

ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ С ХОЛЛОВСКОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

В. Б. БАРАНОВ, М. С. РУДЕРМАН

(Москва)

В магнитогидродинамическом приближении исследуется распространение волн в плазме, характерная частота которых ω много меньше частоты столкновения электронов τ_e^{-1} . Считается, что магнитное поле достаточно сильное, чтобы удовлетворялось неравенство $\omega_e \tau_e \gg 1$, где ω_e — циклотронная частота вращения электронов. При больших магнитных числах Рейнольдса ($R_m \gg 1$), которыми характеризуются многие астрофизические задачи, последнее условие приводит к необходимости учета дисперсионных эффектов, связанных с токами Холла, при отсутствии джоулевой диссипации.

Дисперсионное уравнение для распространения малых возмущений анализируется в предельных случаях слабой дисперсии и волны, распространяющейся вдоль магнитного поля. Для случая слабой дисперсии выведено уравнение для нелинейных волн. Найдены решения в виде стационарных солитонов. Анализируется область существования таких решений.

Типичным примером среды с холловской дисперсией является межпланетная плазма, в которой параметр $\omega_e \tau_e$ обычно велик.

1. Основные уравнения. В разреженной плазме или в очень сильном магнитном поле циклотронная частота вращения электронов обычно больше или порядка частоты их столкновений ($\omega_e \tau_e \gtrsim 1$). В такой плазме токи Холла могут быть существенными, и обобщенный закон Ома будет иметь вид

$$(1.1) \quad \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{1}{en_e} \left(\nabla p_e - \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right)$$

Здесь \mathbf{j} — плотность тока, σ — электропроводность, \mathbf{v} — скорость плазмы, e , n_e , p_e — величина заряда, концентрация и давление электронов соответственно, c — скорость света, \mathbf{E} — напряженность электрического поля, \mathbf{B} — вектор магнитной индукции. Последний член в (1.1) представляет собой холловские токи. Исключая из (1.1) \mathbf{E} и \mathbf{j} при помощи уравнений Максвелла и пренебрегая токами смещения, получим

$$(1.2) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{cm_i}{4\pi e\rho} \left[(\text{rot } \mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \right. \\ \left. - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \text{rot } \mathbf{B} + \frac{1}{\rho} (\nabla \rho \cdot \mathbf{B}) \text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{\rho} (\nabla \rho \cdot \mathbf{B}) \text{rot } \mathbf{B} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\rho} (\nabla \rho \cdot \text{rot } \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} \right] + \text{rot} \left(\frac{c}{en_e} \nabla p_e \right) - \text{rot} \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} \text{rot } \mathbf{B} \right)$$

где ρ — плотность плазмы, m_i — масса иона. Предпоследний член справа может быть опущен либо в случае слабоионизованной плазмы, либо при предположении, что градиенты электронного давления и концентрации параллельны. Одно из этих предположений будем считать выполненным. Кроме того, предположим, что магнитное число Рейнольдса велико ($R_m = 4\pi\sigma VL / c^2 \gg 1$, где L — характерный размер задачи, V — характерная скорость). Характерной скоростью может быть скорость волны, а характерной длиной — длина волны или длина дисперсии $L \sim cm_i B / 4\pi e\rho V$. При $R_m \gg 1$ можно пренебречь последним членом по сравнению с первым в правой части (1.2), т. е. пренебречь джоулевой диссипацией.

Однако дисперсионные члены в квадратных скобках могут оказаться существенными, так как их порядок определяется отношением $\omega_e \tau_e / R_m$. В частности, в солнечной короне это отношение может быть порядка единицы.

Окончательно уравнение индукции магнитного поля с учетом холловских токов запишется в виде

$$(1.3) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{c m_i}{4\pi e \rho} \left[(\text{rot } \mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \text{rot } \mathbf{B} + \frac{1}{\rho} (\nabla \rho \cdot \mathbf{B}) \text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{\rho} (\nabla \rho \cdot \text{rot } \mathbf{B}) \mathbf{B} \right]$$

Уравнение (1.3) вместе с уравнениями неразрывности, движения и адиабатическим законом составляет систему уравнений бездиссипативной магнитной гидродинамики с учетом холловских токов, которая служит для определения \mathbf{B} , \mathbf{v} , ρ и давления плазмы p (γ — показатель адиабаты).

Если в (1.3) пренебречь дисперсионными членами, то получится система уравнений идеальной магнитной гидродинамики [1].

Наличие дисперсионных эффектов, конкурирующих с нелинейностью, может способствовать образованию стационарных уединенных волн — солитонов. В [2] приводится подробный анализ таких решений и приведены примеры диспергирующих сред — «мелкая» вода, ионный звук, холодная плазма в магнитном поле и др.

Ниже исследуется распространение волн в плазме с холловской дисперсией, причем уравнение индукции берется в виде (1.3). Предположим, что все параметры плазмы зависят только от одной координаты x и времени t . Тогда система уравнений, описывающих движение плазмы, в проекциях на оси координат запишется в виде

$$(1.4) \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right), \quad \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{B_x}{4\pi} \frac{\partial B_y}{\partial x}$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{B_x}{4\pi} \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\gamma p}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0, \quad B_x = \text{const}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (u B_y - v B_x) - \frac{c m_i B_x}{4\pi e \rho} \left(- \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (w B_x - u B_z) - \frac{c m_i B_x}{4\pi e \rho} \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)$$

Здесь v и w — проекции скорости на оси y и z . Уравнения (1.4) будут и в дальнейшем использоваться для исследования распространения волн в плазме.

2. Распространение малых возмущений. Представим решение системы уравнений (1.4) в виде

$$(2.1) \quad p = p_0 + p^*(x, t), \quad \rho = \rho_0 + \rho^*(x, t),$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}(x, t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}^*(x, t)$$

Здесь индекс 0 относится к постоянным параметрам в невозмущенной плазме, а p^* , ρ^* , \mathbf{b} , \mathbf{v}^* — малые возмущения давления, плотности, маг-

нитного поля и скорости. Подставляя (2.1) в (1.4), линеаризируя получающуюся систему уравнений относительно малых возмущений и отыскивая решение в виде

$$(2.2) \quad f = f^0 \exp [i(\omega t - kx)]$$

где f^0 — амплитуда возмущения, а под f понимается любая из искомым функций, получим следующую однородную систему алгебраических уравнений для амплитуд возмущений:

$$(2.3) \quad \rho_0 \lambda u = p + \frac{1}{4\pi} (B_{y0} b_y + B_{z0} b_z), \quad \lambda \rho = \rho_0 u$$

$$\lambda (p - a_0^2 \rho) = 0, \quad \lambda \rho_0 v = -\frac{B_{x0}}{4\pi} b_y, \quad \rho_0 \lambda w = -\frac{B_{x0}}{4\pi} b_z$$

$$\lambda b_y = B_{y0} u - B_{x0} v + i \kappa k b_z, \quad \lambda b_z = B_{z0} u - B_{x0} w - i \kappa k b_y$$

$$\kappa = \frac{cm_i B_{x0}}{4\pi e \rho_0}, \quad a_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}, \quad \lambda = \frac{\omega}{k} - u_0$$

Здесь λ — фазовая скорость волны относительно плазмы (невозмущенная скорость имеет только одну компоненту u_0 вдоль оси x), a_0 — скорость звука при отсутствии магнитного поля и для простоты записи опущены знаки над амплитудами. Кроме того, выбором системы координат можно добиться, чтобы $u_0 = \text{const} = 0$, что и будем считать выполненным ($\lambda = \omega / k$). Приравнявая нулю определитель системы уравнений (2.3), получаем дисперсионное уравнение в виде

$$(2.4) \quad \lambda \{ \lambda^6 - (V_A^2 + a_0^2 + V_{Ax}^2 + \kappa^2 k^2) \lambda^4 + [V_{Ax}^2 (V_A^2 + a_0^2) + (V_{Ax}^2 + \kappa^2 k^2) a_0^2] \lambda^2 - a_0^2 V_{Ax}^4 \} = 0$$

$$V_A^2 = B_0^2 / 4\pi \rho_0, \quad V_{Ax}^2 = B_{x0}^2 / 4\pi \rho_0$$

Корень $\lambda = 0$ соответствует энтропийной волне в идеальной магнитной гидродинамике. В этой волне, неподвижной относительно плазмы, при $B_{x0} \neq 0$ меняется только плотность ρ при неизменных остальных параметрах.

Для отыскания корней, отличных от нуля, необходимо решить кубическое уравнение относительно λ^2 . Существующие формулы решения такого уравнения слишком громоздки для анализа. Поэтому рассмотрим частные случаи. Если волна распространяется перпендикулярно внешнему магнитному полю ($B_{x0} = 0$), то, как видно из (1.4), дисперсионные эффекты отсутствуют. Этот случай полностью совпадает с идеальной магнитной гидродинамикой [1].

Рассмотрим случай, когда волна распространяется вдоль магнитного поля, т. е. $\mathbf{B}_0 = \{B_{x0}, 0, 0\}$. Вместо (2.4) получим ($\lambda \neq 0$)

$$(2.5) \quad (\lambda^2 - a_0^2) [\lambda^4 - (\kappa^2 k^2 + 2V_{Ax}^2) \lambda^2 + V_{Ax}^4] = 0$$

Корень $\lambda^2 = a_0^2$ соответствует звуковой волне, решение для которой находится из первых двух уравнений (2.3). Дисперсия при этом отсутствует. Другими корнями являются

$$(2.6) \quad \lambda = \pm (\kappa k \pm \sqrt{\kappa^2 k^2 + 4V_{Ax}^2}) / 2$$

Отсюда видно, что вдоль положительного направления оси x распространяются две волны — «ускоренная» и «замедленная» альфвеновские волны, которые имеют скорости, определяемые (2.6), при условии, что перед скобкой выбран знак плюс. Две аналогичные волны распространяются в противоположную сторону. При $k \ll 2V_{Ax} / \kappa = 2\omega_{oi} / c$ (длинные

волны), где ω_{oi} — ионная плазменная частота, скорости обеих волн стремятся к скорости распространения альфвеновской волны без дисперсии. Из (2.3) видно, что в такой волне $p=\rho=u=0$, а амплитуды возмущений магнитного поля связаны соотношением $b_y=\pm ib_z$, откуда видно, что рассматриваемые волны — волны с круговой поляризацией.

Рассмотрим теперь ненулевые решения дисперсионного уравнения (2.4) для случая слабой дисперсии (малые k). Представим решение в виде

$$(2.7) \quad \lambda^2 = \lambda_0^2(1 + \epsilon\varphi), \quad \epsilon = \kappa^2 k^2 / V_{Ax}^2 \ll 1$$

Подставляя (2.7) в (2.4) и собирая члены при одинаковых степенях ϵ , в нулевом приближении получим уравнение идеальной магнитной гидродинамики для скоростей альфвеновской (V_{Ax}), быстрой (a_+) и медленной (a_-) магнитозвуковых волн без дисперсии [1].

Первое приближение дает для φ следующую формулу:

$$(2.8) \quad \varphi = \frac{V_{Ax}^2(\lambda_0^2 - a_0^2)}{2(\lambda_0^2 - a_+^2)(\lambda_0^2 - a_-^2) + (\lambda_0^2 - V_{Ax}^2)^2 + V_{Ax}^2(V_{A^+}^2 - V_{Ax}^2)}$$

Из (2.7) легко получить, что закон дисперсии для волны, распространяющейся в положительную сторону оси x , будет иметь вид

$$(2.9) \quad \omega = c_0 k - \beta k^3, \quad c_0 = \lambda_0, \quad \beta = -\kappa^2 \lambda_0 \varphi / 2V_{Ax}^2, \quad \lambda_0 > 0$$

Соотношение (2.9) совпадает с законом дисперсии для линеаризованного уравнения Кортевега — де Вриза и приводит к возможности существования в нелинейном приближении стационарных уединенных волн — солитонов [2]. Для корней нулевого приближения имеют место неравенства

$$(2.10) \quad \max[a_0^2 + B_{y0}^2 / 4\pi\rho_0; V_{Ax}^2] \leq a_+^2 \leq a_0^2 + V_{A^+}^2 \\ 0 \leq a_-^2 \leq \min[a_0^2, V_{Ax}^2], \quad a_-^2 \leq V_{A^-}^2 \leq a_+^2$$

Из (2.8) — (2.10), в частности, следует, что дисперсия приводит к увеличению скорости быстрой магнитозвуковой волны ($\lambda_0^2 = a_+^2$, $\varphi > 0$, $\beta < 0$) и уменьшению скорости медленной магнитозвуковой волны ($\lambda_0^2 = a_-^2$; $\varphi < 0$, $\beta > 0$).

3. Нелинейные стационарные волны. Рассмотрим теперь решения нелинейной системы уравнений (1.4) в виде стационарных волн, распространяющихся с постоянной скоростью $\mu > 0$, т. е. будем считать, что все параметры зависят только от $x^* = x - \mu t$ ($\mu = \text{const} > 0$). Тогда из (1.4) получим

$$(3.1) \quad (u - \mu)\rho' + \rho u' = 0, \quad \rho(u - \mu)u' + (p + B^2 / 8\pi)' = 0 \\ \rho(u - \mu)v' = B_x B_y' / 4\pi, \quad \rho(u - \mu)w' = B_x B_z' / 4\pi \\ (u - \mu)B_y' = B_x v' - B_y u' + \kappa \frac{\rho_0}{\rho} (B_z'' - B_z' \rho' / \rho), \\ (u - \mu)B_z' = B_x w' - B_z u' - \kappa \frac{\rho_0}{\rho} (B_y'' - B_y' \rho' / \rho) \\ p = p_0 (\rho / \rho_0)^\gamma, \quad B_x = \text{const}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по x^* , а индекс нуль относится к параметрам невозмущенной плазмы.

В дальнейшем будем искать решения уравнений (3.1) с граничными условиями

$$(3.2) \quad u = v = w = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0, \quad \rho = \rho_0, \quad \mathbf{B}' = 0 \quad (x^* \rightarrow \infty)$$

что соответствует уединенным волнам.

При этом выбором системы координат можно добиться того, чтобы $B_{z0}=0$.

Интегрируя первые шесть уравнений системы (3.1) при граничных условиях (3.2) и полагая $B_{z0}=0$, получим

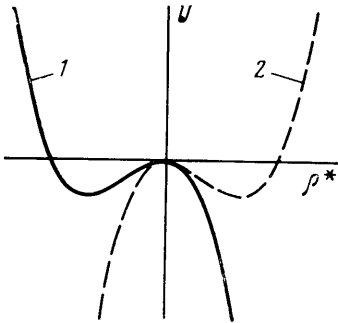
$$(3.3) \quad \begin{aligned} (u-\mu)\rho &= -\mu\rho_0, \quad -\mu\rho_0 u + p + B^2 / 8\pi = p_0 + B_0^2 / 8\pi \\ v &= -B_x(B_y - B_{y0}) / 4\pi\rho_0\mu, \quad w = -B_x B_z / 4\pi\rho_0\mu \\ [u + \mu(V_{Ax}^2 / \mu^2 - 1)]B_y &= \mu B_{y0}(V_{Ax}^2 / \mu^2 - 1) + \kappa\rho_0 B_z' / \rho \\ [u + \mu(V_{Ax}^2 / \mu^2 - 1)]B_z &= -\kappa\rho_0 B_y' / \rho \end{aligned}$$

Последние два уравнения получены при использовании выражений для v и w .

Предположим теперь, что дисперсия мала (в дисперсионных членах учитываются только линейные члены по отклонениям параметров от невозмущенных значений) и, кроме того,

(3.4)

$$\rho^* = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \ll 1, \quad \left| \frac{V_{Ax}^2}{\mu^2} - 1 \right| \gg 1$$



Из первого уравнения (3.3) и (3.4), в частности, следует, что $u / \mu \ll 1$. Из последнего уравнения (3.3) в этом приближении следует:

$$(3.5) \quad B_z = \mu\kappa B_y' / (\mu^2 - V_{Ax}^2)$$

Подставляя (3.5) в предпоследнее уравнение (3.3) и вводя обозначение $B_y^* = B_y - B_{y0}$, получим с точностью до членов второго порядка малости

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \mu B_{y0} + u B_y^* + \mu(V_{Ax}^2 / \mu^2 - \\ - 1) B_y^* = \kappa^2 \mu B_y^{*''} / (\mu^2 - V_{Ax}^2) \end{aligned}$$

Выразим величины u и B_y^* через ρ^* при помощи первых двух уравнений (3.3) и последнего уравнения (3.1). В рассматриваемом приближении будем иметь

$$(3.7) \quad \begin{aligned} B_y^* &= \frac{4\pi\rho_0}{B_{y0}} (\mu^2 - a_0^2) \rho^* - \left[\frac{2}{B_{y0}} \left(\frac{2\pi\rho_0}{B_{y0}} \right)^2 (\mu^2 - a_0^2)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\pi\rho_0}{B_{y0}} \left(\mu^2 + \frac{\gamma-1}{2} a_0^2 \right) \right] \rho^{*2} \\ B_y^{*''} &= (4\pi\rho_0 / B_{y0}) (\mu^2 - a_0^2) \rho^{*''}, \quad u = \mu(\rho^* - \rho^{*2}) \end{aligned}$$

При вычислении выражения для B_y^* использовалось условие $B_y^* \rightarrow 0$ при $\rho^* \rightarrow 0$, которое следует из (3.2).

Подставляя (3.7) в (3.6), окончательно получим следующее уравнение для ρ^* :

$$(3.8) \quad \begin{aligned} d^2\rho^* / ds^2 &= -dU / d\rho^*, \quad U = (\alpha\rho^{*2} - \rho^{*3}) / 3\Omega \\ \Omega &= \text{sign} \frac{K(\mu^2 - V_{Ax}^2)}{(\mu^2 - a_0^2)}, \quad s^2 = x^{*2} \left| \frac{K(\mu^2 - V_{Ax}^2)}{\kappa^2 \mu^2 (\mu^2 - a_0^2)} \right| \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{3}{2K}(\mu^2 - a_+^2)(\mu^2 - a_-^2), \quad K = \mu^2 \left\{ 2\mu^2 - V_A^2 - a_0^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{V_{Ax}^2}{\mu^2} \right) \left[\frac{(\mu^2 - a_0^2)^2}{V_A^2 - V_{Ax}^2} + (\gamma - 1) a_0^2 \right] \right\}$$

Характер решения уравнения (3.8) зависит от вида потенциальной функции $U(\rho^*)$. Вид потенциальной функции, в свою очередь, зависит от знака величин α и Ω . Решения в виде уединенных волн существуют в двух случаях

$$(3.9) \quad \Omega = 1, \alpha < 0; \quad \Omega = -1, \alpha > 0$$

Вид потенциальной функции $U(\rho^*)$ в этих случаях представлен на фиг. 1 кривыми 1 и 2 соответственно.

Из (3.8), (3.9) и (2.10) ясно, что солитоны не существуют при $\mu^2 < a_-^2$ или $\mu^2 > a_+^2$, так как Ω и α при этом одного знака, независимо от знака величины K . Из рассмотрения выражений (3.8) для Ω и α следует, что скорости солитонов лежат в областях

$$(3.10) \quad a_-^2 < \mu^2 < \min[a_0^2, V_{Ax}^2], \quad \max[a_0^2, V_{Ax}^2] < \mu^2 < a_+^2$$

при этом, как видно из фиг. 1 и (3.8), при $K > 0$ реализуется первый случай в (3.9), который соответствует солитону разрежения ($\rho^* < 0$), а при $K < 0$ реализуется второй случай в (3.9), что соответствует солитону сжатия.

Из (3.8) видно, что амплитуда солитона равна $|\alpha|$ и в силу (3.4) должна быть мала. Но это эквивалентно тому, что μ^2 близко либо к a_+^2 («быстрый» солитон), либо к a_-^2 («медленный» солитон).

При $\mu^2 \approx a_+^2$ имеем $K > 0$, а при $\mu^2 \approx a_-^2$ имеем $K < 0$. Таким образом быстрый солитон является солитоном разрежения и движется со скоростью, немного меньшей скорости быстрой магнитозвуковой волны, а медленный солитон является солитоном сжатия и движется со скоростью, немного большей скорости медленной магнитозвуковой волны.

В заключение отметим, что результаты, рассмотренные в п. 3, справедливы при $V_{y0} \sim V_x$ и $p_0 \sim B_0^2 / 8\pi$, в противном случае нарушается второе условие (3.4).

В рамках модели холодной плазмы распространение уединенного импульса под углом к магнитному полю рассмотрено в [3], а продольное распространение — в [4].

Институт космических исследований АН СССР

Поступила 4 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
2. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973, стр. 45.
3. Казанцев А. П. Об установившемся течении плазмы в магнитном поле. ЖЭТФ, 1963, т. 44, вып. 4.
4. Тверской В. А. Об одномерных автомодельных волнах, распространяющихся в плазме вдоль магнитного поля. ЖЭТФ, 1962, т. 42, № 3.