5. *Vrij A., Hesselink F. Th., Luccassen J., Van den Tempel M.* Waves in thin liquid films, pt. 2. Symmetrical modes in very thin films and film rupture. Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet., 1970, Ser. B, vol. 73, No. 2, p. 124.
6. *Scheludko A., Manev E.* Critical thickness of rupture of chlorbenzene and aniline films. Trans. Faraday Soc., 1968, vol. 64, No. 544, p. 1124.

УДК 532.51

ДВИЖЕНИЕ ДЕФОРМИРУЮЩЕГОСЯ КОНТУРА В ПОТОКЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ

С. Д. ВИЛЬХОВЧЕНКО

(Москва)

Решается плоская задача о движении деформирующегося контура в потоке идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью. Получено явное выражение для гидродинамической силы, когда скорость внешнего потока линейно зависит от координат. В случае контура малого размера это выражение справедливо и при произвольном внешнем потоке.

1. Пусть $\mathbf{v}$ – скорость внешнего потока. Скорость жидкости $\mathbf{w}$ будем определять, предполагая ее непрерывной, считая известными циркуляцию Γ, поступательную $\mathbf{V}_0$ и угловую Ω скорости связанной с контуром системы координат, а также закон деформации контура в этой системе. Разобьем $\mathbf{v}$ на потенциальную и вихревую составляющие

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r},\qquad \omega={}^1/_2\operatorname{rot}\mathbf{v} \tag{1.1}$$

Скорость $\mathbf{w}$ в переменных подвижной системы координат можно представить в виде

$$\mathbf{w}=\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2+\mathbf{w}_3$$

где $\mathbf{w}_1$ – скорость жидкости при движении деформирующегося контура в потоке $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}_2$ – при обтекании неподвижного твердого контура потоком $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, $\mathbf{w}_3$ – при обтекании неподвижного твердого контура циркуляционным потоком интенсивности γ. Легко получить

$$\mathbf{w}_2=\operatorname{grad}\Phi_2+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \tag{1.2}$$

где Φ_2 – потенциал скорости, соответствующий вращению твердого контура с угловой скоростью $(-\omega)$. Из условия постоянства Γ [1] и из (1.2) с помощью формулы Стокса получаем

$$\gamma=\Gamma-2\omega S \tag{1.3}$$

где S – площадь контура. Поскольку [2] $d\omega/dt=0$, то

$$d\gamma/dt=-2\omega dS/dt \tag{1.4}$$

Обозначим потенциалы скоростей $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_3$ через Φ_1 и Φ_3 соответственно. Тогда

$$\mathbf{w}=\mathbf{q}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r},\qquad \mathbf{q}=\operatorname{grad}\Phi,\qquad \Phi=\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3 \tag{1.5}$$

В каждый момент времени $\mathbf{q}$ можно рассматривать как скорость жидкости при движении контура в потоке $\mathbf{u}$ с циркуляцией γ и с измененной на $(-\omega)$ скоростью вращения подвижной системы координат.

2. Динамические уравнения движения жидкости допускают интеграл [2]

$$-\frac{p-p_0}{\rho}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{w^2}{2}+2\omega\Psi \tag{2.1}$$

где Ψ – функция тока для скорости $\mathbf{w}$. Символом $\delta/\delta t$ обозначим производную относительно подвижной системы координат. Тогда

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{\delta\Phi}{\delta t}-(\mathbf{V}_0+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})\mathbf{q}-(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_0)\mathbf{r} \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) и (1.6) в (2.1), получим

$$-\frac{p-p_0}{\rho}=-\frac{p_1}{\rho}+\frac{\omega^2r^2}{2}-(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_0)\mathbf{r}+2\omega\psi, \tag{2.3}$$

$$p_1/\rho=\frac{\delta\Phi}{\delta t}-(\mathbf{V}_0+(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\omega})\times\mathbf{r})\mathbf{q}+\frac{q^2}{2}$$

Из (2.3) с использованием теоремы Гаусса для гидродинамической силы имеем

(2.4) $$\frac{\mathbf{F}}{\rho}=\frac{\mathbf{F}_1}{\rho}+S\omega^2\mathbf{r}_c-S\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_0+2\omega\int\limits_L\psi\mathbf{n}\,dl$$

где $\mathbf{r}_c$ – радиус-вектор центра площади контура. Если записать векторы как комплексные числа и преобразовать последний член (2.4) с помощью соотношения [1]

$$\int\limits_L z\,d\psi=\frac{d}{dt}(Sz_c)+SV_0$$

то выражение для силы примет вид

(2.5) $$\frac{F}{\rho}=\frac{F_1}{\rho}+i\omega SV_0+S\omega^2z_c+2i\omega\frac{d}{dt}(Sz_c)$$

В частности, если начало координат выбрать в центре площади, то

(2.6) $F/\rho=F_1/\rho+i\omega SV_0$

Так как выражение для p_1 совпадает с интегралом Коши – Лагранжа, записанного для скорости q, то силу F_1 удобно вычислять по известной формуле [1]

(2.7) $$\frac{F_1}{\rho}=i\gamma V_0+\overline{\frac{i}{2}\int\limits_L\left(\frac{dW}{dz}\right)^2dz}+\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}(Sz_c)+SV_0+i\int\limits_L z\frac{dW}{dz}dz\right]$$

(2.8) $$\frac{da}{dt}=\frac{\delta a}{\delta t}+i(\Omega-\omega)a$$

где a – вектор, записанный как комплексное число, $W(z)$ – комплексный потенциал скорости q.

3. Если составляющие скорости v являются линейными функциями координат, то комплексный потенциал скорости u имеет вид $W_e=C_2z^2+C_1z+C_0$

Представим $W(z)$ в виде

(3.1) $W(z)=W_0(z)+W_3(z),\qquad \operatorname{Re}\{W_3(z)\}=\Phi_3$

Подстановка (3.1) в (2.7) дает

(3.2) $$\frac{F_1}{\rho}=\frac{F_0}{\rho}+iV_0\gamma-i\gamma(\bar C_1+2\bar C_2\bar z_k)+i\frac{d}{dt}(\gamma z_k)$$

Здесь F_0 – сила, действующая при отсутствии циркуляции γ, z_k – конформный центр тяжести контура. С учетом соотношений (1.3), (1.4) и

$\bar c_1=u(0)=u_0,\qquad 2\bar c_2=\partial u_x/\partial x+i\partial u_x/\partial y$

(3.2) преобразуется к виду

(3.3) $F_1/\rho=F_0/\rho+i(\Gamma-2\omega S)(V_k-u_k)-2i\omega z_k dS/dt$

Здесь V_k – скорость конформного центра, u_k – значение скорости u в конформном центре. Если поместить начало координат в центр площади, то для F_0 справедлива формула [3]

(3.4) $$\frac{F_0}{\rho}=-\frac{dI}{dt}+S\frac{d^*u_0}{dt}-(\mathbf{I}\,\mathrm{grad})u_0,\qquad I=i\int\limits_L\operatorname{Re}\{W_0-W_e\}dz$$

где d^*u_0/dt – ускорение жидкости в начале координат. Подстановка (3.4) и (3.3) в (2.6) дает

(3.5) $$F/\rho=-dI/dt+Sd^*u_0/dt-(\mathbf{I}\cdot\mathrm{grad})u_0+i(\Gamma-2\omega S)(V_k-u_k)-$$
$$-2i\omega z_k dS/dt+i\omega SV_0$$

Методом работы [4] можно показать, что для контура малого размера эта формула будет справедлива при произвольном внешнем потоке.

4. Проиллюстрируем формулу (3.5) на простых примерах. С помощью соотношений (2.8) и

(4.1) $d^*u_0/dt=du_0/dt-[(\mathbf{V}_0-\mathbf{u}_0)\,\mathrm{grad}]u_0$

формула (3.5) приводится к удобному для решения конкретных задач виду

(4.2) $$\frac{F}{\rho}=-\frac{\delta I}{\delta t}-i(\Omega-\omega)I+S\left(\frac{\delta u_0}{\delta t}+i(\Omega-\omega)u_0\right)-$$

$$-[(S(\mathbf{V}_0-\mathbf{u}_0)+\mathbf{I})\,\mathrm{grad}]u_0+i(\Gamma-2\omega S)(V_k-u_k)-2i\omega z_k\frac{dS}{dt}+i\omega SV_0$$

Пусть жидкость вращается как твердая плоскость относительно неподвижной точки O_1 с угловой скоростью ω. Вместе с жидкостью совершает движение твердый контур. Определим гидродинамическую силу. Поместим начало O скрепленной с контуром системы координат в центр площади контура. Очевидно

$$V_0=u=u_0=i\omega R(\mathrm{R}=\overline{O_1O}),\qquad \Omega=\omega,\qquad \Gamma=2\omega S,\qquad \delta I/\delta t=0,$$
$$F/\rho=i\omega SV_0=-\omega^2 SR$$

Тот же результат легко получить из уравнений гидростатики с учетом центробежной силы инерции, если поместить начало системы, вращающейся со скоростью ω в точку O_1.

В работе [4] решена задача для окружности переменного радиуса, движущейся в произвольном потоке с постоянной завихренностью. В случае потока, линейного по координатам, выражение для силы имеет вид

$$\frac{F}{\rho}=-\frac{d(V_0-v_0)S}{dt}+2S\frac{d^*v_0}{dt}-S\frac{dv_0}{dt}+i(V_0-v_0)(\gamma+4\omega S) \tag{4.3}$$

Это выражение с помощью (1.1), (1.3) и (4.1) преобразуется к виду

$$\frac{F}{\rho}=-\frac{d(V_0-u_0)S}{dt}+S\frac{d^*u_0}{dt}-S[(\mathbf{V}_0-\mathbf{u}_0)\,\mathrm{grad}]u_0+i\Gamma(V_0-u_0) \tag{4.4}$$

Выведем (4.4) из (4.2). Поскольку для окружности вращение не играет роли, можно положить $\Omega=0$. Кроме того,

$$I=S(V_0-u_0),\qquad z_k=0,\qquad u_k=u_0,\qquad V_k=V_0$$

Тогда из (4.2)

$$\frac{F}{\rho}=-\frac{d(V_0-u_0)S}{dt}+i\omega S(V_0-u_0)+S\frac{d^*u_0}{dt}-i\omega Su_0-S[(\mathbf{V}_0-\mathbf{u}_0)\,\mathrm{grad}]u_0+$$
$$+i(\Gamma-2\omega S)(V_0-u_0)+i\omega SV_0=-\frac{d(V_0-u_0)S}{dt}+S\frac{d^*u_0}{dt}-$$
$$-S[(\mathbf{V}_0-\mathbf{u}_0)\,\mathrm{grad}]u_0+i\Gamma(V_0-u_0)$$

Результат работы [5] также следует из (4.2) как частный случай.

Автор благодарен Ю. Л. Якимову за предложенную задачу и внимание к работе.

Поступила 10 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Изд. 2. М., «Наука», 1966.
2. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред. М., «Высшая школа», 1972.
3. *Якимов Ю. Л.* Силы, действующие на малое тело в произвольном потоке несжимаемой жидкости, и уравнения движения двухфазной среды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 3.
4. *Якимов Ю. Л.* Движение цилиндра в произвольном плоском потоке идеальной несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
5. *Друкер И. Г.* Подъемная сила, действующая на контур в плоском однородно завихренном потоке несжимаемой идеальной жидкости. ПМТФ, 1966, № 2.

УДК 532.522

К ЗАДАЧЕ О СОУДАРЕНИИ ПЛОСКИХ СТРУЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

П. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ

(Москва)

В предшествующих работах [1, 2] задача о соударении плоских струй идеальной жидкости была сведена к системе нелинейных уравнений относительно неизвестной величины давления на линии тока, разделяющей струи. Решение системы было получено в виде формального ряда по степеням малой величины ε, равной отношению полных напоров соударяющихся струй. Были вычислены нулевое и первое приближения неизвестной функции, а для угла отклонения струй — также и