИВЧЕНКО, Ю. И. ЯЛАМОВ

(Москва)

Путем рассмотрения процессов массо- и теплопереноса в квазистационарном режиме получено выражение для скорости роста сферической капли жидкости, находящейся в переохлажденном паре, при произвольных числах Кнудсена.

В [1] методом сшивания свободномолекулярного и диффузионного потоков получено выражение для скорости роста капель при произвольных числах Кнудсена ($Kn=\lambda/R$, где λ — длина свободного пробега молекул, R — радиус капли).

Однако метод сшивания является нестрогим. Кроме того, он не дает правильной функциональной зависимости от числа Кнудсена в почти свободномолекулярном режиме. В [2] исследован рост частиц в перенасыщенном паре и в инертном газе при наличии процессов тепло- и массопереноса. Метод сшивания, примененный автором, не позволяет получить строгие количественные результаты. В работе [3] получено выражение скорости роста капель при произвольных числах Кнудсена для бинарной смеси пара и неконденсирующегося газа, но не учтена зависимость температуры капли от скорости роста.

1. Рассмотрим сферическую каплю, находящуюся в переохлажденном паре. Предполагается, что начальный радиус капли R_0 больше радиуса критического зародыша. Для описания кинетики роста капли необходимо иметь формулу для потока числа молекул при произвольных числах Kn . Решение задачи может быть получено методом, который основан на решении конечной системы моментных уравнений, полученной из уравнения Больцмана [4]. Система конечного числа моментных уравнений не является замкнутой. Указанная трудность может быть преодолена путем определенного выбора функции распределения, содержащей столько неизвестных функций, сколько берется моментных уравнений.

Система первых четырех моментных уравнений, полученная из уравнения Больцмана с эллипсоидальной моделью оператора столкновений [5], имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{d}{dr} (r^2 nu) = 0, \quad mnu \frac{du}{dr} + \frac{d}{dr} p_{rr} + \frac{1}{r} (2P_{rr} - P_{\theta\theta} - P_{\varphi\varphi}) = 0$$