

**ТЕЧЕНИЕ СМЕСИ ГАЗА И ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ  
В СВЕРХЗВУКОВЫХ НЕДОРАСШИРЕННЫХ СТРУЯХ**

**А. Д. РЫЧКОВ**

(Томск)

Наличие второй фазы в струе газа, истекающего из сопла, приводит к существенному изменению картины течения [1-3]. Так, центральный скачок уплотнения по мере роста концентрации частиц перемещается к срезу сопла, число Маха на оси струи перед прямым скачком уменьшается.

Ниже рассматривается численное решение задачи об истечении осесимметрической двухфазной недорасширенной струи из прямого сопла в затопленное пространство. Предполагается, что по сечению сопла распределение параметров течения равномерное, тепловое и динамическое запаздывания частиц отсутствуют.

1. Течение смеси газа и твердых частиц при не слишком большой концентрации последних достаточно хорошо описывается моделью двускоростной сплошной среды, изложенной, например, в [4, 5]. Эта модель принята и в данной работе, причем предполагается, что частицы сферические и имеют одинаковый диаметр. В рамках принятой модели стационарное течение в двухфазной осесимметрической струе описывается следующей системой дифференциальных уравнений, записанных в форме законов сохранения:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \nabla_y \rho U &= 0, \quad \nabla_y \rho u U + (\partial/\partial x) y p = y C_{R\rho} (u_p - u), \\ \nabla_y \rho v U + (\partial/\partial y) y p - p &= y C_{R\rho} (v_p - v) \\ \nabla_y \rho H_0 U &= y \rho_p \{ C_\alpha (T_p - T) + C_R [u_p (u_p - u) + v_p (v_p - v)] \}, \\ p &= \rho (k - 1/k) [H_0 - (u^2 + v^2/2)] \end{aligned}$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \nabla_y \rho_p U_p &= 0, \quad \nabla_y \rho_p u_p U_p = y C_{R\rho} (u - u_p) \quad \nabla_y \rho_p v_p U_p = \\ &= y C_{R\rho} (v - v_p), \quad \nabla_y \rho_p T_p U_p = y C_{\alpha\rho} c_p / c (T - T_p) \end{aligned}$$

Здесь  $U = ui + vj$ ;  $i, j$  — орты осей  $X, Y$  цилиндрической системы координат;  $U$  — вектор скорости,  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление,  $T$  — температура;  $H_0$  — энтальпия торможения;  $C_R, C_\alpha$  — коэффициенты сопротивления и теплопередачи соответственно;  $c_p/c$  — отношение удельных теплоемкостей газа и материала частиц,  $k$  — показатель адиабаты. Индекс  $p$  относится к параметрам частиц.

Эта система уравнений представляет собой две подсистемы (1.1) и (1.2), описывающие течения газа и частиц соответственно, связанные между собой только через правые части.

Предполагается, что система (1.1), (1.2) всегда  $x$ -гиперболическая, т. е. всегда выполняются условия  $u > a, u_p > 0$  ( $a$  — местная скорость звука), и для (1.1), (1.2) рассматривается смешанная задача. При ее постановке следует учитывать тот факт, что решения систем (1.1) и (1.2) определены в общем случае в различных областях. Область движения газа ограничена сверх границей струи  $y = \delta(x)$ , область движения частиц — предельной линией частиц  $y = \delta_p(x)$ . Используя характеристики системы (1.1), (1.2), можно показать, что для газа на  $\delta(x)$  должно быть задано одно граничное условие, для частиц на  $\delta_p(x)$  граничные условия не задаются.

В данной работе в качестве граничного условия на  $\delta(x)$  задается условие постоянства давления, поскольку рассматриваются только струи, истекающие в затопленное пространство. Однако возможен случай, когда, начиная с некоторого значения  $x=x_b$ ,  $\delta_p(x) > \delta(x)$ , т. е. частицы вылетают за границу струи газа. В этом случае частицы, взаимодействуя с окружающей средой, изменяют ее параметры и давление вдоль границы струи газа уже не будет постоянным. В настоящей работе предполагается, что это взаимодействие незначительное, что справедливо, например, при  $\rho_p/\rho_n \ll 1$  ( $\rho_n$  — плотность окружающей среды), и давление на  $\delta(x)$  всегда постоянно.

2. С целью повышения точности численного решения область течения смеси газа и частиц «раскраивалась» на две подобласти. Первая из них (область I) ограничена снизу характеристикой второго семейства  $y=\varphi(x)$ , отделяющей область влияния контура сопла, сверху — кривыми  $\delta(x)$  и  $\delta_p(x)$  для газа и частиц соответственно. В качестве левой границы выбиралась прямая, отстоящая от среза сопла на расстоянии  $x=x_0$ . Значения параметров газа на ней (как начальные условия для смешанной задачи) и значение  $\delta(x_0)$  получались из решения Прандтля — Майера.

На характеристике  $\varphi(x)$  задаются значения всех параметров течения. Поскольку здесь рассматривается случай прямого сопла с равномерным распределением параметров по сечению, то значения параметров на  $\varphi(x)$  постоянны и равны их значениям на срезе сопла. Для частиц значения параметров на  $\varphi(x)$ , за исключением плотности, полагались равными соответствующим значениям параметрам газа, что для излагаемого способа решения несущественно. Плотность частиц задавалась на  $\varphi(x)$  как  $\rho_p = z(1-z)^{-1}\rho$ , где  $z$  — расходная концентрация частиц,  $z = G_p(G+G_p)^{-1}$ ,  $G_p$  — расход частиц через сопло,  $G$  — расход газа.

На левой границе задавалось значение  $\delta_p(x_0) = r_a$  ( $r_a$  — радиус выходного сечения сопла). Здесь значения всех параметров частиц полагались постоянными и равными их значениям на  $\varphi(x_0)$ .

Границы  $\delta(x)$  и  $\delta_p(x)$  являются линиями тока и определяются из следующих соотношений:

$$(2.1) \quad \frac{d}{dx} \delta(x) = \frac{v(x, \delta(x))}{u(x, \delta(x))}, \quad \frac{d}{dx} \delta_p(x) = \frac{v_p(x, \delta_p(x))}{u_p(x, \delta_p(x))}$$

Область I заканчивается прямой  $x=x_c$ , где  $x_c$  — точка пересечения характеристики  $\varphi(x)$  с осью X. Далее начинается область II, ограниченная снизу осью струи, сверху — кривыми  $\delta(x)$  и  $\delta_p(x)$ . На оси струи ( $y=0$ ) задаются условия  $v=v_p=0$ . Начальными условиями для области II являются значения всех параметров газа и частиц, а также  $\delta(x_c)$ ,  $\delta_p(x_c)$ , полученные в результате решения задачи в области I. Для определения  $\delta(x)$  и  $\delta_p(x)$  используется (2.1).

3. Для численного решения системы (1.1), (1.2) использовался метод конечных разностей. В качестве разностной схемы была выбрана схема Маккормака [6] второго порядка точности. Эта схема проста для программирования, позволяет вести сквозной счет ударных волн без введения членов с искусственной вязкостью и, что особенно важно для рассматриваемой задачи, является полностью консервативной.

Далее области интегрирования I и II преобразовывались в прямоугольные путем перехода к новым независимым переменным

$$\begin{aligned} x_1 = x, \quad \xi = (y - \varphi) / (\delta - \varphi), \quad \psi = (y - \varphi) / (\delta_p - \varphi) \\ x_1 = x, \quad \xi = y / \delta, \quad \psi = y / \delta_p \end{aligned}$$

В новых переменных уравнения (1.1), (1.2) также записывались в виде законов сохранения. Аппроксимация этих уравнений производилась на разных сетках. Связь (1.1) и (1.2) по параметрам, входящим в правые части, осуществлялась путем соответствующих интерполяций.

Счет по переменной  $x$  проводился до тех пор, пока в результате отражения висячего скачка от оси струи не образовывалась дозвуковая область течения. Вопросы, связанные с расчетом положения прямого центрального скачка уплотнения и течения за ним, не рассматривались. Это может быть сделано, например, с помощью метода установления.

Коэффициенты  $C_R$  и  $C_\alpha$  в (1.1), (1.2) вычислялись по следующим формулам:

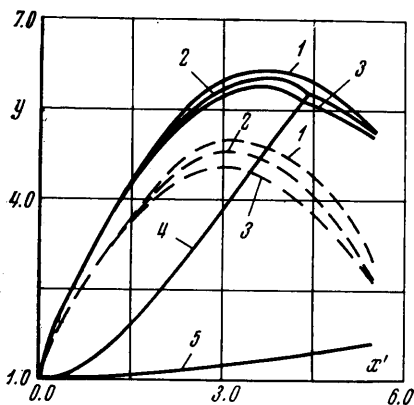
$$(3.1) \quad C_R = (18\mu/\delta_\tau d_p^2) [1 + 0.26 \cdot 10^{-3} Re^{1.38} + 0.197 Re^{0.63}]$$

$$C_\alpha = (6\mu/\delta_\tau d_p^2) (c_p/Pr) [2 + 0.459 Pr^{0.33} Re^{0.55}]$$

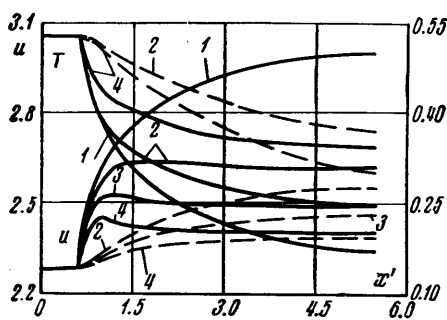
$$Re = |U - U_p| d_p \rho / \mu, \quad \mu = \mu_0 (T/T_0)^{0.71}$$

где  $Pr$  — число Прандтля,  $\mu_0$  — вязкость газа при  $T=T_0$ ,  $\delta_\tau$  — плотность материала частиц,  $d_p$  — диаметр частиц.

4. Проводились расчеты течения в диффузных струях при следующих значениях параметров:  $M_a=3$ ,  $n=20$ ,  $k=1.2$ ,  $d_p=10,50$  мкм,  $z=0.2, 0.4, 0.6$ ,



Фиг. 1



Фиг. 2

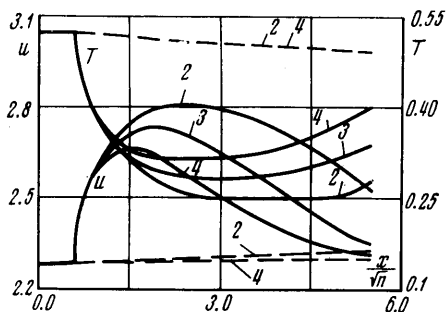
$r_a=10$  см,  $A = (18\mu_0 r_a) / (a_* \delta_\tau) = 0.48 \cdot 10^{-6}$  см<sup>2</sup>,  $x_0=0.5$  см, где  $M_a$  — число Маха на срезе сопла,  $n$  — степень нерасчетности,  $A$  — коэффициент, входящий в (3.1) после приведения системы (1.1), (1.2) к безразмерному виду. При этом все линейные размеры относились к  $r_a$ , скорости — к критической скорости звука  $a_*$ , давление, плотность, температура — к соответствующим параметрам торможения  $p_0, \rho_0, T_0$ .

На фиг. 1 изображены границы струй для различных размеров и концентраций частиц. Здесь  $x' = x/\sqrt{n}$ , 1 —  $z=0$ , 2 —  $z=0.4$ , 3 —  $z=0.6$ ,  $d_p=10$  мкм, 4 —  $d_p=10$  мкм,  $z=0.2, 0.4, 0.6$ , 5 —  $d_p=50$  мкм,  $z=0.2, 0.4, 0.6$ . Как следует из графиков, влияние второй фазы на волновую картину в струе (ударные волны изображены пунктирными линиями) существенно для  $d_p=10$  мкм при  $z \geq 0.4$ . При  $z=0.2$  картина течения практически не отличается от случая  $z=0$  (кривые на фиг. 1 графически не различимы). Частицы с  $d_p=50$  мкм для всех концентраций  $z$  на волновую картину течения влияют очень слабо. Положения предельных линий (кривые 4, 5) слабо зависят от концентрации частиц. В точке пересечения предельной линии с границей струи газа (кривые 2, 3) последняя имеет излом.

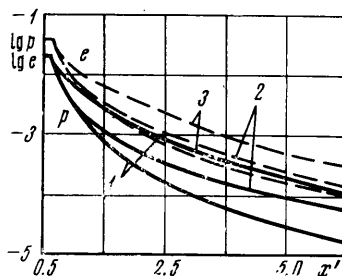
На фиг. 2 приведены распределения продольной скорости  $u$  и температуры  $T$  вдоль оси струи для  $d_p=10$  мкм при различных концентрациях частиц (1, 2, 3, 4 соответствуют  $z=0, 0.2, 0.4, 0.6$ ). При этом сплошные кривые соответствуют параметрам газа, пунктирные — параметрам частиц. Аналогичные кривые изображены на фиг. 3 для  $d_p=50$  мкм. Как следует из графиков, наличие твердой фазы существенно уменьшает скорость и число Маха на оси по сравнению с чистым газом. При этом для  $d_p=10$  мкм торможение газа частицами более интенсивное, а динамическое и тепловое запаздывания существенно меньше, чем для  $d_p=50$  мкм. Это обстоятельство связано с различием в числовых значениях коэффициентов  $C_R$  и  $C_\alpha$ , поскольку  $d_p$  входит в них в отрицательной степени.

Расширение газа в волне разряжения на оси для двухфазной струи (фиг. 4, где 1, 2 соответствуют  $z=0.06$ ,  $d_p=50$  мкм, 3 —  $z=0.6$ ,  $d_p=10$  мкм) гораздо меньше. Распределение параметров газа поперек струи при  $x=10$  приведено на фиг. 5 для  $d_p=10$  мкм и на фиг. 6 для  $d_p=50$  мкм (обозначения те же, что и на фиг. 2).

Сплошные линии соответствуют профилям продольных скоростей  $u$ , пунктирные — профилям температур  $T$ . Точки излома на профилях соответствуют положе-



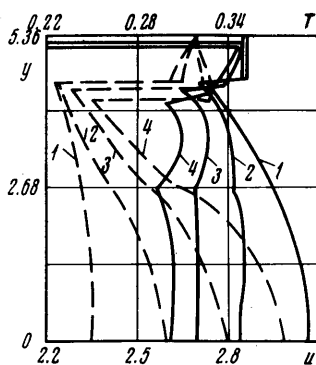
Фиг. 3



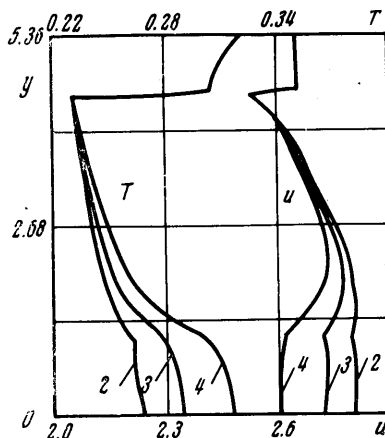
Фиг. 4

ниям предельных линий. Видно, что для  $d_p=50$  мкм влияние второй фазы ограничено в основном областью движения частиц и практически не влияет на положение висячего скачка. Для  $d_p=10$  мкм это влияние уже более существенно. Сам скачок уплотнения, как правило, локализуется в 2–3 ячейках разностной сетки.

При расчетах использовалась сетка с числом узлов  $N=60$ . С целью выяснения вопроса о точности получаемого решения проводилось сравнение с результатами [7]



Фиг. 5



Фиг. 6

для чистого газа при  $Ma=3$ ,  $n=100$ ,  $\theta_a=10^\circ$ ,  $k=1.3$  ( $\theta_a$  — угол наклона стенки сопла к оси струи). Оказалось, что положение границы струи совпадает с точностью  $\sim 0.5\%$ , положение висячего скачка — с точностью  $\sim 1\%$ . Наибольшее отличие в параметрах течения имело место в области висячего скачка. Так, отличие по давлению здесь  $\sim 10\%$ , в остальной области течения это отличие существенно меньше (до  $1\%$ ).

Кроме того, для сечений  $x=5, 10, 15, 20$  вычислялись интегральные законы сохранения. Погрешность в их выполнении не превышала  $0.05-0.1\%$ .

Программа для расчета течения в двухфазных струях была написана на языке АЛЬГИБР. Время счета одного варианта  $\sim 3$  мин на ЭВМ БЭСМ-6.

Поступила 21 V 1973

## ЛИТЕРАТУРА

1. Финагьева Ю. П., Щербаков Л. А., Горская Н. М. О газодинамической структуре недорасширенной сверхзвуковой струи и влиянии на параметры струи твердой фазы. В сб. «Тепло- и массоперенос», т. 1. М., «Энергия», 1968.
  2. Lewis Clarke H., Carlson D. J. Normal shock location in underexpanded gas and gas-particle jets. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 4.
  3. Jarvinen Philip O., Draper J. S. Underexpanded gas-particle jets. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 4.
  4. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двускоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, № 3.
  5. Клингел Дж., Никерсон Г. Течение смеси газа и твердых частиц в осесимметричном сопле. В сб. «Детонация и двухфазное течение». М., «Мир», 1966.
  6. MacCormac Robert W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. AIAA paper, 1969, No. 354.
  7. Аверенкова Г. И., Ашратов Э. А., Волконская Т. Г., Дьяконов Ю. Н., Егорова Н. И., Мельников Д. А., Росляков Г. С., Усков В. И. Сверхзвуковые струи идеального газа, ч. 2. М., МГУ, 1974.
-