$$-[(S(\mathbf{V}_0-\mathbf{u}_0)+\mathbf{I})\operatorname{grad}]u_0+i(\Gamma-2\omega S)(V_k-u_k)-2i\omega z_k\frac{dS}{dt}+i\omega SV_0$$

Пусть жидкость вращается как твердая плоскость относительно неподвижной точки O_1 с угловой скоростью ω. Вместе с жидкостью совершает движение твердый контур. Определим гидродинамическую силу. Поместим начало O скрепленной с контуром системы координат в центр площади контура. Очевидно

$$V_0=u=u_0=i\omega R(\mathrm{R}=\overline{O_1O}),\qquad \Omega=\omega,\qquad \Gamma=2\omega S,\qquad \delta I/\delta t=0,$$
$$F/\rho=i\omega SV_0=-\omega^2SR$$

Тот же результат легко получить из уравнений гидростатики с учетом центробежной силы инерции, если поместить начало системы, вращающейся со скоростью ω в точку O_1.

В работе [4] решена задача для окружности переменного радиуса, движущейся в произвольном потоке с постоянной завихренностью. В случае потока, линейного по координатам, выражение для силы имеет вид

$$\frac{F}{\rho}=-\frac{d(V_0-v_0)S}{dt}+2S\frac{d^*v_0}{dt}-S\frac{dv_0}{dt}+i(V_0-v_0)(\gamma+4\omega S) \tag{4.3}$$

Это выражение с помощью (1.1), (1.3) и (4.1) преобразуется к виду

$$\frac{F}{\rho}=-\frac{d(V_0-u_0)S}{dt}+S\frac{d^*u_0}{dt}-S[(\mathbf{V}_0-\mathbf{u}_0)\operatorname{grad}]u_0+i\Gamma(V_0-u_0) \tag{4.4}$$

Выведем (4.4) из (4.2). Поскольку для окружности вращение не играет роли, можно положить $\Omega=0$. Кроме того,

$$I=S(V_0-u_0),\qquad z_k=0,\qquad u_k=u_0,\qquad V_k=V_0$$

Тогда из (4.2)

$$\frac{F}{\rho}=-\frac{d(V_0-u_0)S}{dt}+i\omega S(V_0-u_0)+S\frac{d^*u_0}{dt}-i\omega Su_0-S[(\mathbf{V}_0-\mathbf{u}_0)\operatorname{grad}]u_0+$$
$$+i(\Gamma-2\omega S)(V_0-u_0)+i\omega SV_0=-\frac{d(V_0-u_0)S}{dt}+S\frac{d^*u_0}{dt}-$$
$$-S[(\mathbf{V}_0-\mathbf{u}_0)\operatorname{grad}]u_0+i\Gamma(V_0-u_0)$$

Результат работы [5] также следует из (4.2) как частный случай.

Автор благодарен Ю. Л. Якимову за предложенную задачу и внимание к работе.

Поступила 10 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Изд. 2. М., «Наука», 1966.
2. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред. М., «Высшая школа», 1972.
3. *Якимов Ю. Л.* Силы, действующие на малое тело в произвольном потоке несжимаемой жидкости, и уравнения движения двухфазной среды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 3.
4. *Якимов Ю. Л.* Движение цилиндра в произвольном плоском потоке идеальной несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
5. *Друкер И. Г.* Подъемная сила, действующая на контур в плоском однородно завихренном потоке несжимаемой идеальной жидкости. ПМТФ, 1966, № 2.

УДК 532.522

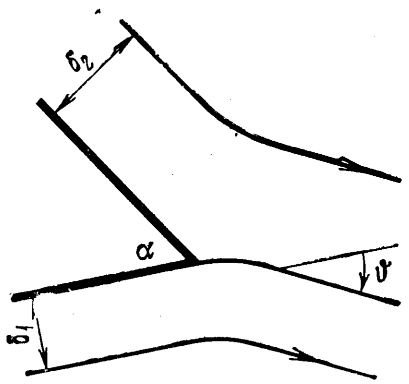
К ЗАДАЧЕ О СОУДАРЕНИИ ПЛОСКИХ СТРУЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

П. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ

(Москва)

В предшествующих работах [1, 2] задача о соударении плоских струй идеальной жидкости была сведена к системе нелинейных уравнений относительно неизвестной величины давления на линии тока, разделяющей струи. Решение системы было получено в виде формального ряда по степеням малой величины ε, равной отношению полных напоров соударяющихся струй. Были вычислены нулевое и первое приближения неизвестной функции, а для угла отклонения струй – также и второе приближение. В указанных работах в вычислениях коэффициентов при ε^2 была допущена ошибка.

В данной работе дается правильное выражение коэффициента при ε^2. С целью упрощения решения в систему уравнений вводится новая исчезающая при $\varepsilon \to 0$ неизвестная функция, благодаря которой система уравнений допускает линеаризацию. Для сокращения выкладок рассматривается частный случай течения, при котором струи обтекают стороны угла.



1. В указанном случае система состоит из двух уравнений

(1.1)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\ln[1-\lambda(\xi^*)]\frac{d\xi^*}{\xi^*-\xi}-\alpha\,\mathrm{sign}\,\xi= -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\ln[1-\varepsilon\lambda(\xi^*)]\frac{d\eta(\xi^*)}{\eta(\xi^*)-\eta(\xi)}$$

$$\frac{\eta(\xi)\,d\eta(\xi)}{1-\eta^2(\xi)}=\sqrt{\frac{1-\varepsilon\lambda(\xi)}{1-\lambda(\xi)}}\frac{\sigma\xi\,d\xi}{1-\xi^2} \tag{1.2}$$

где ξ – независимая переменная, $\lambda(\xi)$ – искомая функция, четная и обращающаяся в нуль на концах отрезка интегрирования, геометрический параметр $\sigma=\delta_2/\delta_1$. Величины α, δ_1 и δ_2 показаны на фигуре. Уравнение (1.2) связывает переменную интегрирования $\eta(\xi)$ с независимой переменной ξ. При значениях ξ, равных -1, 0 и 1, величина $\eta(\xi)$ также принимает значения -1, 0 и 1.

Функция $\lambda_0(\xi)$, соответствующая $\varepsilon=0$, вычисляется путем обращения интеграла в левой части уравнения (1.1) при $\varepsilon=0$. Вычитая указанный интеграл из левой части уравнения (1.1) и вводя функции

$$\mu(\xi)=0.5\ln[1-\lambda(\xi)]/[1-\lambda_0(\varepsilon)]$$
$$u^2(\xi)\equiv 1-\lambda_0(\xi)=[(1-\sqrt{1-\xi^2})/(1+\sqrt{1-\xi^2})]^{2\alpha/\pi}$$

в уравнения (1.1) и (1.2), получим систему уравнений

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mu(\xi^*)\,d\xi^*}{\xi^*-\xi}=\frac{-1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln(1-\varepsilon(1-u^2(\xi^*)\exp 2\mu(\xi^*)))\,d\eta(\xi^*)}{\eta(\xi^*)-\eta(\xi)} \tag{1.3}$$

$$\frac{\eta(\xi)\,d\eta(\xi)}{1-\eta^2(\xi)}=\frac{\sqrt{1-\varepsilon(1-u^2(\xi)\exp 2\mu(\xi))}}{\exp\mu(\xi)}\frac{\sigma\xi\,d\xi}{u(\xi)\,(1-\xi^2)} \tag{1.4}$$

эквивалентную исходной системе (1.1) – (1.2). При $\varepsilon=0$ и $\mu(\varepsilon)\equiv 0$ уравнение (1.3) обращается в тождество. Функция $\mu(\xi)$ четная и обращается в нуль на концах отрезка $[-1, 1]$. Интеграл в правой части уравнения (1.3) представляет собой нечетную функцию, которая удовлетворяет условию Гельдера, если $\mu(\xi)$ удовлетворяет условию Гельдера и ее норма в пространстве Гельдера, а также ε есть достаточно малые величины. Путем обращения интеграла в левой части уравнения (1.3) получим [3]

$$\mu(\xi)=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^{*2}}}\frac{d\xi^*}{\xi^*-\xi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln(1-\varepsilon(1-u^2(\xi^{**})\exp 2\mu(\xi^{**})))\,d\eta(\xi^{**})}{\eta(\xi^{**})-\eta(\xi^*)}$$

Дополнительное условие, необходимое для обращения интеграла, выполняется, поскольку левая часть равенства (1.3) есть нечетная функция. Линеаризуя внутренний интеграл в правой части предыдущего равенства, можно получить первое приближение для функции $\mu(\xi)$ в виде $\mu(\xi)=\varepsilon\nu(\xi)$

$$\nu(\xi)=-\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^{*2}}}\frac{d\xi^*}{\xi^*-\xi}\int_{-1}^{1}\frac{[1-u^2(\xi^{**})]\,d\eta_0(\xi^{**})}{\eta_0(\xi^{**})-\eta_0(\xi^*)} \tag{1.5}$$

где функция $\eta_0(\xi)$ определяется из равенства (2.5) при $\varepsilon=0$ и $\mu(\xi)\equiv 0$. Следовательно

$$\frac{\eta_0(\xi)\,d\eta_0(\xi)}{1-\eta_0^2(\xi)}=\frac{\sigma\xi\,d\xi}{u(\xi)(1-\xi^2)} \tag{1.6}$$

2. Полученное в предыдущем пункте первое приближение для функции $\mu(\xi)$ можно использовать для вычисления первого и второго приближений величины угла отклонения струй ϑ, определяемого равенством

$$\vartheta=\frac{-1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\ln(1-\varepsilon(1-u^2(\xi)\exp 2\mu(\xi)))\,\frac{d\eta(\xi)}{\eta(\xi)-1}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^1\ln\{1-\varepsilon[1-u^2(\xi)\exp 2\mu(\xi)]\}\,\frac{d\eta(\xi)}{1-\eta^2(\xi)} \tag{2.1}$$

При разложении величины ϑ в ряд по степеням ε необходимо учитывать, что переменная интегрирования $\eta(\xi)$ в правой части равенства (2.1) также зависит от ε. Это обстоятельство было упущено из вида в работе [1]. Из равенств (1.4) и (1.6) следует

$$\frac{\eta(\xi)\,d\eta(\xi)}{1-\eta^2(\xi)}=\frac{\sqrt{1-\varepsilon(1-u^2(\xi)\exp 2\mu(\xi))}}{\exp\mu(\xi)}\,\frac{\eta_0(\xi)\,d\eta_0(\xi)}{1-\eta_0^2(\xi)} \tag{2.2}$$

Интегрируя равенство (2.2), разлагая полученный результат в ряд по степеням ε и отбрасывая члены второго и более высокого порядков, можно получить

$$\frac{\eta_0(\xi)}{\eta(\xi)}=1+\varepsilon\frac{1-\eta_0^2(\xi)}{\eta_0^2(\xi)}\int_0^{\xi}\left[\nu(\xi^*)+\frac{1-u^2(\xi^*)}{2}\right]\frac{\eta_0(\xi^*)\,d\eta_0(\xi^*)}{1-\eta_0^2(\xi^*)} \tag{2.3}$$

Функция, заключенная в квадратные скобки в правой части равенства (2.3), удовлетворяет условию Гельдера и обращается в нуль при $\xi=1$. Следовательно, коэффициент при ε ограничен на отрезке [0, 1] и удовлетворяет условию Гельдера. В силу равенств (2.1) и (2.2) величина ϑ представляется в виде

$$\vartheta=\frac{1}{\pi}\int_0^1\ln(1-\varepsilon(1-u^2(\xi)\exp 2\mu(\xi)))\times$$

$$\times\frac{\eta_0(\xi)}{\eta(\xi)}\,\frac{\sqrt{1-\varepsilon(1-u^2)(\xi)\exp 2\mu(\xi))}}{\exp\mu(\xi)}\,\frac{d\eta_0(\xi)}{1-\eta_0^2(\xi)}$$

Разлагая последнее выражение в ряд по степеням ε и отбрасывая члены третьего и более высокого порядков, можно получить

$$\vartheta=k_1\varepsilon+k_2\varepsilon^2,\qquad k_1=-\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{[1-u^2(\xi)]\,d\eta_0(\xi)}{1-\eta_0^2(\xi)}$$

$$k_2=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{[1+u^2(\xi)]\nu(\xi)\,d\eta_0(\xi)}{1-\eta_0^2(\xi)}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^1[1-u^2(\xi)]\,\frac{d\eta_0(\xi)}{\eta_0^2(\xi)}\int_0^{\xi}\left[\nu(\xi^*)+\frac{1-u^2(\xi^*)}{2}\right]\frac{\eta_0(\xi^*)\,d\eta_0(\xi^*)}{1-\eta_0^2(\xi^*)}$$

Поступила 24 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белоцерковский П. М.* Нелинейная задача о соударении плоских струй идеальной несжимаемой жидкости с разрывом течения на границе между струями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5.
5. *Белоцерковский П. М.* Соударение трех струй идеальной несжимаемой жидкости, вытекающих из каналов с параллельными стенками. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.

УДК 532.529

О КОЭФФИЦИЕНТЕ ПРОПУСКАНИЯ СЕТЧАТОГО ЭЛЕКТРОДА

А. М. АНДРИИЩИН, Э. Г. СИНАЙСКИЙ

(Москва)

Исследуется поведение проводящих капелек эмульсии, несущих постоянный заряд, в области между электродами, соединенными с источниками постоянного электрического тока. В предположении, что концентрация дисперсной фазы невелика, задача сводится к определению движения изолированной капли вблизи электрода. Рассчитаны траектории движения капли в потоке, обтекающем электрод, с учетом перезарядки капель на электроде и определен коэффициент пропускания электрода в зависимости от параметров задачи. Аналогичная задача для одного цилиндрического электрода без учета перезарядки частиц была рассмотрена в [1, 2].

Рассмотрим эмульсию, состоящую из непроводящей сплошной фазы и проводящей диспергированной фазы, в виде мелких капель (например, водонефтяную эмульсию). Пусть капли одинакового радиуса R, несущие постоянный заряд q, движутся с потоком в области между двумя сетчатыми плоскими электродами перпендикулярно к его поверхности. Электроды соединены с источником постоянного электрического тока. Будем предполагать, что концентрация диспергированной фазы мала, так что капли между собой не взаимодействуют и не искажают гидродинамическую картину течения. При прохождении эмульсии через сетчатый электрод, заряд которого противоположен заряду капель, последние могут столкнуться с электродом, перезарядиться и уйти либо вверх, либо вниз по потоку.

Эффективность работы сетчатого электрода характеризуется коэффициентом пропускания K, который равен отношению концентрации диспергированной фазы эмульсии после прохождения электрода к концентрации перед электродом.

Если расстояние между электродами велико по сравнению с размером ячейки сетчатого электрода, то неоднородность в распределении поля скоростей и электрического поля имеет место лишь вблизи электрода до расстояний порядка размера ячейки. Вдали эти величины можно считать однородными. В силу сделанных предположений задача сводится к определению траектории движения изолированной капли вблизи электрода.

Для определения поля скоростей и электрического поля вблизи сетчатого электрода будем моделировать его двумя взаимно перпендикулярными системами параллельных цилиндров радиуса R_1, расположенных на расстоянии a друг от друга и лежащих в одной плоскости ($a \gg 2R_1$).

Тогда электрическое поле можно определить как суперпозицию полей, создаваемых каждым цилиндром, а поле скоростей определить из задачи об обтекании одного бесконечного цилиндра [3] в предположении, что остальные цилиндры не искажают картины течения.

В полярной системе координат (r, φ, z), связанной с выбранным цилиндром, уравнения безынерционного движения капли в безразмерных переменных имеют вид

$$(1) \qquad d\xi/d\tau = u - bf_r, \qquad \xi d\varphi/d\tau = v - bf_\varphi$$

$$\xi = \frac{r}{a}, \qquad \tau = \frac{U}{a}t, \qquad u = \frac{U_r}{U}, \qquad v = \frac{U_\varphi}{U}$$

$$b = \frac{2\lambda q}{6\pi\mu RUR_1}, \qquad d = \frac{R_1}{a}, \qquad f_r = \frac{a}{\lambda q}F_r, \qquad f_\varphi = \frac{a}{\lambda q}F_\varphi$$