

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ  
ЖИДКОСТИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ В ПРЯМОЛИНЕЙНОМ  
КАНАЛЕ

С. В. СТЕБНОВСКИЙ

(Новосибирск)

Рассматривается задача о поведении возмущенной границы раздела жидкость — газ при нестационарном осесимметричном течении идеальной несжимаемой жидкости в конфузоре с произвольным углом раскрытия. Показано влияние угла раствора конфузора и функции, в виде которой задается начальное возмущение сферической границы раздела жидкость — газ, на эволюцию этой границы во времени.

1. Пусть  $\Gamma$  (фиг. 1) — твердые стенки осесимметричного канала,  $S$  — граница раздела жидкость — газ,  $\Omega$  — область, занятая жидкостью. Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, давление в жидкости на бесконечности  $P_\infty = \text{const}$ , на  $S$  — постоянно и равно давлению паров насыщения  $P_n$ , причем  $P_\infty - P_n = \text{const} > 0$ . В сферической системе координат, если  $\theta = 0$  — ось симметрии, уравнение стенок канала запишется в виде  $\theta_k = \text{const}$ . (При  $\theta_k = \pi$ , когда стенки канала вырождаются в линию тока, приходим к задаче об устойчивости захлопывающегося сферического пузыря в неограниченной жидкости [1].)

Для нахождения потенциала скорости  $\Phi(t, r, \theta)$  имеем задачу

$$(1.1) \quad \Delta \Phi(t, r, \theta) = 0, \quad \Phi(t, r, \theta) \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \Big|_{\theta = \theta_k} = 0, \quad R = R(t, \theta)$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right]_{r=R} = \frac{P_n - P_\infty}{\rho}, \quad \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial R}{\partial \theta} \right]_{r=R} = \frac{\partial R}{\partial t}$$

Общее решение  $\Phi(t, r, \theta)$  имеем в виде

$$(1.2) \quad \Phi(t, r, \theta) = \sum_{\nu} [A_{\nu}(t) r^{-1-\nu} + B_{\nu}(t) r^{\nu}] P_{\nu}(\cos \theta)$$

где  $P_{\nu}(\cos \theta)$  — функция Лежандра первого рода.

Подставляя (1.2) в граничное условие на стенке, получим

$$(1.3) \quad \nu(\nu+1) P_{\nu}^{-1}(\cos \theta_k) = 0$$

где  $P_{\nu}^{-1}(\cos \theta_k)$  — присоединенные функции Лежандра первого рода порядка  $(-1)$ ,  $\nu$  — индексы разложения (1.2). Согласно (1.3) множество индексов разложения  $\{\nu(\theta_k)\}$  независимо от величины  $\theta_k$  всегда состоит из нуля и подмножества  $\{\nu(\theta_k)\}'$ , члены которого определяются следую-

щим выражением:

$$(1.4) \quad v(\theta_k) = \begin{cases} x_0 \theta_k^{-1} & (\theta_k \rightarrow 0) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{\theta_k} \right) \left( 2m + \frac{5}{2} - \frac{\theta_k}{\pi} \right) + \frac{3}{4\theta_k} \operatorname{ctg} \theta_k \left\{ 1 - \left[ \frac{\pi}{\theta_k} \left( 2m + \frac{5}{2} - \frac{\theta_k}{\pi} \right) \right]^{-1} + 3 \operatorname{ctg} \theta_k (\operatorname{ctg} \theta_k - 2) \left[ 16 \left( \frac{\pi}{\theta_k} \right)^3 \left( 2m + \frac{5}{2} - \frac{\theta_k}{\pi} \right)^3 \right]^{-1} + \dots \right\} - 2 \operatorname{ctg}^2 \theta_k \left[ 8\theta_k^2 \left( \frac{\pi}{\theta_k} \right)^2 \left( 2m + \frac{5}{2} - \frac{\theta_k}{\pi} \right)^2 \right]^{-1} \left\{ 1 + 2 \left[ \left( \frac{\pi}{\theta_k} \right)^2 \left( 2m + \frac{5}{2} - \frac{\theta_k}{\pi} \right)^2 \right]^{-1} + \dots \right\} & (0 < \theta_k < \pi) \\ 1 + m + \frac{(2+m)!}{m!} \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi - \theta_k}{2} \right), & (\pi - \theta_k) \rightarrow 0 \end{cases}$$

Здесь  $x_0 = 3.83, 7.01, 10.17, \dots$  — корни функции Бесселя первого рода,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Из (1.3) и (1.4) следует, что всегда  $v \geq 0$ , поэтому с учетом граничного условия на бесконечности (1.2) сводится к виду

$$(1.5) \quad \Phi(t, r, \theta) = \frac{A_0(t)}{r} + \sum_{\nu > 0} A_\nu(t) r^{-1-\nu} P_\nu(\cos \theta)$$

Покажем, что в (1.5) функции  $\{P_{\nu_i}(\cos \theta)\}$ , где  $\nu_i$  определяются из (1.4), образуют ортогональную на  $[0, \theta_k]$  систему. Поскольку  $P_{\nu_i}(\cos \theta)$  является решением уравнения

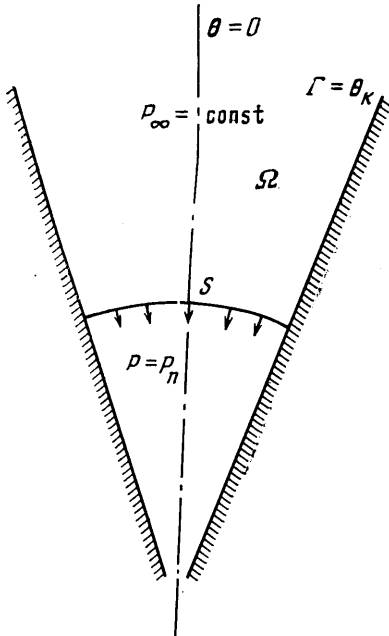
$$(1.6) \quad \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} P_{\nu_i}(x) \right] + \nu_i(\nu_i+1) P_{\nu_i}(x) = 0 \quad (x = \cos \theta)$$

то, поступая так же, как и при доказательстве ортогональности полиномов Лежандра [2], с учетом (1.3) получим

$$(1.7) \quad \int_{x_k}^1 P_{\nu_i}(x) P_{\nu_j}(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \{1 - x_k [P_{\nu_j}(x_k)]^2\} (2\nu_j + 1)^{-1}, & i = j \end{cases}$$

(При  $\theta_k = \pi$  (1.7) совпадает с условием ортогональности полиномов Лежандра.)

В силу (1.6)  $\{P_{\nu_i}(x)\}$  можно рассматривать как собственные функции задачи Штурма — Лиувилля, и с учетом (1.7) по теореме В. А. Стеклова (о разложении) любая дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке



Фиг. 1

$[1, x_k]$  функция  $f(x)$ , удовлетворяющая крайним условиям

$$(1.8) \quad f(1) \cos A + \frac{d}{dx} f(1) \sin A = 0, \quad f(x_k) \cos B + \frac{d}{dx} f(x_k) \sin B = 0$$

разлагается на этом отрезке по функциям  $\{P_{\nu_i}(x)\}$  в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье

$$(1.9) \quad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{\nu_i}(0) P_{\nu_i}(x), \quad a_{\nu_i}(0) = \frac{2\nu_i+1}{1-x_k [P_{\nu_i}(x_k)]^2} \int_{x_k}^1 f(x) P_{\nu_i}(x) dx$$

Так как функции  $\{P_{\nu_i}(x)\}$  на отрезке  $[1, x_k]$  образуют ортогональную замкнутую систему, уравнение подвижной границы представим в виде

$$(1.10) \quad R(t, \theta) = R_0(t) + \xi(t, \theta) = R_0(t) + \sum_{\nu > 0} a_{\nu}(t) P_{\nu}(\cos \theta)$$

$$(1.11) \quad R(0, \theta) = R_0(0) + \xi(0, \theta) = R_0(0) + \sum_{\nu > 0} a_{\nu}(0) P_{\nu}(\cos \theta)$$

$$(1.12) \quad \frac{d}{dt} R(0, \theta) = \frac{d}{dt} \xi(0, \theta) = \sum_{\nu > 0} \frac{d}{dt} a_{\nu}(0) P_{\nu}(\cos \theta)$$

Первые члены в правых частях (1.5) и (1.10) — потенциал скорости и радиус подвижной границы для случая невозмущенного течения, а  $\xi(0, \theta)$  — начальное возмущение радиуса подвижной границы. Чтобы разложение (1.11) было справедливым, функция  $\xi(0, \theta)$  должна удовлетворять условиям (1.8). Коэффициенты  $a_{\nu_i}(0)$  находятся из (1.9).

Подставляя (1.5) и (1.10) в граничные условия на границе раздела жидкость — газ и полагая, что  $a_{\nu} \ll 1$ , после преобразования получим систему уравнений

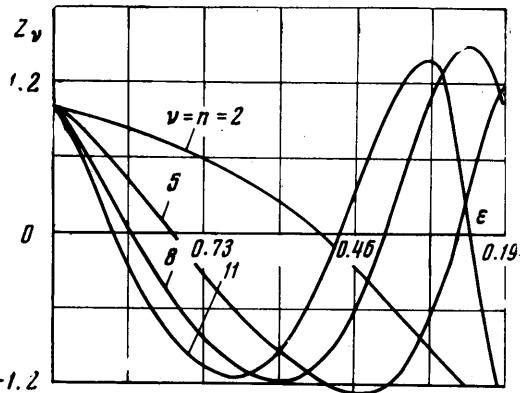
$$(1.13) \quad \begin{aligned} \epsilon \ddot{\epsilon} + 1.5 \dot{\epsilon}^2 &= (P_n - P_{\infty}) / (\rho R_0^2(0)), \quad \ddot{z}_{\nu} + p(t) \dot{z}_{\nu} + q(t) z_{\nu} = 0 \\ \nu &\in \{\nu(\theta_k)\}', \quad \epsilon(t) = R_0(t) / R_0(0), \quad z_{\nu}(t) = a_{\nu}(t) / a_{\nu}(0) \\ p(t) &= 3\dot{\epsilon} / \epsilon, \quad q(t) = (1 - \nu) \ddot{\epsilon} / \epsilon \end{aligned}$$

Первое из этих уравнений описывает движение стенки сферически-симметричного пузыря, а второму удовлетворяют коэффициенты  $a_{\nu}(t)$  из (1.10), представленные в безразмерном виде. Подставляя во второе уравнение (1.13)  $z_{\nu}(t) = \epsilon^{-1.5} u_{\nu}(t)$ , получим

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \ddot{u}_{\nu} + I(\nu, \epsilon) u_{\nu} &= 0, \\ I(\nu, \epsilon) &= \\ &= (P_{\infty} - P_n) (\nu / \epsilon^3 + \\ &+ 0.5) / \rho R_0^2(0) \epsilon^2 \end{aligned}$$

где  $I$  — инвариант уравнения (1.14). Легко заметить, что всегда  $I(\nu, \epsilon) > 0$  и растет с уменьшением  $\epsilon(t)$ , поэтому  $u_{\nu}(t)$  и  $z_{\nu}(t)$  осциллируют во времени с возрастающей частотой. На фиг. 2 приведены

графики зависимости  $z_n = z_n(\epsilon(t))$ , полученные в результате численного решения системы (1.13) при  $\epsilon(0) = 1, \dot{\epsilon}(0) = 0, z_{\nu}(0) = 1, \dot{z}_{\nu}(0) = 0, \nu = n = 2, 3, 4, \dots$ . Поскольку  $I(\nu, \epsilon) \sim \nu$ , то можно утверждать, что если  $n_1 < \nu < n_2$ , то нули функции  $z_{\nu}(t)$  лежат между нулями функций  $z_{n_1}(t)$  и  $z_{n_2}(t)$  и характер поведения  $\{z_{\nu}(t)\}$  будет таким же, как и у функций с



Фиг. 2

целочисленными индексами, приведенных на фиг. 2. Ограничимся отрезком времени  $[0, \tau]$ , где  $\tau$  такое, что  $\varepsilon(\tau) = 0.15$ , тогда согласно [1]  $|z_v(t)| \leq 1.7$  при  $t \in [0, \tau]$ . Так как  $I(v, \varepsilon) > 0$ , то для любого  $v$  на  $[0, \tau]$  всегда можно найти такие две точки  $t_1$  и  $t_2$ , в которых  $z_v(t)$  обращается в нуль. Таким образом, отрезок  $[0, \tau]$  для всех  $z_v(t)$  содержит по крайней мере по одной паре сопряженных точек [3] и с учетом того, что  $p(t)$  и  $q(t)$  непрерывны, можно построить общее решение для второго уравнения (1.13). Перепишем это уравнение в виде

$$(d/dt + \alpha)(d/dt + \beta)z_v = 0$$

Поскольку на  $[0, \tau]$  существуют сопряженные точки решений этого уравнения, то  $\alpha$  и  $\beta$  комплексные. Представив их в виде  $\alpha = p - u - i_k h$ ,  $\beta = u + i_k h$ , где  $u$  и  $h$  действительные, с учетом того, что  $z_v(0) = 1$ , получим общее решение [3]

$$z_v(t) = \exp[\eta(v, t) - \eta(v, 0)] \cos[\eta(v, 0) \psi(v, t)], \quad \eta(v, t) = - \int_0^t u(v, t) dt \quad (1.15)$$

$$\psi(v, t) = c \int_0^t h(v, t) dt, \quad c = \text{const.}$$

2. Рассмотрим устойчивость возмущения  $\xi(t, \theta)$ . Пусть в начальный момент времени на подвижную границу жидкости наложено возмущение в виде функции

$$(2.1) \quad \xi(0, \theta) = \sum_{v_i} a_{v_i}(0) P_{v_i}(\cos \theta)$$

удовлетворяющей условиям (1.8), причем  $|\xi(0, \theta)| \ll R_0(0)$  при любом  $\theta \in [0, \theta_k]$ . Необходимо найти условия устойчивости амплитуды функции  $\xi(t, \theta)$  на отрезке  $[0, \tau]$  в зависимости от вида  $\xi(0, \theta)$  и угла раскрытия канала  $\theta_k$ . Ограничиваясь осесимметричными начальными возмущениями сферической подвижной границы, функцию  $\xi(0, \theta)$  зададим в виде

$$(2.2) \quad \xi(0, \theta) = a_\mu(0) P_\mu(x) \quad (a_\mu(0) = \xi(0, 0), \mu > 0, x = \cos \theta, \theta \in [0, \theta_k])$$

Отсюда видно, что  $\mu$  будет полностью характеризовать спектр коэффициентов разложения (2.1) в данном канале  $\theta_k = \text{const}$ . При этом возможны несколько случаев.

1.  $\mu = v_j$ ,  $v_j \in \{v_i(\theta_k)\}'$ . Здесь  $P_\mu(x) \in \{P_{v_i}(x)\}$ , поэтому (1.10) и (1.11) примут вид

$$R(0, \theta) = R_0(0) + \xi(0, \theta) = R_0(0) + a_\mu(0) P_\mu(x), \\ R(t, \theta) = R_0(t) + \xi(t, x) = R_0(t) + a_\mu(0) z_\mu(t) P_\mu(x)$$

Этот случай является наипростейшим, так как характер изменения во времени функции  $\xi(t, x)$  зависит от осцилляции лишь одной гармоники  $z_\mu(t)$ , и согласно оценке  $|z_v(t)| \leq 1.7$  имеем

$$(2.3) \quad |\xi(t, x)| \leq 1.7 (|a_\mu(0) P_\mu(x)| \leq 1.7 |a_\mu(0)| \quad (t \in [0, \tau])$$

т. е. функция возмущения  $\xi(t, x)$  устойчива на  $[0, \tau]$ . Такой вид функции начального возмущения  $\xi(0, \theta)$  рассматривался в [1] при  $\theta_k = \pi$ .

2.  $\mu \neq v_j$ ,  $v_j \in \{v_i(\theta_k)\}'$ . В этом случае (1.10) и (1.11) примут вид

$$(2.4) \quad R(0, x) = R_0(0) + a_\mu(0) P_\mu(x) = R_0(0) + \sum_{v_i} a_{v_i}(0) P_{v_i}(x)$$

$$(2.5) \quad R(t, x) = R_0(t) + \xi(t, x) = R_0(t) + \sum_{\nu_i} a_{\nu_i}(0) z_{\nu_i}(t) P_{\nu_i}(x)$$

т. е. функция  $\xi(t, x)$  состоит из целого спектра гармоник  $\{a_{\nu_i}(0), z_{\nu_i}(t)\}$ , имеющих различные частоты осцилляции в зависимости от индексов  $\nu_i$ .

Докажем, что если  $\delta_i = |\mu - \nu_i|$ , то при  $\delta_j = \min \{\delta_i\}$  имеет место

$$(2.6) \quad |a_{\nu_j}(0)| = \max \{|a_{\nu_i}(0)|\}$$

Согласно (1.9) можно записать

$$(2.7) \quad a_{\nu_i}(0) = \frac{(2\nu_i+1)a_{\mu}(0)}{1-x_k[P_{\nu_i}(x_k)]^2} \int_{x_k}^1 P_{\mu}(x)P_{\nu_i}(x) dx$$

Заменяя здесь  $P_{\nu_i}(x)$  выражением [4]

$$P_{\nu_i}(x) = \pi^{-1} \sin \nu_i \pi \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [(\nu_i-m)^{-1} - (\nu_i+m+1)^{-1}] P_m(x)$$

$$(0 \leq \theta < \pi; \nu_i \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots)$$

получим

$$(2.8) \quad a_{\nu_i}(0) = a_{\mu}(0) (2\nu_i+1) \pi^{-1} \{1-x_k[P_{\nu_i}(x_k)]^2\}^{-1} \sin(\nu_i \pi) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m C_m(\nu_i) F_m(\mu)$$

$$C_m(\nu_i) = (2m+1)/(\nu_i-m)(\nu_i+m+1), \quad F_m(\mu) = \int_{x_k}^1 P_{\mu}(x)P_m(x) dx = \\ = \int_{-1}^1 P_{\mu}(x)P_m(x) dx - \int_{-1}^{x_k} P_{\mu}(x)P_m(x) dx$$

Обозначив  $\mu = k + \alpha$  и согласно (1.4)  $\nu_i = a + \beta + bi$  ( $i, k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;  $a, b$  — целые положительные числа;  $0 < \alpha < 1$ ;  $0 < \beta < 1$ ), легко показать, что

$$(2.9) \quad C_m(\nu_i) = d_m(\nu_i) \quad (m < a + bi), \quad C_m(\nu_i) = \beta^{-1} \quad (m = a + bi), \\ C_m(\nu_i) = -(1-\beta)^{-1} \quad (m = a + bi + 1), \quad C_m(\nu_i) = -d_m(\nu_i) \\ (m > a + bi + 1), \quad (d_m(\nu_i) = |C_m(\nu_i)|)$$

$$(2.10) \quad F_m(\mu) = (-1)^{m+k-2} T_m(\mu) \quad (m \leq k), \quad (-1)^{m-k-2} T_m(\mu) \quad (m \geq k+1), \\ (T_m(\mu) = |F_m(\mu)|)$$

Тогда, подставляя (2.9) и (2.10) в (2.8), получим

$$(2.11) \quad a_{\nu_i}(0) = \\ = a_{\mu}(0) (2\nu_i+1) \pi^{-1} \{1-x_k[P_{\nu_i}(x_k)]^2\}^{-1} (-1)^k \sin(\nu_i \pi) [d_0 T_0 + \\ + d_1 T_1 + \dots + d_{k-1} T_{k-1} + d_k T_k + (1-\beta)^{-1} T_{a+bi+1} + d_{bi+\sigma+2} T_{a+bi+2} + \dots - \\ - Q(\delta_i)] \quad (Q(\delta_i) = d_{k+1} T_{k+1} + d_{k+2} T_{k+2} + \dots + \beta^{-1} T_{bi+a})$$

Поскольку  $T_m$  не зависит от  $\nu_i$ , то  $Q(\delta_i)$  будет тем меньше, чем меньше «расстояние» между членами ряда с индексами  $m = k+1$  и  $m = bi+a$ , т. е. чем меньше  $\delta_i = |\mu - \nu_i|$ . Таким образом,  $a_{\nu_j}(0)$  будет наибольшим среди всех  $\{a_{\nu_i}(0)\}$  при  $\delta_j = \min \{\delta_i\}$ .

Из (2.1) следует, что спектр  $\{a_{\nu_i}(0)\}$  в (2.4) имеет вид

$$(2.12) \quad |a_{v_1}(0)| > |a_{v_2}(0)| > |a_{v_3}(0)| > \dots \quad (\mu < v_1 < v_2 < v_3 < \dots)$$

$$(2.13) \quad |a_{v_1}(0)| < |a_{v_2}(0)| < \dots < |a_{v_l}(0)|, \quad |a_{v_{l+1}}(0)| > |a_{v_{l+2}}(0)| > \dots \\ (\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_l < \mu < \nu_{l+1} < \nu_{l+2} < \dots)$$

(в (2.13) из двух членов  $|a_{v_l}(0)|$  и  $|a_{v_{l+1}}(0)|$  будет больше тот, которому соответствует меньшее  $\delta$ ).

Введем в (2.13) новые обозначения

$$(2.14) \quad \nu_{l+1} = \nu_1, \nu_{l+2} = \nu_2, \dots; \nu_l = \lambda_1, \nu_{l-1} = \lambda_2, \nu_{l-2} = \lambda_3, \dots, \nu_2 = \lambda_{l-1}, \nu_1 = \lambda_l \\ \lambda_l < \lambda_{l-1} < \dots < \lambda_2 < \lambda_1 < \mu < \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots \\ |a_{\lambda_l}(0)| < |a_{\lambda_{l-1}}(0)| < \dots < |a_{\lambda_2}(0)| < |a_{\lambda_1}(0)|, \quad |a_{v_l}(0)| > \\ > |a_{v_2}(0)| > |a_{v_3}(0)| > \dots$$

Здесь  $\nu_i$  не совпадает по величине с одноименными индексами в (2.12). Подставляя (1.15) в (2.5) с учетом (2.4), (2.12) и (2.14), получим соответственно

$$(2.15) \quad \xi(0, x) = a_\mu(0) \sum_{i=1}^{\infty} g_{v_i}(0) P_{v_i}(x)$$

$$(2.16) \quad \xi(t, x) = a_\mu(0) \sum_{i=1}^{\infty} g_{v_i}(0) \exp[\eta(v_i, t) - \eta(v_i, 0)] \cos \varphi(v_i, t) P_{v_i}(x)$$

$$(2.17) \quad \xi(0, x) = a_\mu(0) \sum_{i=1}^{\infty} g_{v_i}(0) P_{v_i}(x) + a_\mu(0) \sum_{k=1}^l g_{\lambda_k}(0) P_{\lambda_k}(x)$$

$$(2.18) \quad \xi(t, x) = a_\mu(0) \sum_{i=1}^{\infty} g_{v_i}(0) \exp[\eta(v_i, t) - \eta(v_i, 0)] \cos \varphi(v_i, t) P_{v_i}(x) +$$

$$+ a_\mu(0) \sum_{k=1}^l g_{\lambda_k}(0) \exp[\eta(\lambda_k, t) - \eta(\lambda_k, 0)] \cos \varphi(\lambda_k, t) P_{\lambda_k}(x)$$

$$(g_{\lambda_k}(0) = a_{\lambda_k}(0) a_\mu^{-1}(0), \quad g_{v_i}(0) = a_{v_i}(0) a_\mu^{-1}(0), \quad \varphi(v_i, t) = \eta(v_i, 0) \psi(v_i, t),$$

$$\varphi(\lambda_k, t) = \eta(\lambda_k, 0) \psi(\lambda_k, t), \quad t \in [0, \tau], \quad x \in [1, x_k])$$

Покажем, что если ряд (2.15) (или (2.17)) знакопеременный, то возмущение  $\xi(t, x)$  будет устойчивым до момента времени  $t_*$ , при котором имеет место один из двух вариантов неравенств

$$(2.19) \quad (2i+0.5)\pi < \varphi(v_{2i+2}, t_*) < (2i+1.5)\pi, \quad (2i+1.5)\pi < \varphi(v_{2i+3}, t_*) < \\ < (2i+2.5)\pi$$

$$(2.20) \quad (2i-0.5)\pi < \varphi(v_{2i+2}, t_*) < (2i+0.5)\pi, \quad (2i+0.5)\pi < \varphi(v_{2i+3}, t_*) < \\ < (2i+1.5)\pi \quad (i = N, N+1, N+2, \dots, L)$$

Здесь  $N$  и  $L$  такие, что

$$(2.21) \quad \sum_{i=N}^L |a_\mu(0) g_{v_i}(0) P_{v_i}(x)| \gg |\xi(0, x)|$$

Так как по условию ряд (2.15) знакопеременный, его можно переписать в виде

$$(2.22) \quad \xi(0, x) = a_\mu(0) \{g_{\nu_1}(0)P_{\nu_1}(x) - [g_{\nu_2}(0)P_{\nu_2}(x) - g_{\nu_3}(0)P_{\nu_3}(x)] - [g_{\nu_4}(0)P_{\nu_4}(x) - g_{\nu_5}(0)P_{\nu_5}(x)] - \dots\}$$

Здесь  $g_{\nu_i}(0)P_{\nu_i}(x) \rightarrow 0$  при  $\nu_i \rightarrow \infty$ , поэтому по теореме о знакопеременных рядах [5] справедливо неравенство

$$(2.23) \quad |\xi(0, x)| \leq |a_\mu(0)g_{\nu_1}(0)P_{\nu_1}(x)|$$

Экспоненциальный член в (1.15) характеризует инкремент функции  $z_{\nu_i}(t)$ , поэтому с учетом того, что  $|z_{\nu_i}(t)| \leq 1.7$  при  $t \in [0, \tau]$  (2.16) можно преобразовать к виду

$$(2.24) \quad \xi(t, x) \leq 1.7a_\mu(0) \sum_{i=1}^{\infty} g_{\nu_i}(0)P_{\nu_i}(x) \cos \varphi(\nu_i, t) = 1.7a_\mu(0) \times \\ \times \{g_{\nu_1}(0)P_{\nu_1}(x) \cos \varphi(\nu_1, t) - [g_{\nu_2}(0)P_{\nu_2}(x) \cos \varphi(\nu_2, t) - g_{\nu_3}(0)P_{\nu_3}(x) \times \\ \times \cos \varphi(\nu_3, t)] - [g_{\nu_4}(0)P_{\nu_4}(x) \cos \varphi(\nu_4, t) - \\ - g_{\nu_5}(0)P_{\nu_5}(x) \cos \varphi(\nu_5, t)] - \dots\}$$

При  $t < t_*$  знаки  $\cos \varphi(\nu_{2i+2}, t)$  и  $\cos \varphi(\nu_{2i+3}, t)$  совпадают, и по вышесказанной теореме о знакопеременных рядах

$$(2.25) \quad |\xi(t, x)| \leq 1.7|a_\mu(0)g_{\nu_1}(0)P_{\nu_1}(x)| \leq 1.7|a_\mu(0)g_{\nu_1}(0)|$$

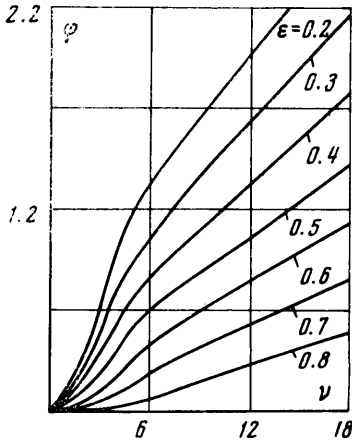
Согласно (1.14) частота осцилляции гармоник  $z_\nu(t)$ , а следовательно, и разность аргументов косинусов двух смежных членов в (2.16) растут пропорционально  $(\nu / \varepsilon(t))^{0.5}$ , и в момент времени  $t_*$  по крайней мере некоторые смежные члены этого ряда будут иметь одинаковые знаки. Тогда с учетом того, что по условию  $1 \leq \exp[\eta(\nu_i, t) - \eta(\nu_i, 0)] \leq 1.7$ , (2.16) можно представить в виде

$$(2.26) \quad \xi(t_*, x) \geq C_1 - (C_2 - C_3) - \dots + (C_N + C_{N+1} + C_{N+2} + \dots \\ \dots + C_L) - (C_{L+1} - C_{L+2}) - (C_{L+3} - C_{L+4}) - \dots = S_1 + S_2, \\ S_1 = C_N + C_{N+1} + \dots + C_{L-1} + C_L, S_2 = C_1 - (C_2 - C_3) - \dots \\ \dots - (C_{N-2} - C_{N-1}) - (C_{L+1} - C_{L+2}) - (C_{L+3} - C_{L+4}) - \dots, \\ C_i = a_\mu(0)g_{\nu_i}(0) \cos(\nu_i, t)P_{\nu_i}(x)$$

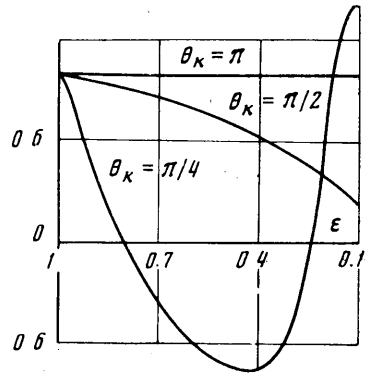
Отсюда следует, что если  $N$  и  $L$  удовлетворяют (2.21), то  $\xi(t_*, x) \geq S_1 + S_2 \gg \xi(0, x)$ , т. е. возмущение неустойчиво. При  $0 \leq t < t_*$  в силу знакопеременности (2.17) и (2.18) справедливы неравенства

$$|\xi(0, x)| \leq |a_\mu(0)[g_{\nu_1}(0)P_{\nu_1}(x) + g_{\lambda_1}(0)P_{\lambda_1}(x)]|, \\ |\xi(t, x)| \leq 1.7|a_\mu(0)[g_{\nu_1}(0)P_{\nu_1}(x) + g_{\lambda_1}(0)P_{\lambda_1}(x)]|$$

Поскольку  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_l < \nu_1 < \nu_2 < \dots$ , то разность аргументов косинусов смежных членов первой суммы в (2.18) растет быстрее, чем во второй сумме, поэтому поведение членов первой суммы и определяет устойчивость  $\xi(t, x)$ . Далее, поступая как и раньше, легко показать, что при выполнении условий (2.19) или (2.20) возмущение будет неустойчивым.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3 представлены зависимости аргументов косинусов  $\varphi = \eta(\nu, 0)\psi(\nu, t)$  гармоник (1.15) от индексов  $\nu$  для фиксированных моментов времени (т. е. при фиксированном  $\varepsilon(t)$ ). Графики получены в результате обработки численного решения (1.13). Из графиков видно, что с ростом  $\nu_i - \nu_{i-1}$  растет разность между аргументами косинусов  $z_{\nu_i}$  и  $z_{\nu_{i-1}}$  тем быстрее, чем меньше  $\varepsilon(t)$ . Таким образом, если интервалы между индексами  $\nu$  членов ряда (2.24) достаточно велики (что согласно (1.4) возможно при малых  $\theta_k$ ), то при  $t=t_*$  разность между аргументами косинусов смежных членов на каком-то участке ряда (2.24) может достичь такой величины, что ряд сведется к виду (2.26) и при выполнении условия (2.21) будет иметь место неравенство  $\xi(t_*, x) \gg \xi(0, x)$ .

На фиг. 4 приведены графики, иллюстрирующие поведение во времени точки ( $\theta=0$ ) подвижной границы жидкости при различных углах раствора конфузора  $\theta_k = \pi, \pi/2, \pi/4$ , но с одинаковым во всех трех случаях начальным возмущением подвижной границы

$$\xi(0, \theta) = a_\mu(0)P_\mu(\cos \theta) = \cos \theta \quad (\mu=1, a_1(0)=1)$$

Из графиков видно, что осцилляция возмущения  $\xi(t, \theta)$  будет тем больше, чем меньше угол раскрытия конфузора  $\theta_k$ .

В заключение автор благодарит В. К. Кедринского и В. Е. Накорякова за обсуждение работы.

Поступила 30 I 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Plesset M. S., Mitchell J. P. On the stability of the spherical of a vapour cavity in a liquid. Quart. Appl. Math., 1956, vol. 13.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. М., Физматгиз, 1958.
3. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
5. Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М., Изд-во иностр. лит., 1961.