

УДК 532.5

## ОБ ИСТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ ИЗ ТОНКИХ ПЛЕНОК ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ МОЛЕКУЛЯРНОГО ПРИТЯЖЕНИЯ

Ю. А. БУВЕВИЧ, Э. Х. ЛИПКИНА

(Москва)

Рассмотрены режимы утончения плоской жидкой пленки в случае, когда силы Ван-дер-Ваальса, притягивающие противоположные поверхности пленки, значительно превышают силы капиллярного давления. Получены оценки для времени жизни тонкой пленки.

1. Согласно модели [1] уравнение, определяющее зависимость полутолщины  $h$  плоской осесимметричной свободной пленки от времени  $t$  и радиальной координаты  $r$ , может быть записано в виде

$$(1.1) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{rh^3}{3\mu} \frac{\partial p}{\partial r} + ruh \right) = 0$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial p}{\partial r} = -\sigma \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial h}{\partial r} \right) \right] + \frac{d\Pi}{dh} \frac{\partial h}{\partial r},$$

$$u = \frac{D}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} = \frac{Dh}{\Gamma} \left( \frac{d\sigma}{d\Gamma} \right)^{-1} \frac{\partial p}{\partial r}$$

причем величины  $\Gamma$  и  $d\sigma/d\Gamma$  можно приближенно рассматривать как постоянные. В (1.1), (1.2)  $\Gamma(t, r)$  и  $D$  обозначают концентрацию нерастворимого поверхностно-активного вещества на свободной поверхности пленки и коэффициент поверхностной диффузии соответственно,  $\sigma$  и  $\mu$  — коэффициент поверхностного натяжения и вязкость жидкости в пленке,  $\Pi(h)$  — изотерма эффективного давления, создаваемого ван-дер-ваальсовыми силами взаимодействия свободных поверхностей пленки,  $p$  — давление в пленке,  $u(t, r)$  — скорость на ее поверхности. Поверхностно-активное вещество считается для простоты нерастворимым.

Изотерма молекулярного давления аппроксимируется обычно одним из следующих соотношений:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \Pi(h) &= c(2h)^{-3}, \\ \Pi'(h) &= c'(2h)^{-4}, \\ c > 0, \quad c' > 0 \end{aligned}$$

(отрицательные значения коэффициентов  $c$  и  $c'$  соответствовали бы расклинивающему давлению).

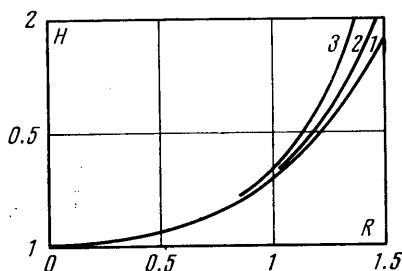
Ниже рассмотрим пленку малой толщины при преобладании сил молекулярного давления в двух случаях. В первом случае поверхности пленки практически заторможены, т. е. второй член в скобках в (1.1) значительно меньше первого. Это соответствует так называемому «гидродинамическому» режиму утончения (см. [1]). Во втором случае имеет место обратное неравенство, т. е. пленка подвергается равномерному растяжению, причем скорость  $u(t, r)$  этого растяжения определяется скоростью диффузии поверхностно-активного вещества («диффузионный режим»).

В гидродинамическом режиме при преобладании сил молекулярного притяжения (1.1) с учетом (1.2) принимает одну из двух форм, соответствующих двум изотермам  $\Pi(h)$  в (1.3)

$$(1.4) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{c}{8\mu r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{h} \frac{\partial h}{\partial r} \right) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{c'}{12\mu r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{h^2} \frac{\partial h}{\partial r} \right) = 0$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( \frac{R}{H} \frac{dH}{dR} \right) - H = 0, \quad \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( \frac{R}{H^2} \frac{dH}{dR} \right) - H = 0$$

$$(1.5) \quad \begin{aligned} r &= r_0 R, \quad h(t, r) = h_0(t) H(R) \\ r_0 &= \left( \frac{c}{8\mu} \right)^{1/2} \left( -\frac{dh_0}{dt} \right)^{-1/2}, \quad r_0 = \left( \frac{c'}{12\mu} \right)^{1/2} \left( -h_0 \frac{dh_0}{dt} \right)^{-1/2} \end{aligned}$$



Фиг. 1

Решения этих уравнений при граничных условиях  $H=1$  и  $dH/dR=0$  при  $R=0$  определяют безразмерные профили пленки (кривые 1 и 2 на фиг. 1 соответственно). Из уравнений (1.5) получаем законы утончения пленки, соответствующие изотермам (1.3) молекулярного давления

$$(1.6) \quad h_0(t) = -\frac{c}{8\mu r_0^2} t + h^0, \quad h_0(t) = \left( h^{0^2} - \frac{c'}{6\mu r_0^2} t \right)^{1/2}$$

Значения размерной величины  $r_0$  определим через значения размерного  $a_*$  и безразмерного  $R_*$  радиусов пленки

$$(1.7) \quad a_* = r_0 R_*$$

Основываясь на результатах работы [2], в качестве  $R_*$  естественно выбрать значение, соответствующее максимуму производной градиента давления. Отсюда имеем  $R_* = 0.85$  и  $0.74$  соответственно для двух законов утончения пленки в (1.6).

Изменение концентрации поверхностно-активного вещества вдоль пленки легко получить из (1.2) для  $\Gamma(t, r)$ .

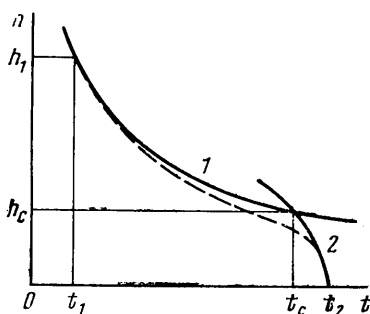
Аналогично для диффузионного режима вместо (1.5) и (1.4) имеем

$$(1.8) \quad r_0 = \left( \frac{3}{8} \frac{cD}{\Gamma} \right)^{1/2} \left( -\frac{d\sigma}{d\Gamma} \right)^{-1} \left( -h_0 \frac{dh_0}{dt} \right)^{-1/2},$$

$$r_0 = \left( \frac{Dc'}{4\Gamma} \right)^{1/2} \left( -\frac{d\sigma}{d\Gamma} \right)^{-1/2} \left( -h_0^2 \frac{dh_0}{dt} \right)^{-1/2}$$

$$(1.9) \quad \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( \frac{R}{H^2} \frac{dH}{dR} \right) - H = 0,$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( \frac{R}{H^3} \frac{dH}{dR} \right) - H = 0$$



Фиг. 2

Профиль безразмерной полутолщины пленки, соответствующий диффузионному режиму и первой изотерме  $\Pi(h)$  в (1.3), совпадает с профилем, отвечающим гидродинамическому режиму и второй изотерме в (1.3) (кривая 2 на фиг. 1). Профиль, соответствующий второму уравнению (1.9), изображен на фиг. 1 (кривая 3); в этом случае  $R_* = 0.77$ . Законы утончения, следующие из двух соотношений (1.8), имеют вид

$$(1.10) \quad h_0(t) = \left[ h^{0^2} - \frac{3}{8} \frac{cD}{\Gamma r_0^2} \left( -\frac{d\sigma}{d\Gamma} \right)^{-1} t \right]^{1/2},$$

$$h_0(t) = \left[ h^{0^2} - \frac{3}{4} \frac{c'D}{\Gamma r_0^2} \left( -\frac{d\sigma}{d\Gamma} \right)^{-1} t \right]^{1/2}$$

причем  $r_0$  определено в соотношении (1.7) при  $R_* = 0.74$  и  $0.77$  соответственно.

2. Гидродинамический режим при преобладании сил капиллярного давления был рассмотрен в [1], но безразмерная координата  $R_*$  была определена иначе, чем в этой работе. Если воспользоваться условием  $\partial^2 p / \partial R^2 = 0$  при  $R = R_*$ , получим  $R_* = 1.656$  и

$$(2.1) \quad \frac{1}{h_0^3(t)} - \frac{1}{h^{0^3}} = \frac{\sigma}{\mu} \left( \frac{R_*}{a_*} \right)^4 t$$

Диффузионный режим истечения может быть рассмотрен аналогично п. 1. В результате для полутолщины свободной пленки, утончающейся по диффузионному режиму, получим

$$(2.2) \quad \frac{1}{h_0^2(t)} - \frac{1}{h^{0^2}} = 2 \left( \frac{R_*}{a_*} \right)^4 \frac{D\sigma}{\Gamma} \left( -\frac{d\sigma}{d\Gamma} \right)^{-1} t$$

где  $R_* = 1.656$ .

Подчеркнем, что  $h_0(t)$  из (2.1) и (2.2) лишь асимптотически стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , в то время как  $h_0(t)$  из (1.6) или (1.10) обращается в нуль за конечный промежуток времени.

Условие реализации диффузионного режима получается, если использовать представление для  $uh$  из (1.2).

$$(2.3) \quad \frac{1}{\Gamma} \left( -\frac{d\sigma}{d\Gamma} \right)^{-1} \gg \frac{h_0}{3\mu D}$$

откуда видно, что гидродинамический режим сменяется диффузионным при достижении пленкой достаточно малой толщины. Условие (2.3) справедливо при преобладании как молекулярных, так и капиллярных сил. В последнем случае оно было получено в [1]. Вывод о непрерывном переходе к диффузионному режиму истечения по мере утончения пленки был сделан из общих соображений в [3].

3. Результаты п. 1 и 2 позволяют представить процесс утончения пленки следующим образом. В области  $h_0 \gg h_c$ , где критическая полутолщина  $h_c$  определяется из условия приближенного равенства градиентов капиллярного и молекулярного давлений

$$(3.1) \quad \sigma a_*^{-2} \sim d\Pi/dh, \quad h = h_c$$

преобладают силы капиллярного давления, и утончение осуществляется в соответствии с (2.1) или (2.2) в зависимости от знака неравенства (2.3). Зависимость полутолщины  $h_0$  в центре пленки от  $t$ , соответствующая этой области, показана кривой 1 на фиг. 2. В области  $h_0 \ll h_c$  капиллярное давление несущественно, и утончение происходит под действием ван-дер-ваальсовых сил в соответствии с (1.7) или (1.11) и описывается кривой 2 на фиг. 2. В области  $h_0 \sim h_c$  существенны силы обоих типов, и истинная кривая  $h_0(t)$  (пунктир на фиг. 2) отличается от асимптотических автомоделейных кривых 1 и 2. Пусть  $h_1$  — значение  $h_0$  в некоторый начальный момент  $t_1$ , а  $t_2$  — момент времени, при котором  $h_0(t)$  обращается в нуль. «Время жизни» пленки  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Для его приближенной оценки аппроксимируем реальную кривую  $h_0(t)$  кривыми 1 и 2, пересекающимися в точке  $(t_c, h_c)$  на фиг. 2

$$(3.2) \quad \Delta t = (t_c - t_1) + (t_2 - t_c)$$

причем слагаемые в (3.2) вычисляются из (2.1) или (2.2) и из (1.7) или (1.11).

Простые оценки, основанные на результатах п. 1, показывают, что обычно время  $t_2 - t_1$  значительно меньше времени  $t_c - t_1$  в (3.2). Полагая  $h_1 \gg h_c$ , имеем в условиях гидродинамического и диффузионного режимов соответственно

$$(3.3) \quad \Delta t = \frac{\mu}{\sigma h_c^3} \left( \frac{a_*}{R_*} \right)^4 \sim \frac{\mu a_*^4}{\sigma h_c^3}$$

$$(3.4) \quad \Delta t = \frac{\Gamma}{2\sigma D h_c^2} \left( -\frac{d\sigma}{d\Gamma} \right) \left( \frac{a_*}{R_*} \right)^4 \sim \frac{\Gamma a_*^4}{\sigma D h_c^2} \left( -\frac{d\sigma}{d\Gamma} \right)$$

Оценки для  $h_c$  в (3.3) и (3.4), следующие из (3.1) и отвечающие двум изотермам  $\Pi(h)$  в (1.3), имеют вид

$$(3.5) \quad h_c \sim (ca_*^2/\sigma)^{1/4}, \quad h_c \sim (c'a_*^2/\sigma)^{1/5}$$

Таким образом, вывод о разрушении тонкой пленки за конечное время следует уже из рассмотрения задачи о регулярном процессе истечения жидкости без привлечения соображений о нарушении устойчивости этого процесса или о возмущающем влиянии тепловых флуктуаций толщины очень тонкой пленки. Это — вывод принципиального характера, не замеченный ранее, что и стимулировало исследование по устойчивости свободных пленок [4, 5]. Оценки (3.5) для критической полутолщины фактически совпадают с получаемыми на основе модели разрыва пленки за счет нарушения устойчивости. Соотношения (3.5) в такой же мере подтверждаются экспериментами (см., например, [6]), что и формулы в [4, 5], но вопрос об адекватности модели разрушения в результате развития возмущений толщины пленки, признанной в настоящее время в качестве основной модели разрушения, остается открытым.

Поступила 21 II 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Буевич Ю. А., Липкина Э. Х. Автомоделное утончение жидкой пленки, разделяющей жидкие или жидкую и твердую фазы. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 2.
2. Hartland S. The pressure distribution in axisymmetric draining films. J. Colloid Interface Sci., 1971, vol. 35, No. 2, p. 227.
3. Lee J. C., Hodgson T. D. Film flow and coalescence, pt 1. Basic relations, film shape and criteria for interfacial mobility. Chem. Engng Sci., 1968, vol. 23, No. 11, p. 1375.
4. Vrij A. Possible mechanism for the spontaneous rupture of thin, free liquid films. Disc. Faraday Soc., 1966, vol. 42, No. 1, p. 23.

5. Vrij A., Hesselink F. Th., Luccassen J., Van den Tempel M. Waves in thin liquid films, pt. 2. Symmetrical modes in very thin films and film rupture. Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet., 1970, Ser. B, vol. 73, No. 2, p. 124.
6. Scheludko A., Manev E. Critical thickness of rupture of chlorbenzene and aniline films. Trans. Faraday Soc., 1968, vol. 64, No. 544, p. 1124.

УДК 532.51

## ДВИЖЕНИЕ ДЕФОРМИРУЮЩЕГОСЯ КОНТУРА В ПОТОКЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ

С. Д. ВИЛЬХОВЧЕНКО

(Москва)

Решается плоская задача о движении деформирующегося контура в потоке идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью. Получено явное выражение для гидродинамической силы, когда скорость внешнего потока линейно зависит от координат. В случае контура малого размера это выражение справедливо и при произвольном внешнем потоке.

1. Пусть  $v$  — скорость внешнего потока. Скорость жидкости  $w$  будем определять, предполагая ее непрерывной, считая известными циркуляцию  $\Gamma$ , поступательную  $V_0$  и угловую  $\Omega$  скорости связанной с контуром системы координат, а также закон деформации контура в этой системе. Разобьем  $v$  на потенциальную и вихревую составляющие

$$(1.1) \quad v = u + \omega \times r, \quad \omega = 1/2 \operatorname{rot} v$$

Скорость  $w$  в переменных подвижной системы координат можно представить в виде

$$w = w_1 + w_2 + w_3$$

где  $w_1$  — скорость жидкости при движении деформирующегося контура в потоке  $u$ ,  $w_2$  — при обтекании неподвижного твердого контура потоком  $\omega \times r$ ,  $w_3$  — при обтекании неподвижного твердого контура циркуляционным потоком интенсивности  $\gamma$ . Легко получить

$$(1.2) \quad w_2 = \operatorname{grad} \Phi_2 + \omega \times r$$

где  $\Phi_2$  — потенциал скорости, соответствующий вращению твердого контура с угловой скоростью  $(-\omega)$ . Из условия постоянства  $\Gamma$  [1] и из (1.2) с помощью формулы Стокса получаем

$$(1.3) \quad \gamma = \Gamma - 2\omega S$$

где  $S$  — площадь контура. Поскольку [2]  $d\omega/dt = 0$ , то

$$(1.4) \quad d\gamma/dt = -2\omega dS/dt$$

Обозначим потенциалы скоростей  $w_1$  и  $w_3$  через  $\Phi_1$  и  $\Phi_3$  соответственно. Тогда

$$(1.5) \quad w = q + \omega \times r, \quad q = \operatorname{grad} \Phi, \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

В каждый момент времени  $q$  можно рассматривать как скорость жидкости при движении контура в потоке  $u$  с циркуляцией  $\gamma$  и с измененной на  $(-\omega)$  скоростью вращения подвижной системы координат.

2. Динамические уравнения движения жидкости допускают интеграл [2]

$$(2.1) \quad -\frac{p-p_0}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{w^2}{2} + 2\omega \Psi$$

где  $\Psi$  — функция тока для скорости  $w$ . Символом  $\delta/\delta t$  обозначим производную относительно подвижной системы координат. Тогда

$$(2.2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\delta \Phi}{\delta t} - (V_0 + \Omega \times r) q - (\omega \times V_0) r$$

Подставляя (2.2) и (1.6) в (2.1), получим

$$(2.3) \quad -\frac{p-p_0}{\rho} = -\frac{p_1}{\rho} + \frac{\omega^2 r^2}{2} - (\omega \times V_0) r + 2\omega \Psi,$$

$$p_1/\rho = \frac{\delta \Phi}{\delta t} - (V_0 + (\Omega - \omega) \times r) q + \frac{q^2}{2}$$