

ВЛИЯНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В ЛАМИНАРНОМ ПОДСЛОЕ  
НА ТРЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН В НЕРАВНОВЕСНО  
ДИССОЦИИРУЮЩЕМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Ю. Н. КОЙЧЕВ, Ю. С. ЧУМАКОВ

(Ленинград)

Исследуется влияние процессов переноса в ламинарном подслое на трение и теплообмен при конечной скорости реакции диссоциации в газовой фазе и наличии гетерогенной реакции рекомбинации на поверхности с произвольными каталитическими свойствами. Задача решается при обычных для теории турбулентного пограничного слоя допущениях, т. е. принимается двухслойная модель пограничного слоя, а турбулентные аналоги чисел Прандтля и Шмидта предполагаются равными единице. Приводится пример расчета турбулентного пограничного слоя при наличии неравновесной диссоциации воздуха. Воздух рассматривается как трехкомпонентная смесь, состоящая из атомов кислорода и молекул кислорода и азота (протекает только реакция диссоциации кислорода).

Влияние равновесной диссоциации на трение и теплообмен в турбулентном пограничном слое плоской пластины исследовалось в [1] в рамках упрощенной модели «идеально диссоциирующего газа», предложенной в [2].

Приближенный способ расчета трения и теплоотдачи в турбулентном пограничном слое на плоской пластине в случае «замороженного» состояния газа был предложен также в [3] и получил дальнейшее развитие в [4]. В этой работе в основу исследования положена модель [2].

Отметим также работу [5], в которой исследовалось влияние каталитической рекомбинации на теплопередачу в пограничном слое при замороженном течении. Обстоятельное исследование трения и теплообмена в турбулентном пограничном слое, как для равновесного и замороженного течения газа, так и при конечной скорости реакции диссоциации для случая бинарной смеси газов проведено в [6]. В этой работе числа Прандтля и Шмидта считались постоянными поперек ламинарного подслоя. Правомерность этого допущения остается неясной, так как увеличение относительной толщины ламинарного подслоя при гиперзвуковых скоростях может привести к возрастанию роли процессов переноса тепла и массы в ламинарном подслое.

**1. Постановки задачи.** Если направить оси координат  $x$  и  $y$  вдоль по поверхности и по нормали к пластине соответственно, то система уравнений турбулентного пограничного слоя при наличии химических реакций в газовой фазе и граничные условия будут иметь вид [6]

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

$$(1.2) \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \epsilon) \frac{\partial u}{\partial y} \right]$$

$$(1.3) \quad \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\mu}{Pr} \left[ \frac{\partial H}{\partial y} + \sum_i (Le_i - 1) h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} + (Pr - 1) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^2}{2} \right) \right] \right\}$$

$$(1.4) \quad \rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = w_i + \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Sc_i} \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) \quad (i=1, 2, \dots, N-1)$$

$$(1.5) \quad \sum_i c_i = 1, \quad p = \rho T \frac{R_0}{m}$$

$$(1.6) \quad H = h + u^2/2, \quad h = \sum_i c_i h_i, \quad h_i = c_{pi} T + h_i^0$$

$$(1.7) \quad \text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad \text{Le}_i = \frac{\rho D_i c_p}{\lambda}, \quad \text{Sc}_i = \frac{\mu}{\rho D_i}, \quad c_p = \sum_i c_i c_{pi}$$

$$(1.8) \quad u \rightarrow U_e, \quad c_i \rightarrow c_{ie}, \quad H \rightarrow H_e \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty$$

Здесь  $u, v$  — проекции вектора скорости на координатные оси  $x$  и  $y$ ;  $p, \rho, T$  — давление, плотность и температура газа;  $m = \left( \sum_i c_i / m_i \right)^{-1}$  — молекулярный вес газа;  $c_i, w_i, m_i$  — массовая концентрация, массовая скорость образования и молекулярный вес  $i$ -й компоненты соответственно;  $\mu, \varepsilon$  — коэффициенты динамической и турбулентной вязкости;  $H$  — полная энтальпия газа;  $h_i^0, c_{pi}$  — энтальпия образования и удельная теплоемкость  $i$ -й компоненты;  $\lambda$  — коэффициент молекулярной теплопроводности;  $D_i$  — эффективный коэффициент диффузии;  $c_p$  — удельная теплоемкость смеси газов.

Состав газа на внешней границе пограничного слоя предполагается равным равновесному составу при заданной температуре и давлении. Граничные условия на поверхности можно записать лишь формально

$$(1.9) \quad u = v = 0, \quad c_i = c_{iw}, \quad H = H_w \quad \text{при} \quad y = 0$$

так как состав газа на поверхности при наличии гетерогенных химических реакций заранее неизвестен и должен определяться в процессе решения задачи. Уравнение для определения состава на поверхности можно получить из условия равенства скорости образования  $i$ -й компоненты  $g_{iw}$  на поверхности диффузионному потоку  $j_{iw}$  этой компоненты к поверхности

$$(1.10) \quad j_{iw} = -g_{iw}$$

**2. Связь полной энтальпии и концентрации с профилем скорости.** Примем двухслойную схему пограничного слоя (ламинарный подслой — турбулентное ядро) и будем предполагать, что турбулентные аналоги чисел Прандтля и Шмидта равны единице. Чтобы связать полную энтальпию со скоростью, запишем (1.3) в переменных Крокко  $\xi, u$  [°]. Кроме того, примем, что профиль полной энтальпии зависит только от скорости  $u$  и не зависит от продольной координаты  $\xi$  (при этом неявная зависимость от физической координаты  $x$  остается, так как  $u = u(x)$ ). Это допущение строго выполняется при значениях чисел Прандтля и Шмидта, равных единице, [°]. Принятое допущение, а также предположение о постоянстве напряжения трения поперек пограничного слоя ( $\tau = \text{const} = \tau_w$ ) позволяет упростить уравнение энергии (1.3). Результирующее уравнение запишем отдельно для ламинарного подслоя и турбулентного ядра соответственно

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{1}{\text{Pr}} \left[ \frac{\partial H}{\partial u} + \sum_i (\text{Le}_i - 1) h_i \frac{\partial c_i}{\partial u} + (\text{Pr} - 1) u \right] \right\} = 0$$

$$(2.2) \quad d^2 H / du^2 = 0$$

Интегрируя (2.1) и определяя первую постоянную интегрирования из условия на стенке (при  $u = 0, q = q_w$ ), а вторую из условия  $H = h_w$  при

$u=0$ , получим для полной энтальпии в ламинарном подслое

$$(2.3) \quad H_L(u) = h_w + \frac{2C_h}{c_f}(H_r - h_w)I_1(u) - \sum_i I_{3i}(u) + \frac{U_e^2}{2}[u^2 - 2I_2(u)]$$

$$I_1(u) = \int_0^u \text{Pr} \, du, \quad I_2(u) = \int_0^u \text{Pr} \, u \, du, \quad I_{3i}(u) = \int_0^u (\text{Le}_i - 1) h_i \frac{\partial c_i}{\partial u} \, du$$

В турбулентном ядре профиль полной энтальпии получим, проинтегрировав дважды (2.2). Первую постоянную интегрирования определим из условия постоянства теплового потока поперек пограничного слоя, т. е.  $q = \text{const} = q_w$ . Вторую постоянную интегрирования найдем из условия на внешней границе пограничного слоя (1.8). В результате получим

$$(2.4) \quad H_r(u) = H_e + 2C_h c_f^{-1}(H_r - h_w)(1-u), \quad C_h = q_w / \rho_e U_e (H_r - h_w)$$

Здесь  $2C_h/c_f$  — параметр аналогии Рейнольдса,  $C_h$  — число Стантона,  $H_r$  — энтальпия восстановления.

Выражение для определения параметра аналогии Рейнольдса получим, приравняв значения полной энтальпии из соотношений (2.3) и (2.4) на границе ламинарного подслоя и турбулентного ядра

$$\frac{2C_h}{c_f} = \left\{ h_e + [1 + 2I_2(u_L) - u_L^2] \frac{U_e^2}{2} - h_w + \sum_i I_{3i}(u_L) \right\} \{ [1 - u_L + I_1(u_L)] (H_r - h_w) \}^{-1}$$

Для определения связи концентрации со скоростью примем упрощающее допущение о независимости концентрации от продольной координаты  $\xi$  [6]. В результате получим обыкновенные дифференциальные уравнения отдельно для ламинарного подслоя и турбулентного ядра

$$(2.5) \quad \frac{d}{du} \left( \frac{1}{\text{Sc}_i} \frac{dc_i}{du} \right) = - \frac{\mu}{\tau} \frac{w_i}{\tau_w}$$

$$(2.6) \quad \frac{d^2 c_i}{du^2} = - \frac{\varepsilon}{\tau} \frac{w_i}{\tau_w}$$

Дважды интегрируя (2.5) и определяя постоянные интегрирования из условий на стенке  $j_i = j_{iw}$  и  $c_i = c_{iw}$ , получим профиль концентрации в ламинарном подслое

$$(2.7) \quad c_{Li}(u) = c_{iw} \left( 1 + A_{iw} \int_0^u \text{Sc}_i \, du \right) - J_{Li}(u)$$

Для получения профиля концентрации в турбулентном ядре необходимо дважды проинтегрировать (2.6), используя для определения постоянных интегрирования условие равенства диффузионных потоков на границе ламинарного подслоя и турбулентного ядра и условие на внешней границе пограничного слоя (1.8). В результате найдем

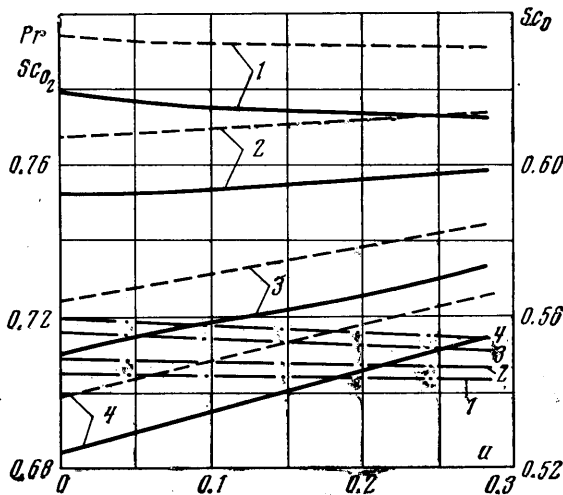
$$(2.8) \quad c_{Ti}(u) = c_{ie} + J_{Ti}^*(1) - J_{Ti}(u) - (1-u) [A_{iw} c_{iw} - J_{Li}^*(u_L)]$$

$$J_{Li}^*(u) = U_e^2 \int_0^u \frac{\mu}{\tau} \frac{w_i}{\tau_w} \, du, \quad J_{Li}(u) = \int_0^u \text{Sc}_i J_{Li}^*(u) \, du$$

$$J_{Ti}(u) = U_e^2 \int_{u_L}^u du \int_{u_L}^u \frac{\epsilon w_i}{\tau \tau_w} du, \quad A_{iw} = \frac{k_{wi} \rho_w U_e}{\tau_w}$$

Здесь  $A_{iw}$  — параметр каталитической рекомбинации,  $k_{wi}$  — константа скорости реакции каталитической рекомбинации на поверхности.

Выражение для концентрации на поверхности можно получить, приравняв значения концентраций из (2.7) и (2.8) на границе ламинарного



Фиг. 1

подслоя и турбулентного ядра. Можно получить

(2.9)

$$c_{iw} = [c_{ie} + J_{Ti}(1) + J_{Li}(u_L) + (1-u_L)J_{Li}^*(u_L)] \left[ 1 + A_{iw} \left( 1 - u_L + \int_0^{u_L} Sc_i du \right) \right]^{-1}$$

**3. Коэффициенты переноса. Определение поверхностного трения.** Для определения вязкости смеси газов использовалась формула Уилки [7], а для теплопроводности — формула Масона и Саксена [8].

Диффузионный поток  $i$ -й компоненты определяется через эффективный коэффициент диффузии  $D_i$ , который находится из соотношений Стефана — Максвелла [9]

$$(3.1) \quad D_i^{-1} = \sum_j \frac{m}{m_j} \frac{c_j}{D_{ij}} \left( 1 - \frac{c_{ij}}{c_{ji}} \right) + \sum_k c_k \sum_j \frac{m}{m_j} \frac{c_j}{D_{kj}} \left( \frac{c_{ji}}{c_{ij}} - \frac{c_{jk}}{c_{kj}} \right)$$

Для расчета коэффициента трения  $c_f$  воспользуемся решением, полученным в [9]

$$(3.2) \quad c_f = c_{f0} (FK)^2 [0.25 + 1.64(\lg FK/2 + (F+G)/2)]^{-2}$$

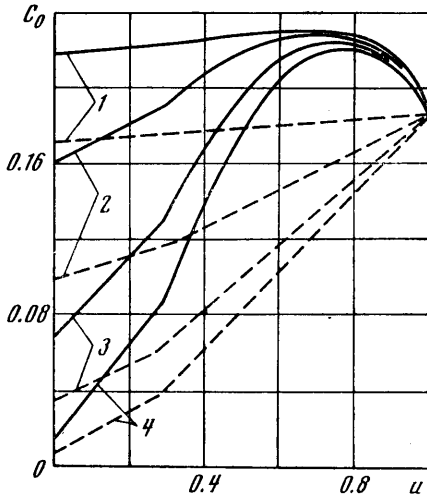
$$F = 0.242 c_{f0}^{0.5}, \quad c_{f0} = 0.0263 \text{Re}_x^{-1/2}, \quad G = \lg \mu_e / \mu_w, \quad K = \int_0^1 \left( \frac{\rho}{\rho_e} \right)^{0.5} du$$

Распределение плотности  $\rho$  в пограничном слое, необходимое для определения функции  $K$ , можно получить из уравнения состояния (1.5),

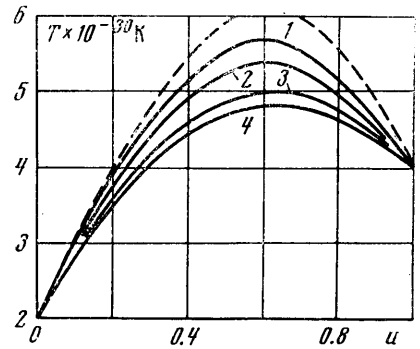
при этом состав газа в пограничном слое определяется по формулам (2.8) и (2.7), а распределение температуры можно найти из определения полной энтальпии (1.6)

$$(3.3) \quad T = c_p^{-1} \left( H - \frac{U_e^2}{2} u^2 - \sum_i c_i h_i^\circ \right)$$

**4. Результаты расчетов.** Исследование влияния переносных свойств ламинарного подслоя на трение и теплообмен в турбулентном пограничном слое было проведено на примере обтекания плоской пластины трехкомпо-



Фиг. 2



Фиг. 3

нентной смесью, состоящей из  $O$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ , в которой протекает реакция диссоциации кислорода. Параметры внешнего потока были приняты следующими:  $U_e = 6000$  м/сек,  $T_e = 4000^\circ \text{K}$ ,  $M_e = 4.72$ ,  $p_e = 1$  атм,  $T_w = 2000^\circ \text{K}$ . Расчет производился методом последовательных приближений. Сначала определялись параметры замороженного пограничного слоя ( $w_i = 0$ ), которые в дальнейшем использовались в качестве нулевого приближения для расчета неравновесного пограничного слоя. Один из параметров рекомбинации задавался произвольно ( $A_{0w}$ ), а два других определялись из дополнительных условий: равенства нулю суммы диффузионных потоков компонент и диффузионного потока элемента на поверхности.

Принималось, что диссоциация кислорода происходила по схеме  $O_2 + x \rightleftharpoons O + O + x$ , где в качестве каталитической частицы  $x$  выступали компоненты  $O$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ . Для определения массовой скорости образования  $i$ -й компоненты использовалось выражение

$$w_i = m_i (v_i'' - v_i') \sum_x k_{dx} \prod_{k=1}^N C_{kx}^{v_{kx}'} \left( \frac{\rho}{m_k} \right)^{v_{kx}'} \left[ 1 - \frac{1}{K_n} \prod_{k=1}^N C_k^{v_k'' - v_k'} \left( \frac{\rho}{m_k} \right)^{v_k'' - v_k'} \right]$$

Здесь  $v_i'$ ,  $v_i''$  — стехиометрические коэффициенты реакций. В качестве значений констант равновесия  $K_n$  и констант скоростей реакций  $k_d$  принимались данные, приведенные в [9]. Было проведено несколько расчетов для разных значений каталитической активности стенки, причем каждый вариант просчитывался как при постоянных, так и при переменных значениях чисел Прандтля и Шмидта поперек ламинарного подслоя. Результаты расчетов приведены на фиг. 1–3. На фигурах кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют следующим значениям параметра рекомбинации  $A_{0w}$ : 0.1, 1, 5,

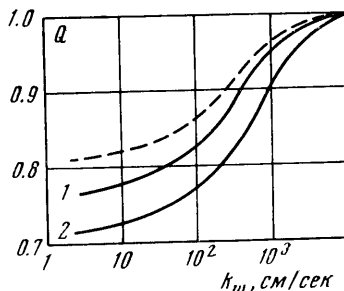
30. Из фиг. 1 видно, что числа Шмидта (сплошные кривые соответствуют  $Sc_{O_2}$ , пунктирные —  $Sc_0$ ) поперек подслоя изменяются незначительно ( $2 \div 5\%$ ), а число Прандтля (штрихпунктирные кривые) практически постоянно поперек ламинарного подслоя.

Расчеты показывают, что тепловые потоки и коэффициент трения, рассчитанные при постоянных и переменных числах Прандтля и Шмидта, практически совпадают. Различие в значениях теплового потока менее  $0.2\%$ , значения коэффициентов трения при принятой точности расчетов ( $10^{-5}$ ) равны друг другу. Такое слабое влияние переносных свойств ламинарного подслоя на трение и тепловой поток объясняется тем, что при данных условиях течения толщина ламинарного подслоя оказалась малой ( $\delta_L/\delta \approx 0.05\%$ ). Таким образом, при расчете практически возможных течений газа в диссоциирующем пограничном слое числа Прандтля и Шмидта можно считать постоянными поперек ламинарного подслоя.

На фиг. 2 и 3 приведены профили концентраций и температур в пограничном слое при различных значениях параметра каталитической рекомбинации  $A_{0w}$ . Здесь и далее заморзженный поток изображается пунктирной кривой, а при наличии неравновесной диссоциации — сплошной. Присутствие в рассматриваемой смеси до  $80\%$  азота, реакция диссоциации которого заморожена, делает слой в целом близким к замороженному, чем объясняется наличие максимума температур и концентраций.

Из фиг. 2 видно, что с увеличением каталитической активности поверхности концентрация атомов на поверхности уменьшается, что приводит к увеличению диффузионного потока атомарной компоненты к поверхности и, как следствие, к увеличению теплового потока (фиг. 4). На фиг. 4 по оси ординат отложен тепловой поток, отнесенный к тепловому потоку на абсолютно каталитической поверхности. Относительно меньшее влияние каталитических свойств поверхности на изменение теплового потока в замороженном течении по сравнению с неравновесным объясняется, по-видимому, более низкой концентрацией атомов на поверхности (фиг. 4).

Из сравнения кривых 1 и 2, которые соответствуют температурам поверхности  $1000$  и  $2000^\circ\text{K}$ , видно, что понижение температуры поверхности уменьшает влияние катализа на тепловой поток.



Фиг. 4

Поступила 6 XI 1972

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в диссоциирующем газе. Ж. техн. физ., 1962, т. 32, вып. 4.
2. Lighthill M. I. Dynamics of a dissociating gas, pt. 1. Equilibrium flow. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, No. 1.
3. Дорренс У. Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа. М., «Мир», 1966.
4. Лапин Ю. В., Сергеев Г. П. Влияние диссоциации на трение и теплообмен в турбулентном пограничном слое. Сб. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1964, № 230.
5. Лапин Ю. В. Влияние каталитической рекомбинации на теплопередачу в замороженном турбулентном пограничном слое. Сб. тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1965, № 248.
6. Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М., «Наука», 1970.
7. Wilke C. R. A viscosity equation for gas mixtures. J. Chem. Phys., 1950, vol. 18, No. 4.