

**ЗАВИСИМОСТЬ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ ОТ ЧИСЛА  
РЕЙНОЛЬДСА ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННОМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ  
ВИХРЕВЫМ ПОТОКОМ**

**О. С. РЫЖОВ, Э. Г. ШИФРИН**

(Москва)

Рассматривается зависимость вязких напряжений от числа Рейнольдса  $Re$  в пространственных течениях у тел произвольной формы. Показано, что с неограниченным ростом вихря при приближении к телу в асимптотическом разложении по  $\epsilon = Re^{-1/2}$  появляются сингулярные члены. Бесконечные значения производных скорости в течениях несжимаемой жидкости обусловлены начальной завихренностью, в сверхзвуковом потоке они могут быть связаны с отсутствием максимума энтропии на критической линии тока за головной ударной волной. Особенность в касательных напряжениях влечет за собой появление дополнительных слагаемых в суммарных аэродинамических силах и моментах, действующих на тело.

**1. Постановка задачи.** В теории пространственного обтекания затупленного тела идеальным (невязким, нетеплопроводным) газом с образованием головной ударной волны широкое обсуждение вызвал вопрос, всегда ли критическая струйка тока, омывающая тело после разветвления в точке торможения, проходит также через точку, в которой скачок уплотнения ортогонален вектору скорости [1-4]. Хотя его постановка первоначально диктовалась незамкнутостью некоторых численных схем, в которых требовалось ввести какое-либо дополнительное условие, этот вопрос имеет принципиальное значение, поскольку он относится к одному из общих свойств сверхзвуковых течений. Аналитические исследования не дали однозначного ответа, однако в результате проведенного анализа обнаружилось свойство, выходящее за рамки поставленной задачи, а именно было показано, что отсутствие экстремума энтропии на критической линии тока приводит к тому, что при приближении к поверхности тела вихрь и, следовательно, производная скорости по нормали к телу становятся бесконечными.

Указанная ситуация довольно необычна в гидромеханике, так как до сих пор встречался только один тип линий (поверхностей) с бесконечными значениями производных скорости. Речь идет о так называемых предельных линиях (поверхностях), наличие которых в решении свидетельствовало о невозможности реализовать соответствующее ему течение ввиду многозначности параметров газа в физической плоскости (пространстве). В отличие от предельных линий неограниченный рост вихря на поверхности обтекаемого тела не препятствует реализации потока на практике. Более того, такой рост вихря характеризует достаточно широкий класс пространственных течений у тел произвольной формы. Действительно, как показано в [3], условия обращения на теле производных скорости в бесконечность состоят в следующем:

- а) поверхность тока, омывающая тело, образована разветвлением в точке торможения критической линии тока;
- б) величина вихря на критической линии тока до ее разветвления отлична от нуля.

Разумеется, названный в условии а) режим обтекания не является единственно возможным. Например, в плоскопараллельном течении на

профиле крыла бесконечного размаха разветвляется критическая поверхность тока; разветвляющаяся поверхность тока прилегает и к кольцевому крылу с осью симметрии, ориентированному по вектору скорости набегающего потока. Однако при пространственном обтекании тел произвольной формы наиболее типичным случаем будет, по-видимому, тот, когда на тело приходит критическая линия тока.

Что касается условия б), то оно вообще не связано с выбором какой-либо специальной схемы для поля скоростей. Выполнение его очевидно при дозвуковом обтекании тела, если задать отличной от нуля начальную завихренность на бесконечности. Несжимаемая жидкость представляет простейший пример такого рода, соответствующий, как известно, числу Маха  $M_\infty = 0$  в набегающем потоке. Выполнение условия б) можно гарантировать также, рассматривая вихревое течение, когда его скорость вдали от тела лишь незначительно превышает скорость звука. В этом случае  $M_\infty \sim 1$  и приращение энтропии на фронте головного скачка уплотнения, пропорциональное  $(M_\infty^2 - 1)^3$ , не может компенсировать основную завихренность, которая является величиной порядка единицы.

В исходной задаче обтекания затупленного тела равномерным сверхзвуковым потоком величина вихря на критической линии тока до ее разветвления определяется положением относительно точки, где ударный фронт ортогонален вектору скорости частиц газа. Результаты специальных численных расчетов и экспериментальных исследований показывают, что в пространственных течениях энтропия, по-видимому, не достигает максимума на критической линии тока. Однако отличие значения энтропии от максимального для изучавшегося класса тел оказывается небольшим и находится на грани точности как расчетов, так и экспериментов [5-8]. Таким образом, можно считать, что условие б) выполняется в рассматриваемой задаче, хотя это заключение нуждается, строго говоря, в дополнительных данных для своего подтверждения.

Пусть  $\lambda$  означает модуль скорости, а  $n$  — расстояние по нормали от тела. Из анализа, проведенного в [1, 3], следует, что при приближении к обтекаемому телу скорость роста производной  $\partial\lambda / \partial n$  неизменна на каждой поверхности тока, но может меняться при переходе от одной поверхности тока к другой. Что касается вида особенности  $\partial\lambda / \partial n$ , то он связан с типом узла линий тока в точке разветвления на теле. В локальном исследовании этот тип установить невозможно, для его определения необходимо решить краевую задачу о движении идеального газа около рассматриваемого тела.

В свою очередь, наличие особенности у  $\partial\lambda / \partial n$  играет основную роль в выборе асимптотического разложения для пограничного слоя, когда производится учет действующих в реальном газе вязких напряжений. При больших значениях чисел Рейнольдса  $Re$  в разложении по  $\varepsilon = Re^{-1/2}$  появляются сингулярные члены, которые приводят к существенному изменению действующих на тело суммарных сил трения. При решении прикладных задач этот эффект может оказаться весьма важным.

Рассмотрим пространственное обтекание гладкого тела, когда  $Re \gg 1$ . Будем считать, что выполняются условия а) и б), в силу чего производная  $\partial\lambda / \partial n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow 0$ . Поскольку цель настоящей работы состоит в выяснении природы сингулярных членов в разложении для пограничного слоя, порожденных неограниченным увеличением  $\partial\lambda / \partial n$ , жидкость можно принять несжимаемой; тогда завихренность потока вдали от тела будет задана заранее. С принципиальной точки зрения постановка задачи не изменится и при сверхзвуковой скорости частиц на бесконечности, однако в этом случае распределение вихрей вне пограничного слоя существенно зависит от положения и интенсивности ударных волн. Как уже отмечалось, вид особенности у  $\partial\lambda / \partial n$  устанавливается только из решения краевой задачи

о движении идеальной жидкости около рассматриваемого тела, поэтому целесообразно не делать о нем слишком сильных предположений.

**2. Оценка сил трения.** Поскольку вопрос о высших приближениях в теории пограничного слоя хорошо разработан, рассмотрим задачу, опуская подробные выкладки, которые можно восстановить, опираясь на приведенные в [9] результаты.

При выводе уравнений Прандтля для пространственного пограничного слоя в [10, 11] использовались триортогональные координаты  $n, s_1, s_2$ , где семейство  $n = \text{const}$  состоит из эквидистантных обтекаемому телу поверхностей, а нормаль к телу при движении вдоль линий кривизны образует семейства линейчатых поверхностей  $s_1 = \text{const}, s_2 = \text{const}$ . Для указанных криволинейных координат коэффициенты Ламэ  $H_1, H_2$  и  $H_3$  задаются формулами

$$(2.1) \quad H_1 = 1, \quad H_2 = A_2(1 + n\kappa_2), \quad H_3 = A_3(1 + n\kappa_3)$$

Здесь  $A_2(s_1, s_2)$  и  $A_3(s_1, s_2)$  — коэффициенты Ламэ линий кривизны,  $\kappa_2(s_1, s_2)$  и  $\kappa_3(s_1, s_2)$  — главные кривизны нормальных сечений поверхности тела.

Чтобы получить уравнения следующего приближения для пограничного слоя, необходимо задать вблизи тела двучленное асимптотическое представление решения задачи о его обтекании идеальной жидкостью. Удобно считать это представление записанным в переменных  $n, s_1, s_2$ . Тогда в соответствии с изложенным

$$\lambda = \lambda_0(s_1, s_2) + \lambda_1(n, s_1, s_2)$$

причем  $\lambda_1(n, s_1, s_2) \rightarrow 0, \partial \lambda(n, s_1, s_2) / \partial n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow 0$ . Аналогичные соотношения получаются и для составляющих  $v_1, v_2$  вектора скорости вдоль осей  $s_1, s_2$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} v_1 &= v_{10}(s_1, s_2) + \lambda_1(n, s_1, s_2)v_{11}(s_1, s_2) \\ v_2 &= v_{20}(s_1, s_2) + \lambda_1(n, s_1, s_2)v_{21}(s_1, s_2) \end{aligned}$$

Асимптотическое выражение для проекции скорости на ось  $n$  следует из уравнения неразрывности в результате подстановки в него формул (2.2)

$$(2.3) \quad v_n = v_{n0}(s_1, s_2)n + O\left(\int_0^n \lambda_1(n, s_1, s_2)dn\right)$$

Существенно отметить, что новые величины здесь не фигурируют; связи же между функциями  $v_{10}, v_{20}$  можно установить, внося разложения (2.2) и (2.3) в проекции уравнения Эйлера на оси рассматриваемой системы координат.

Полагая  $Re \rightarrow \infty$ , приступим к анализу движения вязкой жидкости в области, которая непосредственно прилегает к поверхности обтекаемого тела. В настоящее время для этой цели применяется либо метод сращивания асимптотических разложений [9], либо метод погранслойных поправок [12]. Их эквивалентность продемонстрирована в [13] на примере обтекания плоской пластины при условии, что вихрь в идеальной жидкости остается всюду ограниченным.

Исследование свойств второго члена асимптотического представления для пограничного слоя проведем методом сращиваемых разложений. Можно записать также асимптотическое представление решения в рамках метода погранслойных поправок. Как и при конечной величине вихря во внешнем течении [13], оба эти представления оказываются эквивалентными.

Обозначим через  $\eta = n/\varepsilon$  ( $\varepsilon = \text{Re}^{-1/2}$ ) переменную, определяющую поперечный размер пограничного слоя, а через

$$W_0 = \{ \varepsilon V_{n0}(\eta, s_1, s_2), V_{10}(\eta, s_1, s_2), V_{20}(\eta, s_1, s_2), p_0(s_1, s_2) \}$$

решение уравнений Прандтля [10, 11], которое предполагается известным. Здесь и далее буквами  $V_n, V_1, V_2$  обозначены компоненты вектора скорости частиц жидкости, буквой  $p$  — давление.

Система уравнений Навье — Стокса в криволинейных координатах  $n, s_1, s_2$ , связанных с гладким телом, состоит из квазилинейных уравнений, у которых зависимость всех коэффициентов от  $n$  задается параметрами Ламэ (2.1). Отсюда следует, что в пограничном слое коэффициенты будут аналитическими функциями  $\varepsilon$ . Решение уравнений Навье — Стокса представим в виде  $W = W_0 + W_1$ , где поправка

$$W_1 = \{ \varepsilon V_{n1}(\eta, s_1, s_2; \varepsilon), V_{11}(\eta, s_1, s_2; \varepsilon), V_{21}(\eta, s_1, s_2; \varepsilon), 0 \}$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$  обращается в нуль медленнее, чем первая степень  $\varepsilon$ .

Приравнивание нулю членов первого порядка малости по  $\varepsilon$  дает уравнения Прандтля для  $W_0$ . Собирая вместе члены следующего порядка малости, выводим для определения  $W_1$  однородные линейные уравнения в частных производных с коэффициентами, зависящими от  $W_0$ . Ясно, что их можно получить также простой линеаризацией уравнений Прандтля. Действительно, комбинация  $W_0 + W_1$  не является точным решением уравнений Прандтля, однако она удовлетворяет уравнениям главного приближения для пограничного слоя с невязками, которые при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеют более высокий порядок малости, чем  $W_1$ . Исходное же уравнение сохранения количества движения в проекции на нормаль к обтекаемому телу дает невязку, пропорциональную  $\varepsilon$ . Уместно вспомнить результаты теории пограничного слоя, основанные на предположении  $W_1 \sim \varepsilon$ . В этом случае при определении поправочных членов необходимо учитывать еще [9] толщину вытеснения слоя, а также влияние кривизн  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  нормальных сечений поверхности тела.

Граничные условия на обтекаемом теле очевидны

$$V_{n1} = V_{11} = V_{21} = 0 \quad (\eta = 0)$$

Граничные условия при  $\eta \rightarrow \infty$  получаются как обычно путем сращивания внешнего и внутреннего асимптотических разложений. В рассматриваемом приближении первое из них дается решением задачи об обтекании тела идеальной жидкостью, второе — комбинацией  $W_0 + W_1$ . Имеем

$$(2.4) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{V_{11}(\eta, s_1, s_2; \varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon \eta, s_1, s_2)} = v_{11}(s_1, s_2), \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{V_{21}(\eta, s_1, s_2; \varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon \eta, s_1, s_2)} = v_{21}(s_1, s_2)$$

Разумеется поправка  $W_1$  зависит еще от начальных условий, которые, как и начальные условия для  $W_0$ , должны быть заданы на некоторой поверхности, образованной движением нормали к телу и пересекающей его по замкнутому контуру, охватывающему критическую точку. Ввиду линейности уравнений для  $W_1$  влияние начальных данных может быть рассмотрено отдельно. Поскольку для поставленной цели такое исследование не представляет интереса, оно не проводится.

Сделаем еще одно замечание по поводу решения уравнений для  $W_1$ , причем это замечание следует иметь в виду уже при интегрировании уравнений Прандтля. На произвольной замкнутой поверхности (в том числе, на поверхности тела) нельзя осуществить монотонную нумерацию координатных линий, оставляя ее непрерывной. Поэтому на  $W_1$  необходимо наложить требование непрерывности при переходе через линию, где имеет место разрыв нумерации.

Как видно из граничных условий (2.4), порядок поправки  $W_1$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  устанавливается функцией  $\lambda_1(\varepsilon\eta, s_1, s_2)$ , задающей основную особенность поля скоростей внешнего течения вблизи тела. Так, например, при  $\lambda_1 = n^{k(s_1, s_2)}$  имеем  $W_1 \sim \varepsilon^{k(s_1, s_2)}$ . Из требований, наложенных ранее на саму функцию  $\lambda_1(n, s_1, s_2)$  и на ее производную по нормали, вытекает, что в этом частном случае  $0 < k(s_1, s_2) < 1$ . Однако предположение об однородности  $\lambda_1(n, s_1, s_2)$  по координате  $n$  вовсе не обязательно, достаточно допустить, что справедливы неравенства

$$(2.5) \quad n^{k_2} < \lambda_1(n, s_1, s_2) < n^{k_1}, \quad 0 < k_1 < k_2 < 1$$

Соотношения (2.5) ограничивают порядок стремления к нулю функции  $\lambda(n, s_1, s_2)$  снизу и сверху. Решение внутри пограничного слоя удовлетворяет оценкам

$$(2.6) \quad \varepsilon^{k_2} < |W_1| < \varepsilon^{k_1} \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

На жесткой поверхности

$$\frac{\partial V_{11}}{\partial \eta} = U_{11}(s_1, s_2; \varepsilon), \quad \frac{\partial V_{21}}{\partial \eta} = U_{21}(s_1, s_2; \varepsilon)$$

Как и поправка  $W_1$ , функции  $U_{11}(s_1, s_2; \varepsilon)$  и  $U_{21}(s_1, s_2; \varepsilon)$  подчиняются неравенствам (2.6). Отсюда следует, что в выражении для силы трения, действующей на элемент поверхности обтекаемого тела, второй член асимптотического разложения по  $\varepsilon$  будет иметь порядок  $\varepsilon W_1$ . Действительно, пусть  $\sigma_{ns_1}$  и  $\sigma_{ns_2}$  означают компоненты тензора напряжений. Для абсолютной величины  $\tau$  напряжения трения на поверхности тела при  $\varepsilon \rightarrow 0$  верна формула

$$\begin{aligned} \tau &= (\sigma_{ns_1}^2 + \sigma_{ns_2}^2)^{1/2} = \varepsilon^2 \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial n} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial n} \right)^2 \right]^{1/2} = \\ &= \varepsilon \left\{ \left[ \left( \frac{\partial V_{10}}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_{20}}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2} + \left( U_{11} \frac{\partial V_{10}}{\partial \eta} + U_{21} \frac{\partial V_{20}}{\partial \eta} \right) \times \right. \\ &\left. \times \left[ \left( \frac{\partial V_{10}}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_{20}}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} \sim \varepsilon + \varepsilon W_1 \end{aligned}$$

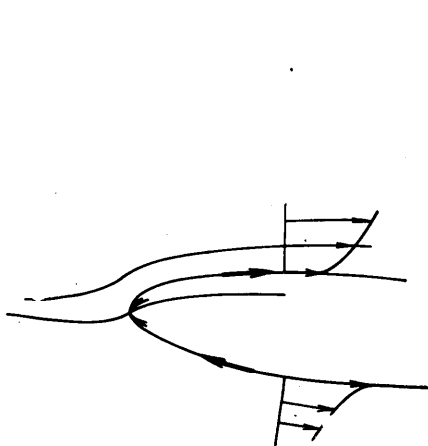
Отметим, что аналогичная зависимость получена для пространственного сверхзвукового конического течения за скачком уплотнения, исходящим из острия тела [14]. В этом случае функция  $\lambda_1(n, s_1, s_2)$  обладает степенной особенностью при  $n \rightarrow 0$ . В коническом течении омывающая тело струйка тока разветвляется в особой точке жесткой поверхности, поэтому коническое течение было исключено из рассмотрения. Поскольку, однако, единственное требование к полю скоростей идеальной жидкости состоит в том, чтобы производная  $\partial \lambda / \partial n$  неограниченно возрастала при  $n \rightarrow 0$ , коническое течение в принципиальном отношении ничем не выделяется среди других пространственных движений. (Сделанное в конце п. 1 допущение о несжимаемости среды не имеет существенного значения.)

Если всюду во внешнем потоке значение вихря скорости остается конечным, то второй член асимптотического разложения для силы трения пропорционален  $\varepsilon^2$ , т. е. имеет более высокий порядок малости по сравнению с произведением  $\varepsilon W_1$ . Это отличие в законах трения на поверхности обтекаемого тела влечет за собой возникновение аэродинамического эффекта, который может оказаться важным в прикладных задачах.

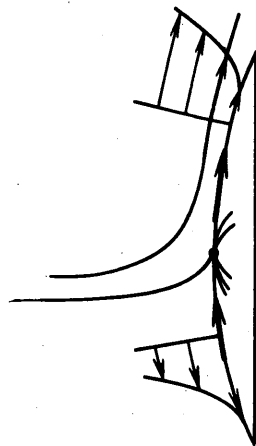
Легко показать, что в течениях рассматриваемого типа поверхность тела делится некоторыми линиями тока на две части, причем на одной из

них производная  $\partial\lambda/\partial n$  обращается в  $-\infty$ , а на другой — в  $+\infty$ . Аналогичный факт установлен в работе [3] для сверхзвуковых течений у тупоносых тел, когда величина энтропии на критической линии тока отлична от экстремальной. Предположим теперь, что тело имеет сильно вытянутую веретенообразную форму и расположено под небольшим углом атаки к набегающему потоку. Профили скорости в соответствующем вихревом течении идеальной жидкости схематически изображены на фиг. 1. На нижней части фигуры  $\partial\lambda/\partial n \rightarrow -\infty$ , на верхней  $-\partial\lambda/\partial n \rightarrow +\infty$ . Знак функции  $\lambda_1(n, s_1, s_2)$  совпадает со знаком производной  $\partial\lambda/\partial n$ .

На внешней границе пограничного слоя, прилегающего к удлинённому телу, направление тангенциальной составляющей вектора скорости мало



Фиг. 1



Фиг. 2

отличается от направления невозмущенного движения жидкости, т. е. одна из величин  $v_1$  или  $v_2$  близка к нулю. Пусть для определенности это будет  $v_2$ . Если исходить из того, что при приближении к жесткой поверхности поток не совершает заметных поворотов, то функция  $U_{21}(s_1, s_2; \epsilon)$  будет также близка к нулю, а знак функции  $U_{11}(s_1, s_2; \epsilon)$  определится, грубо говоря, знаком  $V_{11}(\eta, s_1, s_2; \epsilon)$  при  $\eta \rightarrow \infty$ . Как видно из граничных условий (2.4), на нижней части обтекаемого тела  $U_{11}(s_1, s_2; \epsilon) < 0$ , на верхней  $-U_{11}(s_1, s_2; \epsilon) > 0$ . Таким образом, добавки к поверхностным силам на указанных частях имеют порядок  $\epsilon W_1$  и направлены в разные стороны. Связанное с добавочными силами воздействие потока на тело будет проявляться прежде всего в возникновении крутящего момента; общее сопротивление изменится в значительно меньшей степени.

Рассмотрим в заключение лобовое (или близкое к нему) обтекание дискообразного тела. Ограничимся той частью его поверхности, которая обращена в сторону набегающего потока. Направление набегающего потока составляет мало отличающийся от  $\pi$  угол с направлением нормали  $n$ . Картина соответствующего вихревого течения идеальной жидкости показана на фиг. 2.

Аналогичные изложенным выше рассуждения приводят к заключению, что дополнительные силы трения на нижней и верхней частях тела направлены в одну и ту же сторону. Суммарный аэродинамический эффект сведется в этом случае к изменению подъемной силы. Как и у веретенообразных тел, влияние добавочных сил на сопротивление оказывается незначительным.

Вывод о наличии дополнительных слагаемых в выражении для напряжения трения при вихревом характере потока на бесконечности может быть проверен опытным путем. В основу экспериментального исследования проще всего положить измерение суммарных сил и моментов, приложенных к поверхности тела.

Поступила 24 XII 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hayes W. D. Rotational stagnation point flow. J. Fluid Mech., 1964, vol. 19, No. 3.
2. Hayes W. D. Hypersonic stagnation region flows with asymmetry. Arch. Mech. Stosowaney, 1966, vol. 18, No. 6.
3. Шифрин Э. Г. Об экстремальности энтропии на критической линии тока. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
4. Ладыженский М. Д. Пространственные гиперзвуковые течения газа. М., «Машиностроение», 1968.
5. Теленин Г. Ф. Исследование аэродинамики больших скоростей с помощью численных методов. В сб. «3-й Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннот. докладов». М., 1968.
6. Глаголев А. И., Зубков А. И. Экспериментальное исследование энтропии на критической линии тока при сверхзвуковом обтекании тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
7. Дьяконов Ю. Н., Миносцев В. Б., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Сверхзвуковое пространственное обтекание затупленных тел. В сб. «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды». М., «Наука», 1969.
8. Любимов А. Н. О значении энтропии на поверхности параболоидов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
9. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
10. Howarth L. Boundary layer in the three-dimensional flow. Philos. Mag., 1951, vol. 42, No. 335.
11. Струминский В. В. Уравнения трехмерного пограничного слоя в сжимаемом газе для произвольной поверхности. Докл. АН СССР, 1957, т. 114, № 2.
12. Вишик В. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5.
13. Чудов Л. А. Высшие приближения в пограничном слое. В сб. «Некоторые изменения метода сеток в газовой динамике», вып. 2. М., Изд-во МГУ, 1971.
14. Булах Б. М. Об одном типе взаимодействия пограничного слоя и внешнего (невязкого) потока при сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.