

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВУМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ  
С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

Л. В. ШУРШАЛОВ

(Москва)

Численно исследуется двумерное плоскопараллельное неустановившееся движение, возникающее при распаде произвольного разрыва на границах нескольких соседних угловых областей, заполненных газами в различных состояниях.

Рассматриваемая задача в общем случае формулируется следующим образом<sup>1</sup>. Пусть вся плоскость разделена лучами, исходящими из некоторой точки  $O$ , на  $n$  секторов. Считается, что в каждом  $i$ -м секторе с углом раствора  $\alpha_i$  в начальный момент времени  $t=0$  находится газ с параметрами  $p_i, \rho_i, u_i, v_i, \gamma_i$ , различающимися от сектора к сектору. Здесь обозначения общеприняты. Требуется рассчитать возникающее в последующие моменты времени плоское двумерное течение. К такой постановке сводится, например, задача об отражении ударной волны от твердой стенки (в том числе и нерегулярном) и ряд других практически интересных задач.

Для любого фиксированного  $t > 0$  существует такое достаточно большое  $R$  (расстояние от точки  $O$ ), что в окрестности начального положения каждого луча на расстояниях от точки  $O$ , больших  $R$ , реализуется течение, соответствующее одномерному распаду произвольного разрыва. В этом случае течение представляет собой комбинацию двух волн, из которых одна или обе в зависимости от значений исходных параметров является либо волной разрежения, либо ударной волной [1]. В окрестности точки  $O$  происходит взаимодействие всех этих волн, порождающее сложное двумерное течение, описываемое системой уравнений

$$G \left( \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial P}{\partial X} = 0, \quad G \left( \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{\partial P}{\partial Y} = 0$$

(1)

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} + U \frac{\partial G}{\partial X} + V \frac{\partial G}{\partial Y} + G \left( \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} + U \frac{\partial P}{\partial X} + V \frac{\partial P}{\partial Y} + \gamma P \left( \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = 0$$

Здесь представлены уравнения движения в проекциях на оси декартовой системы координат, уравнение неразрывности и условие адиабатичности течения, записанные в безразмерном виде, причем

$$(2) \quad G = \rho/\rho_*, \quad P = p/p_*, \quad U = u/\sqrt{p_*/\rho_*}, \quad V = v/\sqrt{p_*/\rho_*}$$

$$X = x/l_*, \quad Y = y/l_*, \quad \tau = t/t_*, \quad t_* = l_*/\sqrt{p_*/\rho_*}$$

Звездочкой отмечены характерные значения.

Если начало системы координат выбрано совпадающим с точкой  $O$ , то в условиях задачи отсутствует характерный линейный размер —  $l_*$  не определено. Анализ размерностей [2] определяющих параметров данной за-

<sup>1</sup> На интерес исследования задачи в общей постановке автору указал В. В. Русанов.

дачи, в которые входят  $x, y, t, p_i, \rho_i, u_i, v_i, \gamma_i, \alpha_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), показывает, что возникающее двумерное течение газов будет автомодельным. Все его характеристики являются функциями лишь двух переменных —  $x/t$  и  $y/t$  (в безразмерной записи (2)  $X/\tau$  и  $Y/\tau$ ), а также набора безразмерных постоянных отношений типа  $p_i/p_k$  ( $p_* = p_k$ ), где  $p_k$  — начальное давление газа в  $k$ -м секторе. Автомодельный характер течения сохраняется и для случая более общих, чем у совершенного газа, уравнений состояния среды при условии, что из входящих в эти уравнения размерных переменных и постоянных нельзя образовать комбинацию с размерностью длины.

Искомое решение должно удовлетворять уравнениям (1), записанным в автомодельных переменных, и граничным условиям на некоторых в общем случае заранее неизвестных линиях, представляющих собой контактные поверхности, ударные волны или передние фронты распространяющихся слабых возмущений. Система (1) в автомодельных переменных  $X/\tau, Y/\tau$  является системой смешанного типа.

Рассмотрим подробно «простейшую» из возможных ситуаций, когда имеется лишь два сектора с газами в различных состояниях, и направления скорости газов при  $t=0$  параллельны общей биссектрисе этих секторов. При этом возникающее течение обладает плоскостью симметрии. В случае, если углы раствора секторов мало отличаются от  $\pi$ , возможна линеаризация решения около известного одномерного [3]. Для решения в случае произвольных углов применим численный подход, в некотором смысле аналогичный известному методу установления при расчете стационарного смешанного течения в соплах или около заглушенных тел.

Решение задачи проводится в физических переменных  $X, Y, \tau$ . Используется конечно-разностный метод из работы [4]. Применяется подвижная расчетная сетка с явным выделением основных характерных границ. Полученные результаты преобразуются в автомодельные координаты  $X/\tau, Y/\tau$ . Если решение существует, то оно не должно меняться со временем в плоскости этих переменных. Из-за разностного подхода требуется некоторое конечное время схождения численного решения к искомому автомодельному режиму. Стоит заметить, что для успеха решения задачи методом [4] необходимо рассчитывать распад разрыва на границах элементарных ячеек с высокой точностью и накладывать в некоторых случаях более строгие, чем обычно, ограничения на шаг по времени.

Остановимся на некоторых результатах численного решения. Пусть исходное состояние характеризуется данными

$$\alpha = 45^\circ, \gamma_1 = \gamma_2 = 1.4, p_2/p_1 = \rho_2/\rho_1 = 100, u_1 = v_1 = u_2 = v_2 = 0.$$

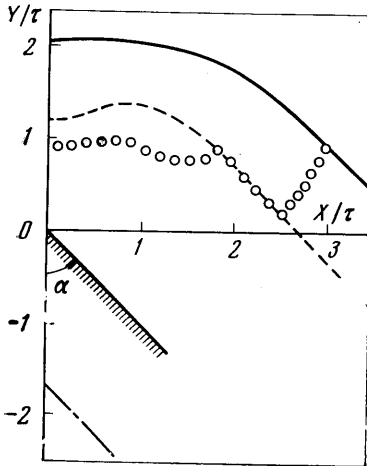
Здесь и далее через  $\alpha$  обозначен полуугол раствора области, содержащей газ под большим давлением. Такой набор параметров может соответствовать, в частности, разлету воздуха, сжатого при нормальной температуре до 100 атм и заполняющего при  $t=0$  прямоугольную область.

На фиг. 1 в автомодельных переменных  $X/\tau$  и  $Y/\tau$  показано положение ударной волны (сплошная линия), контактной поверхности (штриховая линия) и переднего фронта волны разрежения, распространяющейся по сжатому газу (штрихпунктирная прямая). Прямая с поперечной штриховкой отмечает начальный разрыв. Кружками нанесена линия перехода, разделяющая зоны эллиптичности и гиперболичности дифференциальных уравнений в переменных  $X/\tau, Y/\tau$ . Эллиптическая область лежит выше и левее этой границы. Между ударным фронтом и контактным разрывом двумерное течение целиком заключено в эллиптической зоне.

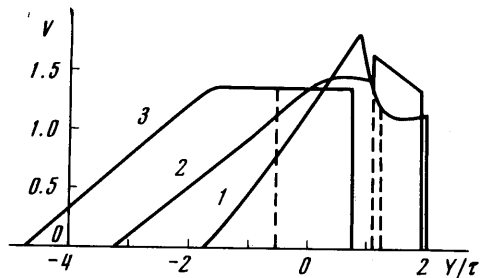
Как видно из фигуры, контактная поверхность вблизи плоскости симметрии  $X/\tau=0$  имеет прогиб. Это связано с воздействием на ее движение

вторичной ударной волны, образующейся в разлетающемся газе в непосредственной близости за поверхностью раздела. Вторичная волна затормаживает расходящийся поток вместе с соответствующими участками контактного разрыва. В плоскости  $X/\tau$ ,  $Y/\tau$  положение вторичной волны примерно совпадает с частью линии перехода, лежащей ниже штриховой кривой. Интенсивность вторичной волны быстро падает по мере удаления от оси  $Y/\tau$ . Основная ударная волна вблизи этой оси имеет большой практически плоский участок.

Фиг. 2 служит иллюстрацией к тому, что было сказано выше о вторичной ударной волне. Здесь даны распределения по координате  $Y/\tau$  вертикальной компоненты скорости  $V$  в трех сечениях ( $X/\tau=0, 1.5$  и  $3.1$ ), со-



Фиг. 1



Фиг. 2

ответственно обозначенных цифрами 1, 2, 3. Сечение 1 отвечает плоскости симметрии, сечение 3 расположено целиком в той области, где течение одномерное. Промежуточное сечение отмечено цифрой 2. Штриховые линии соответствуют контактному разрыву в трех случаях.

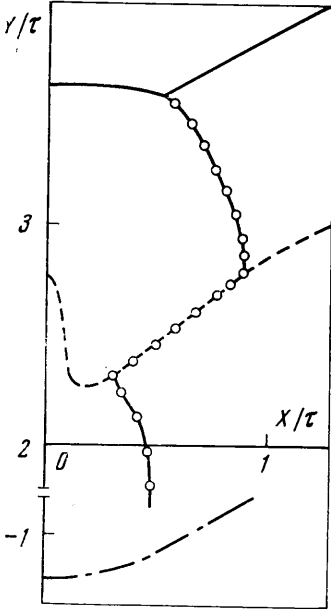
Из распределения 1 видно, что перед контактным разрывом происходит резкое торможение частиц разлетающегося газа, связанное с прохождением ими фронта вторичной ударной волны. Из-за того, что в расчете вторичная волна специально не выделяется, ее фронт представляется в виде зоны с большими градиентами функции. С увеличением числа расчетных ячеек ширина этой зоны уменьшается, а градиенты растут. О наличии вторичной волны в указанном месте свидетельствуют также аналогичные распределения давления и плотности. В сечении 2 также имеет место некоторое уменьшение скорости, но более слабое, что указывает на малую интенсивность вторичной волны в этом месте. В сечении 2 скорость между основной ударной волной и контактным разрывом практически линейно зависит от  $Y/\tau$ . На контактной поверхности  $V$  терпит разрыв. Распределение 3 имеет вид, обычный для одномерного распада разрыва — постоянное значение скорости между ударным фронтом и хвостом волны разрежения и линейная зависимость от  $Y/\tau$  в зоне этой волны. Здесь вторичной ударной волны нет.

Приведенные на фиг. 1, 2 результаты получены при использовании расчетных ячеек  $20 \times 30$  (соответственно по  $X$  и по  $Y$ ). Качественно правильное отображение течения получается в этом примере и с применением меньшего количества ячеек ( $10 \times 15$ ). Расчеты проводились также для сетки из  $30 \times 45$  ячеек. Для иллюстрации степени приближения полученного

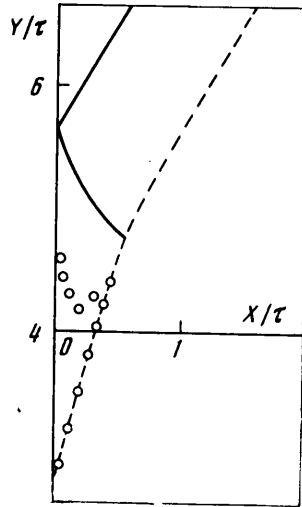
решения к точному приведем данные о положении точек ударной волны и контактного разрыва, лежащих на оси  $Y/\tau$ , последовательно для трех указанных расчетов при возрастании числа ячеек. Ударная волна: 2.10, 2.05, 2.05. Контактная поверхность: 1.28, 1.20, 1.20. Такая же степень приближения характерна для остальных точек граничных поверхностей и для полей гидродинамических функций.

Картина течения в случае других  $\alpha < 90^\circ$  при сохранении значений остальных исходных параметров качественно не изменяется. При  $\alpha > 90^\circ$  течение газа приобретает существенно иной характер.

На фиг. 3 показаны положение и форма характерных границ для  $\alpha = 120^\circ$  в тех же обозначениях, что и раньше. Здесь обнаруживаются две



Фиг. 3



Фиг. 4

новые интересные особенности решения. Во-первых, происходит нерегулярное отражение ударной волны от плоскости симметрии, которую можно рассматривать как твердую стенку. Во-вторых, наблюдается образование кумулятивной струи в результате схождения плотного газа к этой плоскости. Данные эффекты сильно зависят от величины угла  $\alpha$  (при прочих неизменных параметрах). В частности, при  $\alpha = 150^\circ$  кумулятивная струя не образуется, а ударная волна отражается от плоскости  $X/\tau = 0$  регулярно без образования маховской ножки. Конфигурация границ в этом случае изображена на фиг. 4.

Участки отраженных от плоскости симметрии ударных волн нанесены на фиг. 3, 4 также сплошными линиями. Эти участки в расчете специально не выделялись и были построены по градиентам гидродинамических функций. В области между падающей ударной волной и контактным разрывом отраженные волны отошли дальше от оси  $Y/\tau$ , чем внутри контактного разрыва, что связано с различием в скоростях звука в этих двух зонах. Успешные участки, переходя в область более плотного газа за контактной поверхностью, становятся весьма слабыми. Соответствующие их продолжения на фигурах не нанесены. Изображенный на фиг. 3 за контактной поверхностью участок представляет собой собственно отраженную в этой области волну. Линия перехода, показанная кружками,

в случае  $\alpha=120^\circ$  совпадает с фронтом отраженной волны. Эллиптическая область расположена левее этой линии вблизи вертикальной оси. При  $\alpha=150^\circ$  линия перехода не совпадает с отраженной волной. Здесь эллиптическая зона состоит из двух отдельных частей, одной, ограниченной на фиг. 4 кружками и осью  $Y/\tau$ , и другой, расположенной ниже в области плотного газа вблизи плоскости симметрии. Последняя подобласть лежит вне пределов фиг. 4.

Рассмотренные результаты выявляют ряд качественно различных режимов течения: один для  $\alpha < 90^\circ$ , два-три других для  $\alpha > 90^\circ$ . Существенные изменения картины течения могут происходить при вариации других параметров, определяющих исходные данные задачи. Не вдаваясь здесь в подробный анализ всех возможных ситуаций, проведем решение для  $\alpha=45^\circ$  при следующих значениях остальных величин:

$$\gamma_2=1.4, \gamma_1=7, p_2/p_1=100, \rho_2/\rho_1=0.125, u_1=v_1=u_2=v_2=0.$$

Такой набор соответствует разлету сильно нагретого сжатого газа в плотную среду типа воды.

Основные границы в этом случае показаны на фиг. 5. Вследствие более высоких скоростей распространения возмущений размеры области двумерного течения здесь на порядок больше, чем раньше. Ударная волна имеет более закругленную форму. Явно выраженной вторичной волны не наблюдается. Течение вблизи начала координат качественно подобно одномерному цилиндрически-расходящемуся потоку плотного газа, а вдали от него — соответствующему плоскому течению. Давление и скорость на контактной поверхности при  $X/\tau=0$  существенно больше, чем на ударной волне в аналогичной точке. Отмеченные обстоятельства приводят к тому, что в данном случае контактный разрыв вблизи плоскости симметрии имеет некоторую выпуклость.

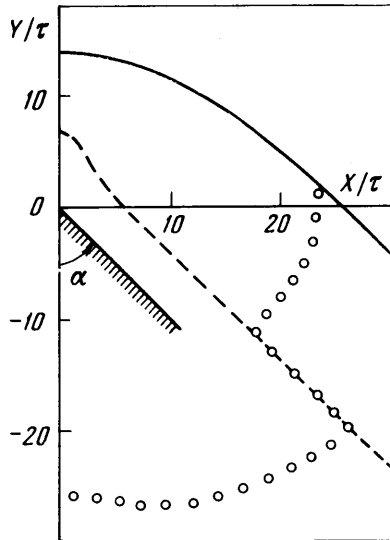
При распаде разрыва в трех и большем числе угловых областей очевидно имеет место большее многообразие картин течения. Представим результаты решения одного примера распада тройной конфигурации.

Пусть при  $\tau=0$  имеются три сектора с покоящимися газами в разных состояниях. Схема области в начальный момент времени показана в левом верхнем углу фиг. 6. Различные состояния отмечены цифрами 1, 2, 3. Исходные данные

$$\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=1.4, p_2/p_1=1, p_3/p_1=100, \rho_2/\rho_1=0.1, \rho_3/\rho_1=2$$

Распад такой конфигурации может локально для малых моментов времени соответствовать течению при взрыве на поверхности раздела двух различающихся плотностями сред погруженного в обе среды заряда.

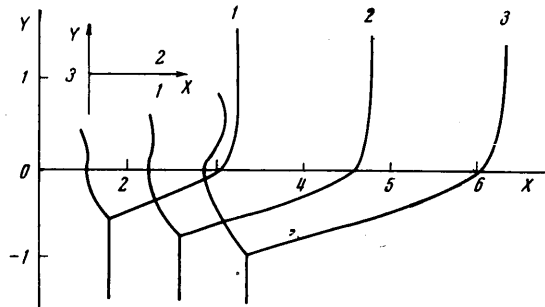
На фиг. 6 в плоскости физических переменных  $X, Y$  сплошными линиями нанесена форма ударных волн для трех моментов времени  $\tau$  ( $X, Y, \tau$  выражены в некоторых относительных единицах). Расчеты этого примера проводились без выделения особенностей, ударные волны вы-



Фиг. 5

страивались по градиентам гидродинамических функций. Как видно, кривые для разных  $\tau$  подобны одна другой. После перестроения их в автомодельные координаты  $X/\tau$ ,  $Y/\tau$  они практически совпадают между собой. Картина течения близка к искомому предельному автомодельному режиму.

Отметим характерные особенности происходящего физического процесса. Поскольку давление в области 3 больше, чем в областях 1 и 2, по последним распространяются ударные волны. В верхнем полупространстве, где выше температура и скорость звука, волна движется с большей



Фиг. 6

скоростью и проходит большее расстояние. Взаимодействуя со свободной поверхностью, она несколько ослабляется и переходит в нижнее полупространство, где ее скорость резко уменьшается. Перешедшая волна в некоторой точке встречается с волной, распространяющейся в нижнем полупространстве. Из их точки пересечения внутрь возмущенной области исходит третья волна. Она является по существу частью идущей по области 1 волны, ослабленной в результате взаимодействия со свободной поверхностью и течением газа за волной, перешедшей из области 2. Интенсивность третьей волны быстро падает по мере удаления от тройной точки. Распространение ударных волн при распаде тройных конфигураций, подобных рассмотренной здесь, рассчитывалось в [5] приближенным численным методом, использующим подход Уитэма [6].

Изученные особенности распада угловых областей, заполненных в начальный момент времени газами в различных состояниях, локально могут возникать во многих газодинамических течениях. Поэтому их исследование представляет определенный интерес. Изложенный подход позволяет рассматривать распад не только плоских, но и конических угловых областей, а также аналогичных течений, не обладающих автомодельными свойствами.

Поступила 21 III 1973

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика сплошных сред*. М., Гостехиздат, 1953.
2. Седов Л. И. *Методы подобия и размерности в механике*, Изд. 5. М., «Наука», 1965.
3. Тешуков В. М. Автомодельная задача о распаде двумерного разрыва. ПМТФ, 1972, № 2.
4. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отходящей ударной волной. *Ж. вычислит. матем. и матем. физ.*, 1961, т. 1, № 6.
5. Collins R., Chen H.-T. Propagation of a shock wave of arbitrary strength in two half planes containing a free surface. Труды секции по численным методам в газовой динамике II Международного colloквиума по газовой динамике взрыва и реагирующих систем (Новосибирск, 19–23 августа 1969 г.). М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1971, т. 1.
6. Whitham G. B. On the propagation of shock waves through regions of nonuniform area or flow. *J. Fluid Mech.*, 1958, vol. 4, pp. 337–360.