

О КОМБИНИРОВАННОЙ (ВЫНУЖДЕННОЙ И СВОБОДНОЙ)
ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ В КАНАЛЕ МЕЖДУ
ВЕРТИКАЛЬНЫМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Л. Э. БЭР

(Пермь)

Рассмотрена установившаяся комбинированная (вынужденная и свободная) турбулентная конвекция в канале между вертикальными параллельными плоскостями в случае, когда на стенках канала поддерживается постоянный вертикальный градиент температуры. Определено распределение скорости и температуры жидкости. Для случая равных температур плоскостей при отрицательных значениях числа Рэлея R^* установлено существование бегущих критических чисел Рэлея R_0^* . Критические значения R_0^* увеличиваются вместе с заданными значениями R^* , постоянно превышая их. Выведены интегральные формулы для определения сопротивления и теплообмена. Для решения задачи используется метод Бубнова – Галеркина.

1. Постановка задачи. Предполагается, что установившееся турбулентное движение механически несжимаемой, но термически деформируемой жидкости происходит между вертикальными параллельными плоскостями, на которых поддерживается постоянный вертикальный градиент температуры A . В канале имеется постоянный вертикальный градиент давления и распределены внутренние источники тепла в виде произвольной функции от поперечной координаты x . Числа Рэлея достаточно велики по сравнению с числами Рейнольдса, так что на вынужденное движение накладывается свободное. Осредненная скорость предполагается вертикальной. Движение жидкости отнесено к системе координат, начало которой находится посредине между плоскостями и ось z направлена вертикально вверх. Ось x направлена нормально к плоскостям. От горизонтальной координаты вдоль канала переменные не зависят. Расстояние между стенками равно 2δ .

Уравнения задачи [1]

$$(1.1) \quad \nabla(\psi \nabla u) = -R_*^{-1/16}(G/R_*)\theta, \quad \nabla(\psi_1 \nabla \theta) = -PR_*Q_* + PR_*u$$

$$(1.2) \quad u^{(0)} = v^0/v_*, \quad u^{(1)} = v^{(1)}/v_*, \quad u = u^{(0)} + u^{(1)}, \quad w = v/\langle v \rangle$$

$$\theta = T/A\delta, \quad \xi = x/\delta, \quad \zeta = z/\delta, \quad \psi = 1 + v_1/v$$

$$\psi_1 = 1 + \chi_1/\chi, \quad R = \langle v \rangle 4\delta/\nu, \quad R_* = v_*\delta/\nu, \quad P = \nu/\chi$$

$$P_1 = \nu_1/\chi, \quad P_1 = P/P_1, \quad G = 16g\beta A\delta^4/\nu^2, \quad R_* = GP, \quad Q_* = Q/\rho c_p A v_*$$

Здесь $v^{(0)}$ и $v^{(1)}$ – осредненные скорости вынужденной и свободной конвекции; v и T – осредненные скорость и температура при наложении вынужденной и свободной конвекции; $\langle v \rangle$ – средняя по сечению канала скорость; v_* – динамическая скорость, определяемая ниже; T_w – температура стенки канала; p_0 – осредненное давление, соответствующее постоянной температуре жидкости; y – расстояние от стенки; y_* – безразмерное расстояние от стенки; ν_1 и χ_1 – соответственно турбулентные вязкость и температуропроводность; λ – коэффициент теплопроводности жидкости; Q – количество тепла, выделяемое внутренними источниками в единице объема жидкости в единицу времени; R – число Рейнольдса; R_* – число Рейнольдса, определенное по динамической скорости; P – число Прандтля; P_1 – турбулентное число Прандтля; G – число Грасгофа; R^* – число Рэлея. Остальные обозначения общеприняты.

В (1.1) входят четыре неизвестные функции (u , θ , v_1 , χ_1). В полуэмпирической теории v_1 и χ_1 должны быть найдены из опытных данных и физических соображений.

Температуры плоскостей могут быть записаны в виде

$$(1.3) \quad t_-(z) = t(z, -\delta) = Az - T_w, \quad t_+(z) = t(z, +\delta) = Az + T_w$$

Предполагается, что $t_-(z) < t_+(z)$. Температура середины канала при $z=0$ принята за начало отсчета температуры, т. е. $t_0(0) = 0$; $2T_w$ — температурный перепад между плоскостями, неизменный вдоль оси z . В безразмерных переменных (1.3) примет вид

$$(1.4) \quad t_-(\xi) / A\delta = \xi - \theta_w, \quad t_+(\xi) / A\delta = \xi + \theta_w$$

Граничные условия

$$(1.5) \quad u = 0, \quad \theta = \pm \theta_w \quad \text{при} \quad \xi = \pm 1$$

2. Решение. Решая второе из уравнений (1.1), найдем температуру жидкости в канале, отсчитанную от температуры стенки, на расстоянии ξ от середины

$$(2.1) \quad \theta - \theta_w = PR_* \int_1^{\xi} (J+C) (1+P_1\nu_i/\nu)^{-1} d\xi, \quad J(\xi) \equiv \int (u - Q_*) d\xi$$

$$C \equiv \left[2\theta_w / PR_* - \int_{-1}^{+1} J(1+P_1\nu_i/\nu)^{-1} d\xi \right] \left[\int_{-1}^{+1} (1+P_1\nu_i/\nu)^{-1} d\xi \right]^{-1}$$

Здесь $Q_*(\xi)$ — произвольная функция от ξ .

Для решения первого уравнения (1.1) применим метод Бубнова — Галеркина, разложив решение u по некоторой полной системе функций u_i . Ограничимся $n+1$ членами ряда

$$(2.2) \quad u = u^{(0)} + u^{(1)} = u^{(0)} + \sum_{i=1}^n A_i u_i^{(1)}$$

Подставим (2.1) и (2.2) в первое из уравнений (1.1), умножим его на каждую из функций $u_i^{(1)}$ и проинтегрируем по сечению канала. После преобразований получим систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов A_i

$$(2.3) \quad GP \int_{-1}^{+1} \frac{I_i(J+C) d\xi}{1+P_1\nu_i/\nu} + \int_{-1}^{+1} (1+\nu_i/\nu) \frac{du}{d\xi} \frac{du_i^{(1)}}{d\xi} d\xi = 0$$

$$I_i(\xi) \equiv \int_{-1}^{\xi} u_i^{(1)} d\xi \quad (i=1, 2, 3, \dots)$$

Зависимость (2.3) верна для ламинарного, турбулентного и промежуточного режимов течения. Заметим, что постоянная θ_w в выражении для температуры (2.1) при решении системы (1.1) методом Бубнова — Галеркина не имеет существенного значения.

В случае чисто свободной конвекции (без внутренних источников тепла при равных температурах плоскостей ($\rho g + dp_0/dz = Q = \theta_w = 0$)) система уравнений (1.1) однородная и имеет нетривиальное решение лишь при определенном значении числа Рэлея R_0^* , характеризующем порог конвекции. Это значение найдется из условия равенства нулю определителя системы (2.3). В этом случае при $R^* > 0$, когда в верхней части канала температура больше, чем в нижней, свободное движение вообще не возникает. При $R^* < 0$, когда в нижней части канала температура больше, чем

в верхней, движение возникает при достижении числом Рэлея своего критического значения. Как показано ниже, движение в этом случае будет антисимметричным (описывается нечетной функцией). По мере увеличения числа Рэлея (по модулю) при следующем его критическом значении возникает симметричное движение (описывается четной функцией), которое накладывается на антисимметричное.

Если кроме свободного движения имеется вынужденное ($\rho g + dp_0/dz \neq 0$) или присутствуют внутренние источники тепла ($Q \neq 0$), а также граничные условия для температуры неоднородные ($\theta_w \neq 0$), то система (2.3) имеет единственное решение при любых значениях R^* . Вынужденное движение в этом случае является причиной возникновения свободного движения при $R^* > 0$ и при малых (докритических) $R^* < 0$.

3. Ламинарная конвекция. Применим (2.3) для решения задачи о ламинарной свободной и комбинированной конвекции в вертикальном плоском канале. В качестве приближающихся функций для свободной конвекции выберем семейство нечетных и семейство четных функций

$$(3.1) \quad u_{ks}^{(1)} = (1 - \xi^{2s}) \xi^{2k-1}, \quad k=1, 2, 3, \dots; \quad s=1, 2, 3, \dots$$

$$(3.2) \quad u_m^{(1)} = (1 - \xi^{2m}) \left(1 - \frac{3(2m+3)}{2m+1} \xi^2 \right), \quad m=1, 2, 3, \dots$$

Приближающие функции удовлетворяют граничному условию на стенке и условию замкнутости потока свободной конвекции. Будем исходить из предположения, что система функций (3.1), (3.2) является полной в смысле среднего квадратичного отклонения. Параметры k, s в (3.1) и m в (3.2) выберем в соответствии с формой опытных профилей скорости.

Рассмотрим сначала свободную ламинарную конвекцию. Решение u в общем случае состоит из нечетных и четных функций. Ограничимся тремя приближающими функциями из (3.1) и тремя из (3.2).

Пусть $\theta_w \neq 0, Q=0$. Тогда движение жидкости антисимметрично. Коэффициенты A_m у четных функций (3.2) обращаются в нули. Коэффициенты у первых трех приближающих функций из (3.1) были вычислены при $k=1, S_1=1, S_2=2, S_3=3$. Сравнение с точным решением [2, 3] при значениях числа Рэлея $-1280 \leq R^* \leq 1280$ и $0 \leq \xi \leq 1$ показывает, что наибольшее отклонение не превышает 0.025%. По мере увеличения числа Рэлея отклонения постепенно нарастают. Так, при $R^*=10^4, 0 \leq \xi \leq 1$ отклонения не превышают 0.7%. При $R^*=+4 \cdot 10^4, 0 \leq \xi \leq 1$ отклонения не превышают 1.6%. В большинстве точек они значительно меньше. Вычисления, проведенные для одной, двух и трех приближающих функций, показали быструю сходимость метода.

Пусть теперь $\theta_w=0$. Тогда решение существует только при определенном значении числа Рэлея. Критическое число Рэлея, вычисленное с помощью (2.3) и (3.1), при $k=1$ и $S_1=1, S_2=2, S_3=3$ равно $R_0^* = -1558.5456$. Это значение лишь на 0.00001% больше по модулю точного значения ($-16\pi^4 = -1558.5454$), найденного в [2, 3].

При больших по модулю числах Рэлея возникает также симметричная свободная конвекция, которая накладывается на антисимметричную. С помощью (2.3) и (3.2) было вычислено соответствующее критическое число Рэлея $R_0^* = -3803.536$, найденное как функция параметра m , затем минимизированное по m .

Рассмотрим теперь комбинированную ламинарную конвекцию. Пусть

$$\rho g + dp_0/dz \neq 0, \quad Q \neq 0, \quad \theta_w \neq 0, \quad v_t/v = 0$$

причем $Q = \text{const}$. Возьмем три приближающие функции из (3.1) при $k=1, S_1=1, S_2=2, S_3=3$ и три функции из (3.2) при $m_1=1, m_2=2, m_3=3$ и вместе с функцией $u^{(0)} = R^*(1 - \xi^2)/2$ подставим в (2.3). Получим систему из шести неоднородных алгебраических уравнений для определений A_i . Система имеет единственное решение при любых значениях R^* и распадается на две системы. В первую входят коэффициенты, определяющие антисимметричное движение, во вторую — коэффициенты, определяющие симметричное движение. Коэффициенты для антисимметричного движения выражаются формулами, полученными для чисто свободной конвекции. Для симметричного движения при $-3200 \leq R^* \leq 3200$ отклонения от точного решения [2, 3] не превышают 0.025%. По мере увеличения числа Рэлея отклонения постепенно нарастают, причем наибольшие отклонения наблюдаются при $\xi=0$. Так, при $R^*=+10^4, \xi=0$ отклонение составляет 1.9%, а при $\xi > 0.3$ оно не превышает 0.2%. При $R^*=+4 \cdot 10^4, \xi=0$ отклонение равно 12%, а при $\xi > 0.3$ оно не превышает 1.5%.

Можно было бы улучшить точность при больших числах Рэлея, добавив еще хотя бы одну приближающую функцию. Однако локальные отклонения скорости в ту и другую сторону не оказывают существенного влияния на интегральные характеристики изучаемых процессов, такие как характеристические числа Рэлея, числа Нуссельта и др.

4. Турбулентная конвекция. Рассмотрим теперь комбинированную турбулентную конвекцию в вертикальном плоском канале. Пусть

$$\rho g + \partial p_0 / \partial z \neq 0, \quad Q = 0$$

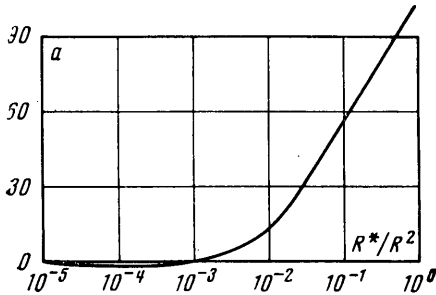
При чисто вынужденной конвекции турбулентная вязкость в ядре потока хорошо описывается функцией [4]

$$(4.1) \quad \nu_t / \nu = {}^1/_{15} R_* (1 - \xi^2) (1 + 2\xi^2) - 1$$

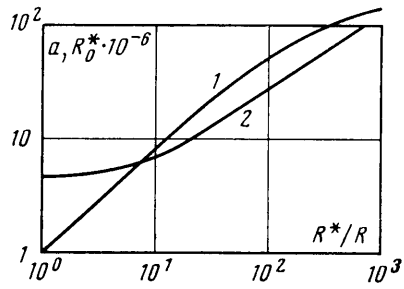
Вблизи стенки канала другая известная формула Рейхардта [4] дает несколько завышенные значения турбулентной вязкости. Поэтому была использована формула

$$(4.2) \quad \nu_t / \nu = 0.5986 (y_*/10)^4 - 0.1660 (y_*/10)^6 + 0.01302 (y_*/10)^8$$

Вычисленные с помощью (4.1) и (4.2) значения скорости в ядре потока сравнивались с формулой Никурадзе. Локальные отклонения в ту и другую сторону не превышают 1–2% и лежат в пределах точности самой формулы Никурадзе.



Фиг. 1



Фиг. 2

В пристеночном слое для ν_t / ν воспользуемся выражением (4.2) до точки сопряжения с (4.1), а в ядре потока — (4.1).

Результаты непосредственных измерений турбулентной вязкости при комбинированной турбулентной конвекции в вертикальном канале в литературе отсутствуют. Такие данные можно получить с удовлетворительной точностью путем обработки опытных данных по теплообмену. При комбинированной турбулентной конвекции учитывалась добавочная турбулентная вязкость, которая была взята в виде

$$(4.3) \quad \varepsilon / \nu = a (y_*/11)^4 \exp(-y/11)$$

Коэффициент a находился путем обработки опытных данных [5] с использованием (5.6) и второй из формул (6.5) (см. ниже).

На фиг. 1 представлена зависимость a от R^*/R^2 при $R^* > 0$, т. е. когда потоки вынужденной и свободной конвекции у стенки совпадают. На фиг. 2 кривая 1 изображает зависимость a от R^*/R при $R^* < 0$, т. е. когда у стенки противоток. Исследования были проведены в интервале изменения параметра R_* от 110 до 314. Как видно из фиг. 1, при $R^*/R^2 < 10^{-3}$ свободная конвекция ламинаризует поток. При $R^*/R^2 > 10^{-3}$, когда форма профиля скорости сильно искривлена и вытянута, свободная конвекция, напротив, интенсивно турбулизует поток.

При вынужденном турбулентном течении будем искать профиль скорости в плоском канале в виде

$$(4.4) \quad u^{(0)} = a_1 [(1 - \xi^{2n}) + a_2 (1 - \xi^2)]$$

Здесь n , a_1 и a_2 — неизвестные коэффициенты. Второе слагаемое в (4.4) играет вспомогательную роль и a_2 меняется незначительно. При чисто вынужденной турбулентной конвекции с хорошей точностью можно принять $a_2 = 1/3$ для любых значений R_* . При определении или выборе a_2 существует определенный произвол, подобно тому как существует некоторый произвол в выборе аппроксимирующих функций в других интегральных методах, например в методе Бубнова — Галеркина. Поэтому при комбинированной турбулентной конвекции можно с удовлетворительной точностью тоже положить $a_2 = 1/3$.

Небольшие отклонения a_2 от его истинного значения хорошо корректируются формулами для определения n и a_1 , и в результате погрешность для скорости получается незначительной.

Для определения n следует вычислить среднюю по сечению скорость $\langle v \rangle$ и касательное напряжение на стенке τ_w с использованием (4.4) и подставить в выражение для коэффициента сопротивления $f=8\tau_w/\rho\langle v \rangle^2$

$$(4.5) \quad n = \frac{1}{4} \{ 3K - 1 + 2a_2(K-1) \pm \sqrt{[3K - 1 + 2a_2(K-1)]^2 - 8(1-K)a_2} \}$$

$$K = Rf/96$$

Коэффициент сопротивления f может быть найден или из (5.6), или из (5.8) или с помощью эмпирических формул.

Коэффициент a_1 найдем из равенства

$$u_{\max}^{(0)} = a_1(1+a_2)$$

Для определения $u_{\max}^{(0)}$ может послужить зависимость

$$(4.6) \quad u_{\max}^{(0)} = R_* \int_0^1 (1+v_i/v)^{-1} \xi d\xi$$

Эта формула получена путем решения первого из уравнений (1.1) при условии $G=0$.

В ламинарном случае ($1/f=R/96$) коэффициент $n=1$ и выражение (4.4) переходит в параболу Пуазейля.

Из (4.5) следует, что если $R=6336$ ($R_*=110$), то $n=3.9$; если $R=21840$ ($R_*=314$), то $n=10.25$; если $R=54576$ ($R_*=700$), то $n=21$.

При комбинированной конвекции величину $u^{(0)}$ можно тоже найти из (4.4).

Вычисляя $u_{\max}^{(0)}$ из (4.7) и f из (5.6), необходимо учесть дополнительную турбулентную вязкость ε .

На фиг. 3 представлена зависимость n от a при $R_*=314$, $a_2=1/3$.

Пусть заданы параметры R_* и R^* (фиг. 1 и 2), тогда R и f могут быть вычислены. Исключая f из (5.6) и (5.7), получим

$$(4.7) \quad 4R_*^2 I = R$$

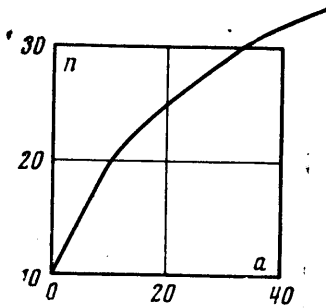
Здесь через I обозначен интеграл из (5.6). Уравнение (4.7) решалось способом «пристрелки». Для заданных R_* и R^* ориентировочно оценивалась величина R . Для конкретных R^* и R с помощью фиг. 1 или фиг. 2 находилась коэффициент a . При конкретных R_* и a с использованием (4.1) – (4.3) численно определялся интеграл I . Затем величины R_* , R и I подставлялись в (4.7). По величине и знаку невязки оценивалось новое значение R . Для R_* , R^* и нового R повторялись те же вычисления. Процедура продолжалась пока не находилось истинное значение R .

При ламинарной комбинированной конвекции, когда число Рэлея становится близким к критическому, амплитуда свободной конвекции стремится к бесконечности, движение теряет устойчивость и переходит в другой тип движения. Как показали вычисления, турбулентная комбинированная конвекция имеет особенность.

Если перепад температур между плоскостями отсутствует ($\theta_w=0$) и числа Рэлея отрицательны и меньше (по модулю) критических, то накладывающаяся на вынужденную свободная конвекция симметричная и потоки свободной и вынужденной конвекции у стенки находятся в противотоке. Возникает сильное возбуждение турбулентности, в особенности в пристеночном слое. Из-за возрастания турбулентной вязкости критические значения числа Рэлея R^* тоже возрастают, причем критические числа Рэлея R_0^* возрастают так, что остаются всегда больше заданных значений R^* . Таким образом, при комбинированной турбулентной конвекции в вертикальном канале существуют бегущие критические числа Рэлея R_0^* .

Антисимметричное движение могло бы возникнуть, если бы число R^* достигло соответствующего критического значения. Но из-за турбулизации потока критические числа R_0^* растут быстрее, чем заданные, и свободная конвекция остается симметричной. Если же $\theta_w \neq 0$, то антисимметричное движение существует наряду с симметричным.

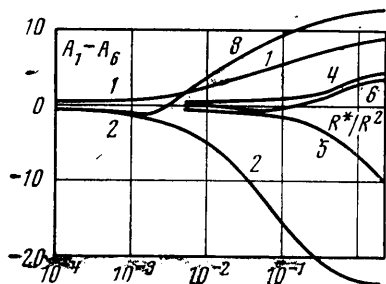
В качестве приближающих функций для свободной конвекции была взята система функций (3.2). При турбулентном режиме течения приближающие функции должны отражать факт наличия большого градиента скорости у стенки. Имея в ви-



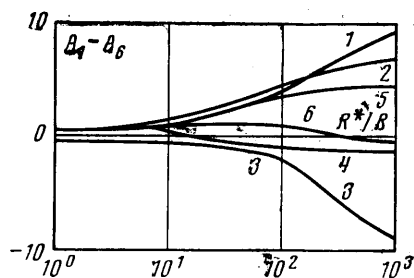
Фиг. 3

ду получение наилучшего приближения только с тремя приближающими функциями, положим $m_1=5$, $m_2=15$, $m_3=45$. Определить параметры m_i однозначно невозможно, так как существует широкое семейство примерно равноценных аппроксимаций.

Коэффициенты A_i , $i=1-6$ были определены с помощью (2.3) с использованием (3.2), (4.1) - (4.4) при $P=4$, $P_i=1$, $R_*=110$ и 314 и различных a и R^* . Интегралы, входящие в (2.3), были вычислены путем численного интегрирования. Первоначально A_i были найдены для заданных P , P_i и R_* при различных a как функции от R^* . Для конкретных R_* , R^* и известной фиг. 1 (при $R^*>0$) отыскивалось R согласно (4.7). Для данного значения R^*/R^2 величина a находилась согласно фиг. 1 и были



Фиг. 4



Фиг. 5

взяты значения A_i из фигуры, построенной для соответствующего a . Таким образом была построена фиг. 4, на которой кривые 1, 2, 3 построены для $R_*=314$, $P=4$, кривые 4, 5, 6 - для $R_*=110$, $P=4$. Аналогично были найдены A_i при $R^*<0$. На фиг. 5 кривые 1, 2, 3 построены для $R_*=314$, $P=4$, кривые 4, 5, 6 - для $R_*=110$, $P=4$. На фиг. 4-5 кривая 1 - A_1 ($m_1=5$), 2 - A_2 ($m_2=15$), 3 - A_3 ($m_3=45$), 4 - A_4 ($m_1=5$), 5 - A_5 ($m_2=15$), 6 - A_6 ($m_3=45$).

На фиг. 2 кривая 2 показывает зависимость критического числа Рэлея R_0^* от R^*/R при $R_*=314$, $P=4$.

5. Сопротивление. Определим сопротивление при наложении вынужденной и свободной конвекции в вертикальном плоском канале. Средняя по сечению канала скорость

$$(5.1) \quad \langle v \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} v d\xi$$

Согласно гипотезе Ньютона имеем

$$(5.2) \quad \tau / \rho = -(v + v_i) dv / dx$$

Из условия равновесия сил при установившемся течении в плоском вертикальном канале следует:

$$(5.3) \quad -\rho g - \partial p_0 / \partial z = \rho v_*^2 / \delta$$

Выполняя ряд преобразований с использованием равенства (5.2), (5.3) и условия замкнутости потока свободной конвекции, найдем

$$(5.4) \quad \langle v \rangle = -\frac{\delta^2}{\nu \rho} (\rho g + \partial p_0 / \partial z) \int_0^1 (1 + v_i / \nu)^{-1} \xi^2 d\xi$$

Согласно определению коэффициента сопротивления имеем

$$(5.5) \quad f = -\frac{4\delta}{\frac{1}{2}\rho \langle v \rangle^2} (\rho g + \partial p_0 / \partial z)$$

Исключая из (5.4) и (5.5) множитель в круглых скобках, получим

$$(5.6) \quad \frac{1}{f} = \frac{R}{32} \int_0^1 (1 + v_i/v)^{-1} \xi^2 d\xi$$

Из (5.3) и (5.5) следует:

$$(5.7) \quad R_* = R \sqrt{f/128}$$

Если из (5.6) и (5.7) исключить число Рейнольдса R , найдем

$$(5.8) \quad f = 8 / I^2 R_*^2$$

Здесь через I обозначен входящий в (5.6) интеграл. Если параметры R_* и a заданы, то следует путем численного интегрирования найти интеграл I , а затем согласно (5.8) и (5.7) отыскать f и R .

Равенство (5.6) справедливо при ламинарном, турбулентном и промежуточном режимах течения. При ламинарном течении из (5.6) вытекает формула Пуазейля

$$(5.9) \quad 1/f = R/96$$

Свободная конвекция влияет на сопротивление через эффект возмущения или стабилизации пристеночного слоя. При турбулентном течении в вертикальном канале, нагревая или охлаждая стенки, можно регулировать сопротивление.

6. Теплообмен. Рассчитаем теплообмен при наложении вынужденной и свободной конвекции в вертикальном плоском канале в случае отсутствия в жидкости источников тепла.

По определению число Нуссельта

$$(6.1) \quad N = 4\delta q_w / \lambda (\langle T \rangle - T_w)$$

Рассмотрим симметричное течение. Пусть $Q=0$, перепад температур между плоскостями отсутствует и течение по каналу симметричное. С помощью второго уравнения (1.1) найдем плотность теплового потока на стенке

$$(6.2) \quad q_w = -\rho C_p A \delta \langle v \rangle$$

Подставляя в (6.1) равенство (6.2) и выражение для средней температуры

$$(6.3) \quad \langle T \rangle - T_w = \int_0^1 (T - T_w) w d\xi$$

а также учитывая следующую из (5.7) зависимость

$$(6.4) \quad v_* = \langle v \rangle \sqrt{f/8}$$

после преобразований получим

$$(6.5) \quad 1/N = \frac{1}{4} \int_0^1 J_1^2 (1 + P_1 v_i/v)^{-1} d\xi \quad \text{или} \quad 1/N = \frac{f}{32} \int_0^1 J_2^2 (1 + P_1 v_i/v)^{-1} d\xi$$

$$(6.6) \quad J_1(\xi) = \int_0^\xi w d\xi, \quad J_2(\xi) = \int_0^\xi u d\xi$$

Пусть теперь $\theta_w \neq 0$, тогда при всех числах Рэлея на симметричное движение накладывается антисимметричное. Вычисления с использованием второго уравнения (1.1) дают

$$(6.7) \quad q_w = \rho C_p A \delta \langle v \rangle$$

Знак q_w определяют граничные условия (1.5). Имеем

$$(6.8) \quad \langle T \rangle - T_w = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (T - T_w) w \, d\xi$$

Выполняя ряд преобразований с учетом равенств (6.1), (6.7), (6.8) и (6.4), получим

$$(6.9) \quad 1/N = \frac{1}{8} \int_{-1}^{+1} J_3 (1 - J_3) (1 + P_1 v_i / \nu)^{-1} d\xi \quad \text{или}$$

$$1/N = \sqrt{f/512} \int_{-1}^{+1} J_4 (1 - \sqrt{f/8} J_4) (1 + P_1 v_i / \nu)^{-1} d\xi$$

$$(6.10) \quad J_3 = \int_{-1}^{\xi} w \, d\xi, \quad J_4 = \int_{-1}^{\xi} u \, d\xi$$

Равенства (6.9) справедливы при ламинарном, турбулентном и промежуточном режимах течения, т. е. при всех движениях, которые описываются уравнениями (1.1) при $Q=0$.

Поступила 26 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэр Л. Э. Применение метода Галеркина к решению задачи о комбинированной (вынужденной и свободной) турбулентной конвекции в вертикальном круговом канале в однородном массиве. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
2. Ostrach S. Combined natural and forced convection laminar flow and heat transfer of fluids. NASA TN 3141, 1954.
3. Pегипер С. А. О конвективном движении проводящей жидкости между параллельными вертикальными пластинами в магнитном поле. ЖЭТФ, 1959, т. 37, вып. 1 (7).
4. Reichardt H. Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen. ZAMM, 1951, Bd 31, S. 208.
5. Перухов Б. С., Стригин Б. К. Экспериментальное исследование теплообмена при вязкостно-инерционно-гравитационном течении жидкости в вертикальных трубах. Теплофизика высоких температур, 1968, т. 6, № 5.