

О ДВИЖЕНИИ КАПЛИ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕРАСТВОРИМОГО ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНОГО ВЕЩЕСТВА

С. В. ИВАНОВА, А. С. ПОПЕЛЬ

(Москва)

Решена задача о движении капли в вязкой жидкости под действием нерастворимого поверхностно-активного вещества. Решение получено в стоксовом приближении в виде разложения по шаровым функциям. Показано, что возникающее вязкое течение приводит к смещению центра масс капли и к вытягиванию ее поверхности в сторону повышенной концентрации вещества.

Одним из механизмов движения биологических клеток является изменение поверхностного натяжения на границе клетка — окружающая жидкость. В зависимости от сорта вещества, растворенного в жидкости, окружающей клетку, клетки могут двигаться в сторону повышенной концентрации вещества (положительный хемотаксис) и в противоположную сторону (отрицательный хемотаксис) [1]. Примером могут служить направленные движения белых кровяных телец в плазме крови.

Для изучения механизмов движения клеток ставились модельные эксперименты с каплей вязкой жидкости, взвешенной в растворе с неравномерной концентрацией поверхностно-активного вещества (ПАВ), снижающего коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела жидкостей; при этом капля двигалась в сторону повышенной концентрации ПАВ с выпячиванием поверхности в направлении движения [1].

Задача о движении капли вязкой жидкости в растворе ПАВ с постоянным градиентом концентрации была рассмотрена в работе [2]; в принятом приближении капля сохраняла сферическую форму. Была также исследована задача о произвольном медленном движении капли в вязкой жидкости при неизменном коэффициенте поверхностного натяжения в предположении, что форма поверхности капли близка к сферической [3-5].

Цель настоящей работы — определение движения и деформации капли, на поверхности которой в начальный момент времени задается неравномерное распределение ПАВ.

1. Рассмотрим каплю жидкости с вязкостью η' , взвешенную в жидкости с вязкостью η (жидкости считаются несжимаемыми и равноплотными). В тонком слое на границе раздела жидкостей адсорбировано поверхностно-активное вещество с поверхностной концентрацией Γ . Это вещество уменьшает коэффициент поверхностного натяжения $\sigma(\Gamma)$, что приводит к изменению нормальных и тангенциальных сил на границе раздела; условия баланса этих сил можно записать в виде [6]

$$(1.1) \quad p_{nn} - p_{nn}' = \sigma(\Gamma) (1/R_1 + 1/R_2)$$

$$(1.2) \quad p_{n\tau} - p_{n\tau}' = -\nabla\sigma(\Gamma)$$

Здесь p_{nn} , p_{nn}' — нормальные, а $p_{n\tau}$, $p_{n\tau}'$ — касательные компоненты тензоров напряжений соответственно вне и внутри капли, R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности капли.

Из соотношения (1.2) следует, что при неравномерном распределении ПАВ на поверхности капли касательные напряжения в жидкостях отличны от нуля и, следовательно, возникает вязкое течение. В равновесии концентрация вещества постоянна вдоль поверхности и капля принимает сферическую форму.

Выпишем, предполагая внешние массовые силы отсутствующими, уравнение импульсов и уравнение неразрывности для жидкости вне капли

и внутри нее соответственно

$$(1.3) \quad \rho dv/dt = -\nabla p + \eta \Delta v, \quad \operatorname{div} v = 0$$

$$(1.4) \quad \rho dv'/dt = -\nabla p' + \eta' \Delta v', \quad \operatorname{div} v' = 0$$

Форма поверхности капли заранее неизвестна и должна быть определена из решения, поэтому условия (1.1), (1.2) и также условия прилипания $v=v'$ поставлены на неизвестной подвижной границе.

Предположим, что ПАВ не растворяется ни в жидкости, составляющей каплю, ни в окружающей жидкости (или почти не растворяется за время, характерное для данной задачи) и что в поверхностном слое отсутствует диффузия, т. е. адсорбированное вещество переносится со скоростью, которую жидкость имеет на поверхности раздела. С учетом сделанных предположений закон сохранения ПАВ имеет вид [6]

$$(1.5) \quad \partial \Gamma / \partial t + \operatorname{Div} \Gamma v_\tau = 0$$

Здесь v_τ — касательная компонента скорости на поверхности капли, символ Div обозначает поверхностную дивергенцию.

Пусть на поверхности капли было равномерно распределено ПАВ с концентрацией Γ_0 . В некоторый момент времени, который принимается за начальный, по поверхности дополнительно распределяется некоторое количество вещества с переменной концентрацией $\Delta \Gamma$, причем

$$(1.6) \quad \Delta \sigma^* / \sigma(\Gamma_0) = \varepsilon \ll 1, \quad \Delta \sigma^* = \sigma(\Gamma_0) - \sigma(\Gamma_0 + \Delta \Gamma^*)$$

Здесь $\Delta \Gamma^*$ — максимальное значение $\Delta \Gamma$.

Решение в первом приближении по малому параметру ε будем искать в виде

$$(1.7) \quad v = \varepsilon v^{(1)} + o(\varepsilon), \quad p = p_0 + \varepsilon p^{(1)} + o(\varepsilon)$$

$$v' = \varepsilon v'^{(1)} + o(\varepsilon), \quad p' = p_0' + \varepsilon p'^{(1)} + o(\varepsilon)$$

$$(1.8) \quad \Gamma = \Gamma_0 + \varepsilon \Gamma^{(1)} + o(\varepsilon), \quad \sigma = \sigma_0 + \varepsilon \sigma^{(1)} + o(\varepsilon), \quad U = \varepsilon U^{(1)} + o(\varepsilon)$$

Здесь $\sigma_0 = \sigma(\Gamma_0)$, U — скорость движения центра масс капли.

Зависимость $\sigma(\Gamma)$ считается заданной, поэтому

$$(1.9) \quad \sigma^{(1)} = -k \Gamma^{(1)}, \quad k = -(\partial \sigma / \partial \Gamma)_{\Gamma = \Gamma_0}$$

причем k — известная положительная константа [7].

Пользуясь соотношением (1.2), найдем, что характерная скорость движения имеет порядок $\Delta \sigma^* / \eta = \varepsilon \sigma_0 / \eta$, а из уравнения (1.5) оценим характерное время движения как $a \eta / k \Gamma_0$, где a — радиус капли в равновесии. Если наряду с неравенством (1.6) выполняется соотношение $\operatorname{Re} = \rho a k \Gamma_0 \eta^{-2} \ll 1$, и отношение вязкостей $\lambda = \eta' / \eta$ есть величина порядка единицы, то в уравнениях (1.3), (1.4) можно пренебречь полными производными по времени по сравнению с вязкими членами

$$(1.10) \quad \eta \Delta v = \nabla p, \quad \operatorname{div} v = 0; \quad \eta' \Delta v' = \nabla p', \quad \operatorname{div} v' = 0$$

Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) , начало которой в любой момент времени совпадает с центром масс капли. Предположим, что начальные условия осесимметричны, и расположим систему координат таким образом, что $v_\varphi = v'_\varphi = 0$ и производные всех величин по φ также равны нулю. Таким образом, искомые величины могут зависеть от координат r, θ и от времени t .

Уравнение поверхности капли в подвижной системе координат запишем в виде

$$r = a[1 + \varepsilon \xi(\theta, t)] + o(\varepsilon)$$

Можно показать, что с точностью до членов порядка ε граничные условия с неизвестной поверхности капли могут быть перенесены на сферу $r=a$.

С указанной точностью из условий прилипания и (1.2) находим соответственно

$$(1.11) \quad v_r^{(1)} = v_r'^{(1)} = a \partial \xi / \partial t, \quad v_\theta^{(1)} = v_\theta'^{(1)} \quad (r=a)$$

$$(1.12) \quad p_{r\theta}^{(1)} - p_{r\theta}'^{(1)} = -(1/a) \partial \sigma^{(1)} / \partial \theta \quad (r=a)$$

Из уравнения (1.1) в «нулевом» приближении получается известное соотношение

$$p_0' - p_0 = 2\sigma_0/a$$

В первом приближении

$$(1.13) \quad p_{rr}^{(1)} - p_{rr}'^{(1)} = \sigma_0 H^{(1)} + 2\sigma^{(1)}/a \quad (r=a)$$

$$2H = 1/R_1 + 1/R_2 = 2/a + \varepsilon H^{(1)} + O(\varepsilon)$$

средняя кривизна поверхности; в осесимметричном случае [9]

$$(1.14) \quad H^{(1)} = -\frac{2\xi}{a} - \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right)$$

Сохраняя в уравнении (1.6) лишь члены порядка ε , и воспользовавшись равенством (1.9), получим

$$(1.15) \quad \frac{\partial \sigma^{(1)}}{\partial t} - \frac{k\Gamma_0}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta v_\theta^{(1)} \right) = 0$$

Вдали от капли выполняются условия

$$(1.16) \quad v_r^{(1)} \rightarrow -U^{(1)} \cos \theta, \quad v_\theta^{(1)} = U^{(1)} \sin \theta$$

В качестве начальных условий при $t=0$ примем

$$(1.17) \quad \xi(\theta, 0) = 0, \quad \Gamma^{(1)}(\theta, 0) = \gamma(\theta)$$

Таким образом, величины первого приближения удовлетворяют уравнениям (1.10), условиям на сфере $r=a$ (1.11)–(1.13) и (1.15), условиям на бесконечности (1.16) и начальным условиям (1.17).

Индекс (1), указывающий на порядок приближения, в дальнейшем опускается.

2. Общее решение Ламба уравнений (1.10) в осесимметричном случае имеет вид [8]

$$(2.1) \quad p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{-n-1}}{r^{n+1}} P_n$$

$$v_r = -U \cos \theta + \sum_{n=1} \left[\frac{(n+1)}{2(2n-1)\eta} \frac{A_{-n-1}}{r_n} - (n+1) \frac{B_{-n-1}}{r^{n+2}} \right] P_n$$

$$v_\theta = U \sin \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{(n-2)}{2n(2n-1)\eta} \frac{A_{-n-1}}{r^n} + \frac{B_{-n-1}}{r^{n+2}} \right] \frac{dP_n}{d\theta}$$

$$p' = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n$$

$$(2.2) \quad v_r' = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n}{2(2n+3)\eta'} A_n r^{n+1} + n B_n r^{n-1} \right] P_n$$

$$v_\theta' = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+3)}{2(n+1)(2n+3)\eta'} A_n r^{n+1} + B_n r^{n-1} \right] \frac{dP_n}{d\theta'}$$

Здесь $P_n = P_n(\theta)$ — полином Лежандра порядка n ; A_{-n-1} , B_{-n-1} , A_n , B_n — в данной задаче величины, зависящие только от времени. Пределы суммирования выбраны так, чтобы функции p , v_r , v_θ не имели особенностей в бесконечности, а p' , v_r' , v_θ' — в начале координат.

Разложим искомые величины $\sigma(\theta, t)$ и $\xi(\theta, t)$ в ряды по полиномам Лежандра

$$(2.3) \quad \sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(t) P_n(\theta), \quad \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(t) P_n(\theta)$$

Из условия неизменности объема капли следует $\xi_0 = 0$, а так как начало системы координат помещено в центр масс капли, то

$$\int_0^\pi \xi \sin^2 \theta d\theta = 0$$

и, следовательно, $\xi_1 = 0$.

Подставляем выражения (2.1), (2.2) в граничные условия и, пользуясь уравнением Лежандра и свойством ортогональности полиномов с разными индексами

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_n}{d\theta} \right) + n(n+1)P_n = 0, \quad \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi P_n P_m \sin \theta d\theta = \delta_{mn}$$

получим линейные алгебраические соотношения между коэффициентами A_{-n-1} , B_{-n-1} , A_n , B_n , σ_n , ξ_n , $\dot{\sigma}_n$, $\dot{\xi}_n$, где точкой обозначена производная по времени; для каждого значения $n \geq 2$ получается замкнутая система из шести уравнений. Возможно, таким образом, исключая часть неизвестных, получить систему двух линейных дифференциальных уравнений относительно ξ_n и σ_n . Дополнительное условие $\xi_1 = 0$ дает возможность найти скорость движения центра масс капли.

Введем безразмерные величины по формулам

$$\sigma^* = \sigma/\sigma_0, \quad \Gamma^* = \Gamma/\Gamma_0, \quad U^* = U\eta/\sigma_0, \quad t^* = t\sigma_0/a\eta, \quad r^* = r/a,$$

$$A_{-n-1}^* = \frac{A_{-n-1}}{a^n \sigma_0}, \quad B_{-n-1}^* = \frac{B_{-n-1}\eta}{a^{n+2}\sigma_0}, \quad A_n^* = \frac{A_n\eta a^{n+1}}{\eta' \sigma_0}$$

$$B_n^* = \frac{B_n\eta a^{n-1}}{\sigma_0}, \quad \lambda = \eta'/\eta, \quad \nu = k\Gamma_0/\sigma_0$$

В безразмерной форме получим при $n=1$ следующие соотношения:

$$(2.4) \quad \sigma_1^* = \sigma_{10}^* \exp\left(-\frac{2\nu t^*}{2+3\lambda}\right), \quad U^* = \frac{2\sigma_1^*}{3(2+3\lambda)}, \quad A_1^* = \frac{10\sigma_1^*}{2+3\lambda}$$

$$B_1^* = -\sigma_1^*/(2+3\lambda), \quad A_{-2}^* = 0, \quad B_{-2}^* = \sigma_1^*/3(2+3\lambda)$$

Величина σ_{10}^* будет определена далее из начальных условий.

Интегрируя скорость U^* по времени, находим путь, проходимый центром масс капли. В размерном виде

$$s = a \varepsilon \sigma_{10}^* / 3 \nu$$

При $n \geq 2$ выразим величины A_{-n-1}^* , B_{-n-1}^* , A_n^* и B_n^* через σ_n^* , ξ_n

$$A_{-n-1}^* = \frac{n(2n-1)}{p_n r_n} \{ [(2n+3)r_n + (2n+1)(p_n - q_n)] \sigma_n^* +$$

$$+ (n-1) [(2n+3)r_n - (2n+1)q_n] \xi_n \}$$

$$B_{-n-1}^* = \frac{n}{2p_n r_n} \{ [(2n+1)r_n + (2n-1)(p_n - q_n)] \sigma_n^* +$$

$$+ (n-1) [(2n+1)r_n - (2n-1)q_n] \xi_n \}$$

$$A_n^* = \frac{2(n+1)(2n+3)}{p_n} [\sigma_n^* + (n-1)\xi_n].$$

$$B_n^* = \frac{(n+1)P_n}{p_n r_n} [(p_n - q_n)\sigma_n^* - (n-1)q_n \xi_n]$$

$$p_n = \frac{2}{(n+2)} [2n^2 + 4n + (2n^2 + 4n + 3)\lambda]$$

$$q_n = (2n^2 + 4n + 3) + (2n^2 + 4n)\lambda, \quad r_n = 2n^2 + 1 + 2(n^2 - 1)\lambda$$

Для величин σ_n^* и ξ_n получаем систему линейных дифференциальных уравнений

$$(2.5) \quad \begin{aligned} p_n r_n \dot{\xi}_n &= n(n+1) [(r_n + p_n - q_n)\sigma_n^* + (n-1)(r_n - q_n)\xi_n] \\ p_n r_n \dot{\sigma}_n^* &= -\nu n(n+1) \{ [(n+3)r_n + (n+1)(p_n - q_n)] \sigma_n^* + \\ &+ (n-1) [(n+3)r_n - (n+1)q_n] \xi_n \} \end{aligned}$$

Из соотношений (1.9), (1.17), (2.3) получим для этой системы начальные условия

$$(2.6) \quad \sigma_n^*(0) = \sigma_{n0}^*, \quad \xi_n(0) = 0 \quad \left(\sigma^*(\theta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{n0}^* P_n(\theta) \right)$$

Решение уравнений (2.5) с условиями (2.6) имеет вид

$$(2.7) \quad \sigma_n^*(t^*) = \frac{\sigma_{n0}^*}{p_n r_n (\kappa_{n1} - \kappa_{n2})} \{ p_n r_n [\kappa_{n1} \exp(\kappa_{n1} t^*) - \kappa_{n2} \exp(\kappa_{n2} t^*)] -$$

$$- n(n^2 - 1)(r_n - q_n) [\exp(\kappa_{n1} t^*) - \exp(\kappa_{n2} t^*)] \}$$

$$(2.8) \quad \xi_n(t) = \frac{\sigma_{n0}^* n(n+1)(r_n + p_n - q_n)}{p_n r_n (\kappa_{n1} - \kappa_{n2})} [\exp(\kappa_{n1} t^*) - \exp(\kappa_{n2} t^*)]$$

где κ_{n1} , κ_{n2} — корни соответствующего характеристического уравнения.

Дискриминант характеристического уравнения равен

$$D_n = \{ (n-1)(r_n - q_n) - \nu [(n+3)r_n + (n+1)(p_n - q_n)] \}^2 - 8\nu(n-1)p_n r_n$$

и нетрудно проверить, что он может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому при некоторых значениях параметров деформации капли имеют характер затухающих колебаний, хотя скорость центра масс изменяется аperiodически.

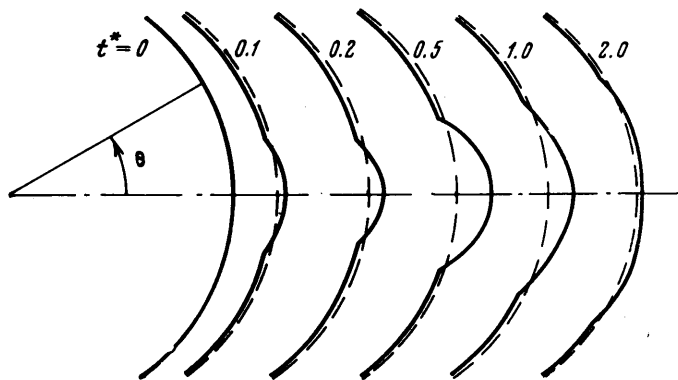
3. Зададим изменение поверхностного натяжения в начальный момент времени в виде разрывной функции

$$\sigma^*(\theta, 0) = \begin{cases} -1 & \text{при } 0 \leq \theta \leq \theta^* \\ 0 & \text{при } \theta^* < \theta \leq \pi \end{cases}$$

Тогда

$$\sigma_{n0}^* = \frac{(2n+1)}{2(n+1)} [P_{n-1}(\theta^*) - \cos \theta^* P_n(\theta^*)]$$

Деформация поверхности капли определялась по формуле (2.8) для частного случая $\lambda=1$, $\nu=0.1$, $\theta^*=\pi/18$. Последовательное изменение по-



верхности капли для разных моментов времени показано на фигуре, величина $\varepsilon \xi(\theta, t)$ отложена в масштабе $10\varepsilon^{-1}$ от невозмущенного значения радиуса $r^*=1$ вдоль соответствующих направлений θ . Скорость движения центра масс капли направлена вправо. На графиках видно образование и последующее сглаживание «выпячивания» в месте попадания на поверхность капли поверхностно-активного вещества.

Результаты расчетов показывают, что направление движения капли и форма ее поверхности во время движения качественно соответствуют картине, наблюдаемой в модельных экспериментах с каплями (в которых, однако, применялось растворимое ПАВ).

Количественное сравнение скорости движения центра масс затруднительно, так как результаты данной работы применимы лишь к каплям весьма малых размеров; для больших размеров необходимо сохранять в уравнениях движения производные от скоростей по времени. Приложение полученных результатов к проблеме движения клеток требует также анализа других механизмов движения, в частности, механохимического.

Авторы благодарят В. А. Левина и С. А. Регирера за критические замечания и В. М. Ентова за обсуждение работы.

Поступила 24 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Адо А. Д. Патофизиология фагоцитов. М., Медгиз, 1961.
2. Левич В. Г., Кузнецов А. М. О движении капель в жидкостях под действием поверхностно-активных веществ. Докл. АН СССР, 1962, т. 146, № 1.
3. Cox R. G. The deformation of a drop in a general time-dependent fluid flow. J. Fluid Mech., 1969, vol. 37, pt 3.
4. Hetsroni G., Haber S. The flow in and around a droplet or bubble submerged in an unbound arbitrary velocity field. Rheol. Acta, 1970, vol. 9, No. 4.
5. Matunobu Y. Motion of a drop suspended in a viscous flow with arbitrary velocity profile. J. Phys. Soc. Japan, 1970, vol. 29, No. 2.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
7. Воюцкий С. С. Курс коллоидной химии. М., «Химия», 1964.
8. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.